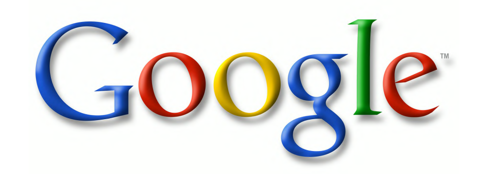


This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

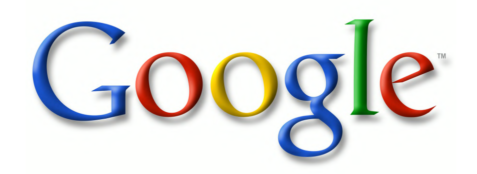
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at http://books.google.com/



Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.
+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.
+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.
+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

BIBLIOGRAPHIC RECORD TARGET

Graduate Library
University of Michigan

Preservation Office

Storage Number: ____________________

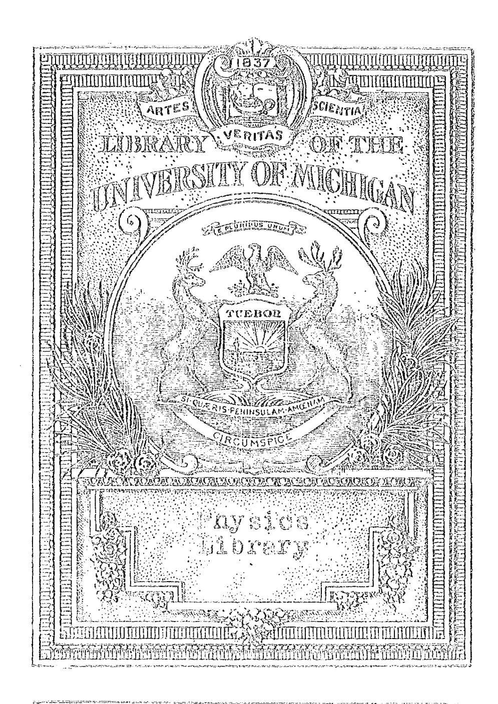
ABV7354
UL FMT B RT a BL m T/C DT 07/18/88 R/DT 07/18/88 CC STAT mm E/L 1
010: : |a 11006033
035/1: : |a (RLIN)MIUG86-B58673
035/2: : |a (CaOTULAS)160216791
040: : |c MnU |d MiU
050/1:0 : |a QA862.T7 |b K72
100:1 : |a Klein, Felix, |d 1849-1925.
245:10: |a Über die Theorie des Kreisels. |c Mit 143 Figuren im Text.
260: : |a Leipzig, |b B. G. Teubner, |c 1897-1910.
300/1: : |a vii, 966 [i.e. 982] p. |b illus., diagrs., |c 26 cm.
500/1: : |a At head of title: F. Klein und A. Sommerfeld.
500/2: : |a Four pages (special t.-p. and "Anzeige") inserted before each heft.
505/3:0 : |a Hft. I. Einführung in Kinematik und Kinetik des Kreisels.--Hft. II. Durchführung der Theorie im Falle des schweren symmetrischen Kreisels.--Hft. III. Die Störenden Einflüsse astronomische und geophysikalische Anwendungen.--Hft. 4. Die technischen Anwendungen der Kreiseltheorie.
590/4: : |a phys: Copy 2 is 4 pts. in 2. v. Imperfect: p. iii-viii and special t.-p. for hft. 1 lacking
650/1: 0: |a Tops

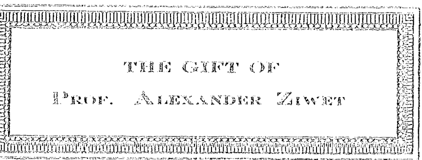
Scanned by Imagenes Digitales
Nogales, AZ

On behalf of
Preservation Division
The University of Michigan Libraries

Date work Began: ______________
Camera Operator: ______________







Hosted by Google

Überreicht vom Verfasser

Hosted by Google

Hosted by Google

Alexander Ziwet

F. KLEIN UND A. SOMMERFELD,

ÜBER DIE

THEORIE DES KREISELS.

TG

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1897. – 1903

Hosted by Google

ALLE RECHTE,
EINSCHLIESSLICH DES ÜBERSETZUNGSRECHTS, VORBEHALTEN.

Hosted by Google

Anzeige des Buches

(aus den Mitteilungen der Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner in Leipzig).

Das Werk verdankt seinen Ursprung einer während des Winter-Semesters 1895/96 von Prof. Klein an der Göttinger Universität gehaltenen Vorlesung. Die Ausführung der hierbei vorgetragenen Ideen sowie die Abrundung des Stoffes hat seitdem in der Hauptsache Dr. Sommerfeld obgelegen.

Der erste Abschnitt, welcher im Juli dieses Jahres erscheint, bringt nach einem vorbereitenden Kapitel kinematischen Inhalts die grundlegenden Betrachtungen über die Prinzipien der Mechanik, soweit sie für den vorliegenden Fall in Frage kommen. Einen eigenartigen Charakter dürfte dieser Teil dadurch erhalten haben, daſs die Verf. im Sinne der älteren Autoren vielfach auf Stoſskräfte zurückgehen und überall den Begriff des „Impulses" (nach W. Thomsons Ausdrucksweise, Poinsots couple d'impulsion), d. h. derjenigen stoſsartigen Drehkraft in den Vordergrund rücken, welche imstande ist, die jeweilige Bewegung von der Ruhe aus momentan zu erzeugen. Hierdurch scheint die Theorie des Kreisels sowie die Mechanik starrer Körper überhaupt einen höheren Grad von Anschaulichkeit und Einfachheit zu gewinnen wie bei ausschlieſslicher Benutzung kontinuierlich wirkender Kräfte.

Der zweite Abschnitt behandelt eingehend die mathematische Seite der Theorie, die explicite Darstellung der Bewegung des schweren symmetrischen Kreisels durch elliptische Funktionen. Es wird hier gezeigt, daſs nicht die gewöhnlich benutzten sog. Eulerschen unsymmetrischen Winkel, bez. die Eulerschen symmetrischen Parameter (Quaternionengröſsen), sondern gewisse aus der Riemannschen Funktionentheorie hervorwachsende Parameter in analytischer Hinsicht die einfachsten Bausteine sind, aus denen sich die allgemeinen Formeln der Kreiselbewegung zusammensetzen.

Der dritte Abschnitt bringt neben mancherlei Ergänzungen des früheren (Berücksichtigung der Reibung im Unterstützungspunkte, Kritik der populären Kreisellitteratur etc.) die mannigfachen Anwendungen der Theorie auf astronomische und physikalische Fragen. Hier galt es vornehmlich, die in der englischen Litteratur insbesondere in der Natural Philosophy von Thomson und Tait aufgehäuften Schätze, die Untersuchungen über cyklische Systeme, über

Hosted by Google

Gyrostaten etc., dem deutschen Publikum in bequem lesbarer Form vorzuführen.

Ursprünglich als eine Widmung für den Verein zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichtes gedacht, sollte das Buch auch für die der Forschung ferner stehenden Mathematiker und Physiker ohne Schwierigkeit verständlich sein. Spezifische Vorkenntnisse aus der analytischen Mechanik oder der Funktionentheorie sind daher nicht vorausgesetzt worden. Es ist aber zu hoffen, daſs auch die spezifisch mathematischen Kreise eine gewisse hieraus resultierende Breite und Behaglichkeit der Darstellung nicht unangenehm empfinden werden.

Die Tendenz des Buches möge schlieſslich durch einige der Einleitung entnommenen Sätze charakterisiert werden:

„Die Entwickelung der theoretischen Mechanik hat, namentlich in Deutschland, eine zu ausschlieſsliche Richtung auf das Abstrakte und Formale genommen, welche dem unmittelbaren Verständnis vielfach hinderlich entgegenwirkt. Der Studierende, welcher wohl die allgemeinen mechanischen Prinzipien analytisch herzuleiten lernt, faſst darum ihr eigentliche mechanische Bedeutung nicht immer lebendig genug auf und zeigt sich, vor ein spezielles Problem gestellt, zu dessen Lösung häufig ungeschickt.“

„Diesem neuerdings auch von anderer Seite hervorgehobenen Übelstande wünschen wir durch die eingehende Behandlung unseres Problemes entgegenzutreten. Wir möchten nicht nur eine Kenntnis der Mechanik, sondern sozusagen ein Gefühl dafür begründen. Natürlich ist hierzu volle Klarheit über die geometrischen Verhältnisse der Bewegung eine erste Vorbedingung. . . . Noch wichtiger aber ist für uns volle Klarheit über die mechanischen Ursachen der Bewegung, über die ins Spiel kommenden Kräfte. Wir werden uns diese möglichst konkret im Raume durch Vektoren versinnlichen; besonderen Wert legen wir auf die Ausbildung und konsequente Benutzung des Impulsbegriffes etc. . . . Dabei gedenken wir die analytische Seite unseres Problems keineswegs zu verkürzen. Die Formel liefert schlieſslich doch die einfachste und prägnanteste Beschreibung des Bewegungsvorganges; auſserdem ist sie als Grundlage der wirklichen numerischen Ausrechnung unentbehrlich. Wir werden nur verlangen, daſs unsere Kenntnis der Mechanik nicht auf die Formel basiert ist, sondern daſs umgekehrt die analytische Formulierung als letzte Konsequenz aus einem gründlichen Verständnis der mechanischen Verhältnisse von selbst zum Vorschein kommt.“

Hosted by Google

Einleitung.

Billiger Weise werden wir uns zu Beginn dieser Vorlesung darüber zu verständigen haben, was wir unter dem Worte Kreisel verstehen, und was wir nicht darunter begriffen wissen wollen.

Unter einem Kreisel verstehen wir — vorbehaltlich einer späteren Verallgemeinerung des Begriffes — *einen der Schwere unterworfenen starren Körper, dessen Masse symmetrisch um eine Axe des Körpers verteilt ist, und bei dem mittelst einer geeigneten Vorrichtung ein auf der Symmetrieaxe gelegener Punkt im Raume festgehalten wird.*

Wir bezeichnen den festen Punkt des Körpers als *Unterstützungspunkt O;* derselbe zerlegt die Symmetrieaxe in zwei Halbstrahlen, von denen wir nach beliebiger Auswahl einen als *Figurenaxe* bezeichnen. Die zur Figurenaxe senkrechte Ebene durch O heifst die *Äquatorebene des Kreisels.*

Das nebenstehend abgebildete Modell, welches von dem um die experimentelle Seite der Kreiseltheorie besonders verdienten französischen Ingenieur Rozé verfertigt ist und welches uns in dieser Vorlesung ständig zu Demonstrationszwecken dienen wird, stellt einen Kreisel in dem angegebenen Sinne dar.

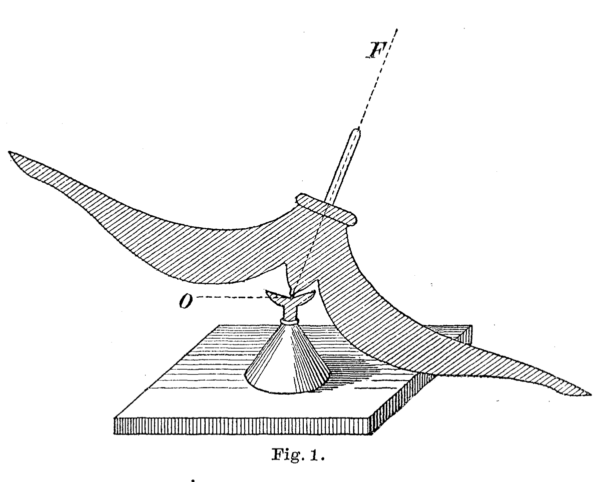


Fig. 1.

Von dem glockenförmig gestalteten Hauptteile giebt unsere Figur nur einen Meridianschnitt wieder; um das räumliche Bild desselben zu erhalten, müssen wir uns die Zeichnung um die Figurenaxe OF gedreht denken. Das

Hosted by Google

untere Ende der Figurenaxe ruht bei O in einer an dem Gestell befestigten Pfanne auf, so dafs es sich während der Bewegung nicht wesentlich verschieben kann. Durch die eigentümliche Gestaltung des Hauptteiles ist erreicht worden, dafs bei vertikaler Stellung der Figurenaxe der Schwerpunkt des Kreisels senkrecht unter dem Unterstützungspunkte liegt, dafs sich also in dieser Stellung der Körper im stabilen Gleichgewicht befindet. Wird das Umgekehrte gewünscht, so läfst sich dieses durch Hinzufügung von Übergewichten bewirken, die selbst Rotationskörper sind und axial auf die Figurenaxe des Kreisels aufgesetzt werden. Eine Besonderheit des Rozéschen Kreisels besteht in einer sinnreichen Vorrichtung, welche es ermöglicht, dem Kreisel eine lebhafte Rotation zu erteilen, ohne die Spitze, in der er im Unterstützungspunkt endigt, zu schädigen. Alle Teile des Modells sind solide aus Metall gearbeitet. Wir erkennen in unserem Beispiele die obigen Merkmale des Kreiselbegriffes wieder: *die Rotationssymmetrie um die Figurenaxe, die feste Lage eines ihrer Punkte und die Starrheit des Materials.*

Dagegen stellt das uns wohlbekannte und gemeinhin als Kreisel bezeichnete Kinderspielzeug strenge genommen in dem oben festgesetzten Sinne des Wortes keinen Kreisel vor, weil der Unterstützungspunkt desselben nicht im Raume festliegt, sondern sich in der horizontalen Ebene, d. h. auf dem Erdboden frei bewegen kann. Unser mechanisches Problem tritt uns hier in komplizierterer Form entgegen. Zur Orientierung möge gleich jetzt bemerkt werden, dafs die vollständige analytische Behandlung des *Kreisels mit beweglichem Unterstützungspunkte* auf *hyperelliptische Funktionen* führt, während die allgemeine Bewegung des *Kreisels mit festem Unterstützungspunkte* durch *elliptische Funktionen* dargestellt wird. Wir werden auf dieses kompliziertere Problem in unserer Vorlesung nur anhangsweise eingehen können.

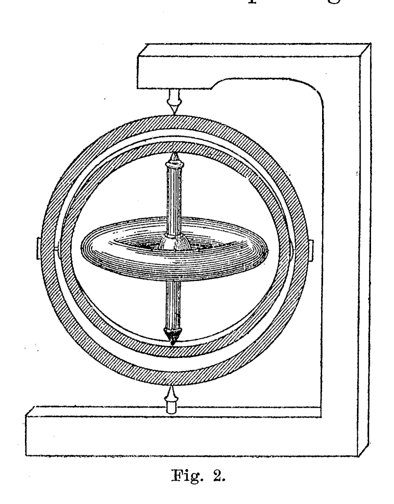


Fig. 2.

Ebensowenig fällt unter unsern Kreiselbegriff genau genommen die in der nebenstehenden Figur dargestellte Vorrichtung, welche man als *Bohnenbergersches Maschinchen* (oder auch als *Foucaultsches Gyroskop*) zu bezeichnen pflegt. Der Hauptteil des Apparates besteht aus einem Schwungrade, dessen Axe in einem inneren Ringe leicht beweglich gelagert ist.

Hosted by Google

Der innere Ring ist um eine Axe beweglich, welche zur Axe des Schwungrades senkrecht steht und ihre Lager in einem äufseren Ringe hat. Letzterer ist seinerseits wieder um eine zur Axe des inneren Ringes senkrechte Axe drehbar. Bei dieser Vorrichtung bleibt während der Bewegungen des Systems allerdings ein Punkt (der Mittelpunkt des Schwungrades) im Raume fest. Dafür stellt der Apparat aber keinen einheitlichen starren Körper dar, weil sich die Ringe relativ gegen das Schwungrad bewegen können; aufserdem ist auch die Rotationssymmetrie um die Axe des Schwungrades durch die Masse der Ringe gestört. Wollen wir den Apparat dennoch gelegentlich als Beispiel für unsere Kreiselbetrachtungen heranziehen, so müssen wir die ausdrückliche Annahme hinzufügen, dafs die Masse des Schwungrades gegenüber den Massen des äufseren und inneren Ringes sehr beträchtlich ist und müssen uns daraufhin gestatten, die letzteren gegen die erstere zu vernachlässigen. Alsdann haben wir es bei der mechanischen Behandlung des Apparates nurmehr mit dem Schwungrade zu thun, welches einen einheitlichen starren Rotationskörper darstellt. Sehen wir aber von dieser vereinfachenden Annahme ab, so wird die Theorie des Apparates erheblich komplizierter wie die unseres Kreisels.

Allerdings ist es selbstverständlich, dafs strenge genommen überhaupt kein realer Körper der eingangs aufgestellten Definition entspricht. Weder dürfte es möglich sein, einen materiellen Punkt durch mechanische Vorrichtungen im Raume vollkommen festzustellen, noch giebt es in der Natur irgendwo einen absolut starren Körper. Ebenso selbstverständlich aber ist es, dafs wir mit unserer Analyse den wirklichen Verhältnissen niemals vollständig gerecht werden können. In der Mathematik handelt es sich immer um idealisierte Probleme; wir müssen die wirklichen Verhältnisse durch Abstraktion von allerlei Nebenumständen stets erheblich vereinfachen, bevor wir an ihre mathematische Behandlung denken können.

Dabei entsteht die Frage, wie weit sich die wirklichen Erscheinungen mit unserem idealen mathematischen Schema decken mögen. Um hierüber ein Urteil zu gewinnen, wird man den Einflufs der nicht in Rechnung gesetzten Umstände einzeln festzustellen suchen und wird die so gefundenen Abweichungen der Lösung des idealisierten Problemes als Korrektionsglieder hinzufügen. In diesem Sinne werden wir später die Reibung des Kreisels in der unterstützenden Pfanne untersuchen; auch werden wir, wenigstens qualitativ, die Elastizität der Unterlage berücksichtigen, welche den Kreisel trägt. Eine ganze Reihe anderer Umstände — die Elastizität des Kreiselmateriales selbst, die Mitführung der umgebenden Luft etc. etc. — werden als weniger ins Gewicht

Hosted by Google

fallend und gar zu kompliziert von der Betrachtung ausgeschlossen bleiben.

Warum wir aus der Fülle der mechanischen Probleme einen so speziellen Gegenstand wie die Kreiselbewegung herausgreifen, bedarf vielleicht der Erklärung.

Zunächst bietet der Kreisel an sich ein besonderes Interesse dar. Seine Bewegungen sind uns von der einen Seite sehr bekannt und haben doch etwas Paradoxes und den allgemeinen mechanischen Prinzipien scheinbar Widersprechendes an sich. Diesen Widerspruch aufzulösen, wird vom Standpunkte der Mechanik eine anziehende Aufgabe sein. Von dem Interesse, welches unser Gegenstand beanspruchen darf, zeugen auch die zahlreichen diesbez. älteren und neueren Monographieen. (Vgl. die beigefügte Litteraturübersicht.) Sodann spielt der Kreisel in den Nachbargebieten der Mechanik, in der Astronomie und in der theoretischen Physik, eine wichtige Rolle. Ein Spezialstudium unseres Problems scheint daher auch aus diesem Grunde angezeigt. Endlich besitzt die Kreiseltheorie auch vom Standpunkte der reinen Mathematik ein eigenartiges, zum Mindesten historisches Interesse. War es doch unser Problem, bez. das in ihm enthaltene Problem der Pendelschwingungen, welches von altersher fördernd auf die Theorie der elliptischen Funktionen eingewirkt hat.

Weiterhin aber betrachten wir den Kreisel als ein Beispiel zur allgemeinen Mechanik und hoffen gerade durch das Voranstellen des Speziellen die Auffassung des Allgemeinen zu beleben. Die Entwickelung der Mechanik hat, namentlich in Deutschland, eine zu ausschliefsliche Richtung auf das Abstrakte und Formale genommen, welche dem unmittelbaren Verständnis vielfach hinderlich entgegenwirkt. Der Studierende, welcher wohl die allgemeinen mechanischen Prinzipien analytisch herzuleiten lernt, fafst darum ihre eigentliche mechanische Bedeutung nicht immer lebendig genug auf und zeigt sich, vor ein spezielles Problem gestellt, zu dessen Lösung ungeschickt.

Diesem Übelstande wünschen wir durch die eingehende Behandlung unseres Problems entgegenzutreten. Wir möchten nicht nur eine Kenntnis der Mechanik, sondern sozusagen ein Gefühl dafür begründen. Natürlich ist hierzu volle Klarheit über die geometrischen Verhältnisse der Bewegung eine erste Vorbedingung. Wir gedenken daher durch zahlreiche Figuren die geometrische Anschauung zu beleben — im Gegensatze zu Lagrange, dem gröfsten Vertreter der abstrakten Richtung in der Mechanik, welcher mit besonderer Vorliebe betonte, dafs in seiner analytischen Mechanik nicht eine Figur zu finden sei. Noch wichtiger aber ist für uns volle Klarheit über die mechanischen

Ursachen der Bewegung, über die ins Spiel kommenden Kräfte. Wir werden uns diese möglichst konkret im Raume durch Vektoren versinnlichen; besonderen Wert legen wir auf die Ausbildung und konsequente Benutzung des Impulsbegriffes, worunter wir diejenige Stofskraft, bez. dasjenige System von Stofskräften verstehen, welches im stande ist, die jeweilige Bewegung momentan von der Ruhe aus zu erzeugen. Dabei gedenken wir die analytische Seite unseres Problems keineswegs zu verkürzen. Die Formel liefert schliefslich doch die einfachste und prägnanteste Beschreibung des Bewegungsvorganges; aufserdem ist sie als Grundlage der wirklichen numerischen Ausrechnung unentbehrlich. Wir werden nur verlangen, dafs unsere Kenntnis der Mechanik nicht auf die Formel basiert ist, sondern dafs umgekehrt die analytische Formulierung als letzte Konsequenz aus einem gründlichen Verständnis der mechanischen Verhältnisse von selbst zum Vorschein kommt.

Die hier ausgesprochene Tendenz nach einer über den Formeln stehenden mechanischen Auffassung kommt namentlich in den englischen Lehrbüchern zur Geltung. Wir nennen natürlich in erster Linie das geniale Werk von Thomson und Tait, den treatise on natural philosophy*), ferner das in Deutschland meist nicht genügend bekannte Werk von Routh**), welches als Lehrbuch noch geeigneter sein dürfte, weil es systematischer durchgearbeitet und nicht so schwer verständlich ist wie jenes. Neben den verbreiteten französischen Lehrbüchern***) kommen für uns namentlich in Betracht die Darstellungen von Voigt†) und Budde††), während uns die berühmte Kirchhoffsche Mechanik einseitig systematisch und zu abstrakt erscheint. Am frühesten und nachdrücklichsten hat Poinsot die hier vertretene Forderung und zwar speziell bei unseren Rotationsproblemen erhoben. Die schönen Methoden von Poinsot werden wir in dieser Vorlesung besonders gerne kultivieren. Im übrigen möchten wir nicht so weit gehen, wie Poinsot, der aus seinen Betrachtungen die Koordinatenrechnung nach Möglichkeit verbannt und sich so den Zugang zu den schwierigeren Problemen selbst verschliefst. Wir möchten die Poinsotschen Betrachtungen nur als eine

*) Nur die erste Auflage dieses Werkes (erschienen Cambridge 1867) ist bis jetzt ins Deutsche übertragen (Braunschweig 1871); die zweite Auflage, welche 1883—86 in zwei Teilen erschien, ist sehr viel reichhaltiger; Zitate im Folgenden beziehen sich immer auf diese zweite Auflage.

**) Dynamics of a system of rigid bodies, 2 Bde., 5. Aufl. London 1891; eine deutsche Übersetzung erscheint demnächst bei B. G. Teubner.

***) Von Duhamel, Despeyrous-Darboux, Appell etc.

†) Voigt, Elementare Mechanik, Leipzig 1891.

††) Budde, Allgemeine Mechanik der Punkte und starren Systeme, 2 Bde., Berlin 1890.

Hosted by Google

erste und zwar sehr wertvolle Einführung in die Theorie der Rotationsprobleme ansehen, wollen sie aber überall da, wo sie allein nicht mehr zum Ziele führen oder doch zu kompliziert werden, durch die Analysis vervollständigen. So werden wir z. B. gleich das erste Kapitel mit geometrischen Untersuchungen nach dem Vorbilde Poinsots beginnen, dann aber bald zu analytischen Betrachtungen übergehen.

Natürlich können wir in dieser Vorlesung keine systematische Entwickelung der Mechanik geben; wir werden eine allgemeine Kenntnis des weiten Gebietes voraussetzen müssen. Ebenso werden wir eine gewisse Vertrautheit mit den Methoden der Funktionentheorie nicht entbehren können. Indessen sollen sowohl die mechanischen wie die funktionentheoretischen Begriffe bei ihrem Auftreten an dem Beispiel unseres Kreisels kurz erläutert werden, so daſs die Vorlesung auch zu einer ersten orientierenden Einführung in das Gebiet der elliptischen Funktionen und in die höheren Partieen der Mechanik allgemeiner Systeme dienen kann.

Schlieſslich noch ein Wort über die Handhabung der Infinitesimalrechnung. Wir gedenken in dieser Darstellung keineswegs mit derjenigen Strenge vorzugehen, welche heutzutage in der Infinitesimalrechnung möglich und vielfach üblich ist. Vielmehr werden wir uns alle diejenigen Erleichterungen zu nutze machen, welche die Ausdrucksweise der unendlich kleinen Gröſsen und die Vertauschung der Grenzübergänge mit sich bringt. Offenbar hat die moderne Verschärfung der Infinitesimalrechnung nicht den Sinn, daſs man auf Schritt und Tritt durch diesbezügliche Bedenken behindert werden soll, sondern daſs man diese ein für allemal in den Grundlagen der Infinitesimalrechnung erledigt, um hernach um so unbedenklicher verfahren zu können. Wer die genaueren Methoden der Differentialrechnung kennt, wird im folgenden etwa wünschenswerte Präzisierungen der Ausdrucksweise stets leicht hinzufügen können. Wir unterlassen dieses nicht deshalb, weil darin irgend eine Schwierigkeit liegt, sondern weil wir hierdurch die Darstellung unnötig schleppend machen und die Aufmerksamkeit von den eigentlichen Schwierigkeiten des Problems ablenken würden.

Hosted by Google

Kapitel I.

Die Kinematik des Kreisels.

§ 1. Geometrische Behandlung der Kinematik.

Wir beginnen mit einem Kapitel geometrischen Inhalts, welches von der *Kinematik* des Kreisels handeln soll. Als Gegensatz zu Kinematik gebrauchen wir nach dem Vorschlage von Thomson und Tait das Wort *Kinetik*. Während die Kinematik lediglich mit den Begriffen Raum und Zeit operiert und die Bewegungen nur nach ihrer geometrischen Möglichkeit untersucht, nimmt die Kinetik die Begriffe von Masse und Kraft hinzu und behandelt die Bewegungen mit Rücksicht auf ihre mechanische Möglichkeit.

Da in der Kinematik die Massenverteilung des Körpers gänzlich irrelevant ist, so kommen von den in der Einleitung postulierten Eigenschaften des Kreisels hier nur die Starrheit des Materials und die feste Lage des Unterstützungspunktes in Betracht. Die folgenden Untersuchungen gelten also für einen *beliebigen starren Körper mit festem Unterstützungspunkte. Wir wollen einen solchen Körper einen „allgemeinen Kreisel“ nennen, im Gegensatz zu dem in der Einleitung definierten „symmetrischen Kreisel“.* Auch in den nächstfolgenden Kapiteln beziehen wir uns teilweise auf diesen „allgemeinen Kreisel“, während wir uns in den letzten Kapiteln durchaus auf den „symmetrischen Kreisel“ beschränken müssen.

Die Probleme der Kinematik werden unter allgemeinstem Gesichtspunkte nach der *Anzahl der Freiheitsgrade* eingeteilt. Die Bedeutung dieses gleichfalls von Thomson und Tait eingeführten Ausdruckes wird durch die folgende kleine Tabelle erläutert:

Ein im Raume frei beweglicher Punkt besitzt *drei Grade der Freiheit*, (seine Lage wird durch drei unabhängige Coordinaten bestimmt).

Ein starrer frei beweglicher Körper hat *sechs Freiheitsgrade*, (die Lage und Orientierung des Körpers wird durch Angabe von sechs, geeigneten, unabhängigen Parametern festgelegt).

Ein starrer Körper, von welchem ein Punkt festgehalten wird, besitzt wieder *drei Grade der Freiheit.*

Hosted by Google

Dementsprechend kommen unserem *Kreisel mit festem Punkte*, sofern wir ihn als starren Körper behandeln dürfen, *drei Grade der Freiheit* zu. Der *bewegliche Kreisel*, dessen Unterstützungspunkt in einer horizontalen Ebene spielt, hat *fünf Freiheitsgrade*. Wir können auch Kreisel mit *einem* oder *zwei* Freiheitsgraden herstellen, indem wir die Figurenaxe in einem festen Gestelle oder in einem Ringe lagern, welcher seinerseits um eine feste Axe drehbar ist. Dagegen würde unser Kreisel *unendlich viele Grade der Freiheit* besitzen, sobald wir die *elastischen Deformationen des Materials* berücksichtigen wollten.

Bei den folgenden Betrachtungen werden wir fürs erste die Vorstellung eines im Raume frei beweglichen starren Körpers zu Grunde legen, von welchem der Kreisel mit festem Unterstützungspunkte ein Spezialfall ist. Da es sich um sehr einfache und bekannte Dinge handelt, wird es genügen, an die fraglichen Sätze kurz zu erinnern, ohne sie ausführlich abzuleiten. Die Beweise möge man nötigenfalls in den vorgenannten Lehrbüchern nachlesen.

Wir betrachten einen in Bewegung begriffenen starren Körper in zwei verschiedenen Lagen und stellen uns die Aufgabe, diejenige Bewegung anzugeben, welche in einfachster Weise von der Anfangslage zu der Endlage überführt. Die Lage des Körpers ist vollkommen bestimmt, wenn die Lage von irgend dreien seiner Punkte, sagen wir O, P, Q, bekannt ist. Die Anfangslage der Punkte möge mit $O_1 P_1 Q_1$, die Endlage mit $O_2 P_2 Q_2$ bezeichnet werden. Zunächst können wir durch eine Parallelverschiebung des Körpers den Punkt O_1 nach O_2 transportieren; dabei mögen die Punkte P_1, Q_1 bez. übergehen in P_1', Q_1'. Sodann verbinden wir P_1' mit P_2, Q_1' mit Q_2 und konstruieren in der Mitte der Verbindungslinien die Normalebenen zu letzteren. Diese schneiden sich in einer durch O_2 hindurchgehenden Axe. Drehen wir nun den Körper um diese Axe durch einen geeigneten Winkel, so wird P_1' nach P_2 und Q_1' nach Q_2 geschafft. Wir können also durch Kombination einer Parallelverschiebung und einer Drehung das Dreieck OPQ und also auch den starren Körper aus seiner Anfangslage in seine Endlage überführen. Daher der Satz:

Die allgemeinste Ortsveränderung eines frei beweglichen starren Körpers kann immer durch die Kombination einer Rotation und einer Translation ersetzt werden.

Berücksichtigen wir ferner, daſs eine Parallelverschiebung gleichbedeutend ist mit einer Drehung um eine unendlich ferne Axe oder mit einem sogenannten Drehungspaar, d. h. mit zwei Drehungen um parallele Axen von gleichem Drehungswinkel aber entgegengesetztem Sinne, so können wir dem vorhergehenden Satze auch die folgende

Hosted by Google

Fassung geben, welche im Hinblick auf den entsprechenden Satz der Statik starrer Systeme von Interesse ist:

Die allgemeinste Ortsveränderung eines starren Körpers kann ersetzt werden durch eine Einzeldrehung und ein Drehungspaar.

Offenbar läſst sich unsere Konstruktion noch in sehr mannigfacher Weise dadurch abändern, daſs der gerade herausgegriffene Punkt O durch irgend einen anderen Punkt ersetzt wird. Wir mögen den jedesmal benutzten Punkt O etwa den „Bezugspunkt“ nennen und können uns fragen, ob wir durch geeignete Wahl des Bezugspunktes das Resultat unserer Konstruktion vereinfachen können. In dieser Hinsicht ergiebt sich, daſs man immer den Bezugspunkt so wählen kann, daſs die Richtung der Translation zu der Axe der Rotation parallel wird. Bekanntlich nennt man die Kombination einer Drehung mit einer nach der Axe der Drehung erfolgenden Parallelverschiebung eine *Schraube* (genauer eine „Bewegungsschraube“)*). Die Gröſse der Parallelverschiebung zusammen mit der Gröſse der Drehung bestimmt die Ganghöhe; Gröſse, Axe und Sinn der Drehung geben den Drehungswinkel, die Drehungsaxe und den Drehungssinn der Schraube. Wir können daraufhin sagen:

Die allgemeinste Ortsveränderung eines starren Körpers kann bei geeigneter Wahl des Bezugspunktes ersetzt werden durch eine Schraubung von bestimmter Axe, bestimmtem Drehungswinkel und Drehungssinn und bestimmter Ganghöhe.

Unsere Schraubenbewegung stimmt mit der wirklich stattfindenden Bewegung des Körpers natürlich nur in der Anfangs- und Endlage überein; die bei der wirklichen Bewegung eingenommenen Zwischenlagen können dabei von den während der hinzugedachten Schraubenbewegung stattfindenden Zwischenlagen durchaus verschieden sein. Betrachten wir aber eine unendlich kleine Bewegung des starren Körpers d. h. den Grenzfall einer endlichen Bewegung während eines unendlich abnehmenden Zeitintervalles und die zugehörige unendlich kleine Schraube, d. h. den Grenzfall der zugehörigen endlichen Schraubenbewegung. Hier können wir von Zwischenlagen nicht mehr sprechen; infolgedessen werden wir eine unendlich kleine Bewegung mit der hinzukonstruierten Schraubenbewegung direkt als identisch ansehen und können kurz sagen:

Jede unendlich kleine Bewegung eines starren Körpers i s t *eine Schraubenbewegung.*

---

*) Vergl. Sir Robert Ball. The theory of screws. Dublin 1876. (Deutsch bearbeitet von Gravelius, Berlin 1889).


Hosted by Google

Übrigens werden wir eine unendlich kleine Schraube nicht durch ihren (unendlich kleinen) Drehungswinkel, sondern lieber durch ihre (als endlich vorauszusetzende) Drehungsgeschwindigkeit charakterisieren.

Wir gehen nun auf die speziellen Verhältnisse bei unserem Kreisel d. h. natürlich bei dem allgemeinen Kreisel ein. Hier werden wir den Bezugspunkt O in den festen Unterstützungspunkt legen. Alsdann wird die Ganghöhe der Schraube gleich Null; die Schraubenbewegung artet in eine einfache Drehung um eine durch O gehende Axe aus. Wir haben daher die Sätze:

Eine beliebige Bewegung unseres Kreisels kann in ihrem Resultate ersetzt werden durch eine Drehung von bestimmter Axe, bestimmtem Drehungswinkel und Drehungssinn;

und

Jede momentane (unendlich kleine) Bewegung des Kreisels ist eine Drehung von bestimmter Axe und Drehungsgeschwindigkeit und bestimmtem Drehungssinn.

Zunächst mögen einige Bemerkungen über die Zusammensetzung von Drehungen folgen, wobei wir mit Rücksicht auf den Kreisel nur solche Drehungen zu betrachten brauchen, deren Axen durch O hindurchgehen. Wir wollen uns vorstellen, dafs dem Kreisel nach einander zwei verschiedene endliche Drehungen erteilt werden. Das Resultat derselben können wir nach dem vorhergehenden Satz auch durch eine Einzeldrehung bewirken. Näheres erfahren wir über letztere aus dem Satze*): Drehen wir den Raum successive um die drei Kanten einer dreiseitigen Ecke je durch die doppelten Kantenwinkel, so kommen wir zur Anfangslage zurück. Hieraus ergiebt sich folgende Konstruktion der resultierenden Drehung: Wir schlagen um O die Einheitskugel, verbinden ihre Schnittpunkte mit den Axen der Teildrehungen durch einen gröfsten Kreis und tragen an diesen die *halben* Winkel der bez. Teildrehungen an. *Dann giebt die dritte Ecke des so entstehenden sphärischen Dreiecks die Axe, der anliegende Aufsenwinkel den halben Winkel der resultierenden Drehung.* Merkwürdiger Weise operiert diese Konstruktion mit den halben Drehungswinkeln, so dafs aus ihr ein bis auf Multipla von 2π bestimmter Wert des halben, d. h. ein modulo 4π bestimmter Wert des ganzen Drehungswinkels folgt.

Wir sprechen sodann von unendlich kleinen Drehungen oder Drehgeschwindigkeiten. Wie üblich ordnen wir der unendlich kleinen

*) Vgl. Schell: *Theorie der Bewegung,* Leipzig 1879 II. Teil, Kap. II, § 9. Der Satz spielt in Hamiltons *Lectures on quaternions* eine grofse Rolle (art 217 u. ff.).

Hosted by Google

Drehung ein geometrisches Bild durch folgende Maſsnahme zu: Wir tragen von O aus auf der Axe der Drehung eine Strecke ab, welche uns die Gröſse der Drehgeschwindigkeit repräsentiert und zwar durchgehends nach derjenigen Seite hin, von der aus die Drehung im Sinne des Uhrzeigers zu erfolgen scheint. Das so entstehende geometrische Gegenbild der unendlich kleinen Drehung nennen wir einen *Drehungsvektor*. Ist der letztere bekannt, so folgt daraus Axe, Geschwindigkeit und Sinn der unendlich kleinen Drehung in unzweideutiger Weise.

Wir haben dabei nur noch eine Festsetzung über den Maſsstab hinzuzufügen, in dem wir die repräsentierende Strecke abtragen und über das Maſssystem, in dem wir die Winkelgeschwindigkeit messen wollen. Am einfachsten ist es, hier und im folgenden durchgehends das sog. „*absolute Maſssystem*" zu Grunde zu legen, also eine Länge in Centimetern, eine Zeit in Sekunden zu messen. Eine Winkelgeschwindigkeit werde immer in Bogenmaſs ausgedrückt, also etwa durch den in cm gemessenen Bogen eines Kreises, welchen ein um 1 cm von der Drehungsaxe entfernter Punkt während einer sec bei gleichförmiger Drehung beschreiben würde. Im absoluten Maſssystem kommt in diesem Sinne jeder Drehungsgeschwindigkeit ein bestimmter numerischer Wert, sagen wir n, zu. Unsere repräsentierende Strecke bestimmen wir daraufhin so, daſs wir gerade n cm auf der Drehungsaxe in der oben angegebenen Weise abtragen.

Der fragliche Satz über die Zusammensetzung zweier unendlich kleiner Drehungen lautet nun einfach so:

Zwei unendlich kleine Drehungen setzen sich nach dem Parallelogramm der Kräfte zusammen, d. h. so, daſs sich die zugehörigen Drehungsvektoren geometrisch (wie Strecken oder Vektoren) addieren.

Dieser fundamentale und sehr bekannte Satz rechtfertigt nachträglich die Einführung des Wortes Drehungsvektor und zeigt überdies, daſs das Resultat zweier unendlich kleiner Drehungen von ihrer Reihenfolge *unabhängig* ist, daſs also *unendlich kleine Drehungen vertauschbare Operationen bedeuten.* Zum Beweise dessen genügt es, die Figur des Parallelogrammes zu betrachten. Bemerken wir dagegen, daſs das Resultat zweier endlicher Drehungen sich ändert, wenn wir die Reihenfolge der Teildrehungen umkehren, daſs also *endliche Drehungen nicht vertauschbar sind.* Der Beweis folgt daraus, daſs bei der auf pag. 10 angedeuteten Konstruktion die Bestimmungsstücke der Teildrehungen in unsymmetrischer Weise benutzt werden.

Hierauf betrachten wir den in Bewegung begriffenen Kreisel in einer ganzen Reihe verschiedener Lagen, fassen also eine erste, zweite, dritte, ... Lage desselben ins Auge. Die Bewegung, welche von der

Hosted by Google

ersten zur zweiten, von der zweiten zur dritten Lage etc. überführt, ersetzen wir je durch eine einzelne Drehung und erhalten so eine Reihe verschiedener durch O gehender Drehungsaxen. Dabei unterscheiden wir, wie überhaupt in der Kinematik, zwischen einem *beweglichen* und einem *festen Systeme.* Das bewegliche System ist unser Kreisel, das feste der ideale Raum.

Wir bemerken noch, daſs die Auszeichnung des einen Systems vor dem anderen, welche in den Worten „beweglich" und „fest" liegt, vom Standpunkte der reinen Kinematik eigentlich ungerechtfertigt ist und daſs es richtiger wäre, etwa von einem *ersten* und *zweiten* System zu sprechen. Geometrisch ist nämlich jede Bewegung mit ihrer umgekehrten, bei welcher die Rolle des beweglichen und des festen Systemes vertauscht ist, gleichberechtigt. In der *Kinematik* handelt es sich also immer nur um *Relativbewegungen.* Anders in der *Kinetik.* Die zur Erzeugung einer Bewegung erforderlichen Kräfte ändern sich durchaus, wenn wir das bewegliche System mit dem festen vertauschen. In der Kinetik haben also die *direkte* und die *umgekehrte Bewegung* einen im allgemeinen durchaus verschiedenen Charakter. Eine Ausnahme von dieser Regel werden wir später besonders betonen, wo wir den Satz kennen lernen werden, daſs die Umkehr der Kreiselbewegung unter speziellen Umständen wieder eine Kreiselbewegung wird von demselben kinetischen Charakter, wie die direkte Bewegung.

Die Axen der oben genannten Drehungen, welche den Kreisel aus der ersten in die zweite, aus der zweiten in die dritte Lage etc. bringen, wollen wir uns sowohl im festen wie im beweglichen System markieren. Wir bekommen so, wenn wir die successiven Kanten noch durch Ebenen verbinden, ein im Kreisel und ein im Raume festes *Vielkant* mit resp. gleichen Seitenwinkeln. Bei der ersten Drehung fallen die bez. ersten Kanten der beiden Vielkante zusammen. Um diese dreht sich das bewegliche System und zwar soweit, bis die zweiten Kanten zur Deckung gekommen sind. Bei der zweiten Drehung dreht sich das bewegliche System um die zweite Kante. Die Gröſse der Drehung bestimmt sich dadurch, daſs am Ende derselben die bez. dritten Kanten zusammenfallen müssen. So geht es fort. Den ganzen Drehungsvorgang können wir kurz folgendermaſsen schildern:

Es rollt das bewegliche Vielkant auf dem festen ab.

Natürlich braucht diese Bewegung mit der von dem Kreisel wirklich ausgeführten nur in den jedesmaligen Endlagen der Teildrehungen übereinzustimmen. Die Zwischenlagen können in beiden Fällen noch sehr verschieden sein. Um nun aber auf diesem Wege eine vollständige Wiedergabe der wirklichen Bewegung zu erreichen, werden wir den

Hosted by Google

Grenzübergang von den endlichen zu unendlich kleinen Drehungen machen. Wir fassen die Bewegung des Kreisels in jedem Momente als eine unendlich kleine Drehung auf und denken uns die zugehörige „instantane Drehaxe" sowohl im festen wie im beweglichen System konstruiert. Unsere Vielkante verwandeln sich bei dem Grenzübergange in Kegel. Wir erhalten *einen im Raume festen* und *einen im Kreisel festen Kegel,* welche ihre gemeinsame Spitze in dem Unterstützungspunkte haben. Den im Kreisel festen Kegel bezeichnen wir als den *Kegel der Polhodie* (zu deutsch: Weg der Drehpole bez. der Drehaxen), den im Raume festen Kegel nennen wir den *Kegel der Herpolhodie* (zu deutsch: Weg, auf welchem der Drehpol entlang kriecht; da das Wort von dem griechischen ἕρπειν, kriechen, abgeleitet ist, sollte man eigentlich sagen: Herpopolhodie). Während der Bewegung rollen nun diese beiden Kegel ohne zu gleiten auf einander ab, und wir haben den Satz:

Eine beliebige kontinuierliche Bewegung des Kreisels kann in allen ihren Lagen dadurch wiedergegeben werden, daſs wir einen beweglichen auf einem festen Kegel abrollen lassen. Der bewegliche Kegel ist der Ort der instantanen Drehaxen im Kreisel; der feste Kegel ist der Ort der Drehaxen im Raum.

Wir haben damit das schöne und anschauliche Bild reproduziert, unter welchem man sich nach Poinsot*) die Bewegung des Kreisels kinematisch vorzustellen hat. Dieses Bild wird allemal dann sehr nützlich sein, wenn die abrollenden Kegel eine übersichtliche Gestalt haben, so namentlich im Falle der regulären Präzession (vgl. den letzten Paragraphen dieses Kapitels). In komplizierteren Fällen dagegen, wo die Gestalt der Kegel nicht direkt bekannt und, wenn sie es wäre, der Anschauung schwer zugänglich ist, scheint die Nützlichkeit der Poinsotschen Vorstellung einigermaſsen problematisch.

Entsprechende Überlegungen lassen sich auch für den frei beweglichen starren Körper durchführen. Der Unterschied ist nur der, daſs die successiven instantanen Drehaxen nicht durch einen festen Punkt hindurchgehen, sondern im allgemeinen windschief im Raume verteilt sind. *Infolge dessen treten hier statt der Kegel zwei allgemeinere geradlinige Flächen (Regelflächen) auf.* Auch besteht die instantane Bewegung nicht in einer reinen Drehung sondern in einer unendlich kleinen Schraubung. *Die beiden Regelflächen rollen also nicht nur auf einander ab, sondern gleiten gleichzeitig in gewisser Weise längs ihrer Erzeugenden an einander hin, sie schroten auf einander, wie die Ingenieure sagen.*

*) Vgl. Poinsot: Théorie nouvelle de la rotation des corps, Paris 1834, auch Liouv. Journ. sér. 1. t. 16, deutsche Übersetzung von Schellbach, Berlin 1851.



Wir mögen noch von den Kegeln der Polhodie und Herpolhodie zu gewissen auf ihnen verlaufenden Kurven übergehen. Wir denken uns zu dem Zweck auf der instantanen Drehaxe den „instantanen Drehungsvektor" nach der oben angegebenen Regel abgetragen. Der Endpunkt des letzteren beschreibt dann im festen wie im beweglichen System je eine Kurve, welche wir bez. *Herpolhodie- und Polhodiekurve* nennen. *Gleichzeitig mit den Kegeln rollen bei der Bewegung des Kreisels auch diese Kurven auf einander ab.* Da sie mehr über die jeweilige Drehung aussagen als die entsprechenden Kegel, nämlich aufser der Axe auch Gröfse und Sinn der Drehung zur Erscheinung bringen, so wird es häufig vorteilhaft sein, diese Kurven an Stelle jener Kegel zu verwenden.

Bei der Konstruktion des Drehungsvektors haben wir stillschweigend vorausgesetzt, dafs der Beobachter, welcher über den Sinn der Drehung und über die Richtung, in welcher der Drehungsvektor abgetragen wird, zu entscheiden hat, eine im Raume feste Stellung einnimmt und die Bewegung des Kreisels relativ gegen den festen Raum beobachtet. Wir können den Drehungsvektor aber auch für die umgekehrte Bewegung konstruieren. Dann werden wir einen Beobachter voraussetzen müssen, welcher eine im Kreisel feste Stellung hat und die Drehung des Raumes relativ gegen den für ihn ruhenden Kreisel beobachtet. Diese Drehung findet in jedem Augenblicke im umgekehrten Sinne statt wie die vorherige. Der Drehungsvektor der umgekehrten Bewegung ist daher nach der entgegengesetzten Seite abzutragen, wie der der direkten. Der Endpunkt dieses Vektors beschreibt im festen und beweglichen System je eine Kurve, welche wir *Polhodie- und Herpolhodiekurve der umgekehrten Bewegung* nennen können. *Diese liegen zu der Herpolhodie- und Polhodiekurve der direkten Bewegung bez. diametral in Bezug auf den Unterstützungspunkt.*

Zum Schlufs möge eine Bemerkung Platz finden, welche sich auf die experimentelle Verifikation der vorgetragenen Theorie bezieht. Man wird den Wunsch haben, die Existenz und Lage der instantanen Drehungsaxe an dem in Bewegung begriffenen Kreisel direkt mit dem Auge wahrzunehmen. Dies hat, zumal bei schneller Rotation, seine Schwierigkeit. Es gelingt aber mit Hülfe einer sinnreichen, von Maxwell angegebenen Methode*). Maxwell befestigt zu dem Zwecke an der Figurenaxe des Kreisels eine Pappscheibe, welche in vier verschieden gefärbte Sektoren geteilt ist. Bei der Bewegung sieht man

*) Maxwell, Transact. R. Scott. Soc. of Arts 1857 oder Scientific papers I, pag. 246.

in der Nähe der Drehaxe die daselbst aufgetragene Farbe; in einiger Entfernung aber laufen die Farben durch einander. *Daher erscheint die instantane Drehaxe als Mittelpunkt eines farbigen Flecks, welcher von einem unbestimmten Grau umgeben ist. Die successiven Örter des farbigen Flecks veranschaulichen für einen aufserhalb des Kreisels stehenden Beobachter direkt die Gestalt des Herpolhodiekegels. Der Wechsel der Farben aber giebt einen ungefähren Anhalt dafür, wie sich die instantane Drehaxe im Kreisel bewegt.*

§ 2. **Analytische Darstellung der Drehungen um einen festen Punkt.**

Wir haben nun die geometrischen Betrachtungen des vorigen Paragraphen durch analytische Entwickelungen zu ergänzen. Wir benutzen dabei rechtwinklige Koordinaten und zwar gleichzeitig *ein im Raume festes System xyz und ein im Raume bewegliches aber im Kreisel festes System XYZ.*

Beide Koordinatensysteme sollen ihren Anfangspunkt in dem bei der Kreiselbewegung festbleibenden Punkte O haben. Die Mafseinheit soll für beide Systeme und für alle Axen dieselbe sein. Die z-Axe werden wir meist in vertikaler Richtung gezogen denken und positiv nach oben rechnen. Von der positiven z-Axe aus gesehen möge die positive x-Axe in die positive y-Axe durch eine dem Sinn des Uhrzeigers gleichgerichtete Drehung übergeführt werden. Dieselbe Bestimmung soll bezüglich der gegenseitigen Lage der positiven Axen X, Y, Z gelten. Unsere Koordinatensysteme sind nach dieser Verabredung als *gleichstimmig* zu bezeichnen. Bei dem symmetrischen Kreisel werden wir durchgehends die positive Z-Axe mit der Figurenaxe zusammenfallen lassen.

Um die Lage des Kreisels im Raume zu bestimmen, genügt es, die Lage des XYZ- gegen das xyz-System anzugeben. Letzteres kann dadurch geschehen, dafs wir die *Transformationsformeln* für den Übergang von dem einen zu dem anderen Koordinatensystem bilden, d. h. solche Formeln, welche gestatten, die Koordinaten eines beliebigen Punktes in Bezug auf das eine System zu berechnen, wenn seine Koordinaten in dem anderen Systeme gegeben sind.

Wir wollen uns vorstellen, dafs in einer „Anfangslage" das bewegliche System mit dem festen zusammenfällt; jede andere Lage denken wir uns durch eine Drehung aus der Anfangslage erzeugt. Wir können dann die eben genannten Transformationsformeln — wie überhaupt die Transformationsgleichungen der analytischen Geometrie — in doppelter Weise auffassen.

1. *Wir betrachten einen im Raume festen Punkt und fragen nach*

seinen Koordinaten in Bezug auf das bewegliche System. Der Punkt möge durch seine Koordinaten xyz in Bezug auf das feste Koordinatensystem gegeben sein. Dies sind gleichzeitig die Koordinaten des Punktes in Bezug auf die Anfangslage des beweglichen Systems. *Unsere Formeln bestimmen uns bei dieser Auffassung die Koordinaten XYZ desselben Raumpunktes in Bezug auf die Endlage des beweglichen Systems.*

2. *Wir betrachten einen im Kreisel festen, im Raume beweglichen Punkt und fragen nach seinen Koordinaten in Bezug auf das im Raume feste System.* Die Lage des Punktes im Kreisel sei durch die Koordinaten XYZ in Bezug auf das im Kreisel feste System gegeben. Es sind dieses gleichzeitig die Koordinaten, welche der Anfangslage des Punktes in Bezug auf das im Raume feste Koordinatensystem entsprechen. *Unsere Formeln liefern uns bei dieser Auffassung die Koordinaten xyz desselben Kreiselpunktes in seiner Endlage, bezogen auf das im Raume feste Koordinatensystem.*

Wir werden im folgenden beide Auffassungen, die sich wohlverstanden auf ein und dasselbe Formelsystem beziehen, wechselweise zu benutzen haben. In beiden Fällen, können wir sagen, führt das Studium der Transformationsformeln zur *analytischen Darstellung der Drehungen um einen festen Punkt,* wobei es sich in der ersten Auffassung um die Drehungen eines Koordinatensystems gegen den festen Raum, in der zweiten Auffassung um die Drehungen des Raumes gegen ein festes Koordinatensystem handelt.

Was nun die Formeln für den Übergang vom Koordinatensystem x, y, z zum Koordinatensystem X, Y, Z angeht, so stellen dieselben bekanntlich eine sogenannte *orthogonale* Substitution vor. Man hat einerseits

$$\begin{aligned} x &= aX + a'Y + a''Z, \\ y &= bX + b'Y + b''Z, \\ z &= cX + c'Y + c''Z \end{aligned} \tag{1}$$

andererseits

$$\begin{aligned} X &= a\,x + b\,y + c\,z, \\ Y &= a'x + b'y + c'z, \\ Z &= a''x + b''y + c''z, \end{aligned} \tag{2}$$

wo die auftretenden Koeffizienten die Cosinus derjenigen Winkel bedeuten, welche die positiven Halbaxen des einen Systems mit denen des anderen bilden. Speziell ist:

$$\begin{aligned} a &= \cos(xX), & a' &= \cos(xY), & a'' &= \cos(xZ), \\ b &= \cos(yX), & b' &= \cos(yY), & b'' &= \cos(yZ), \\ c &= \cos(zX), & c' &= \cos(zY), & c'' &= \cos(zZ). \end{aligned}$$



Die Gleichungen (2) gehen aus den Gleichungen (1) durch „Transposition der Koeffizienten“ hervor. Wir fassen beide Gleichungen in das Schema zusammen:

(3)

	X	Y	Z
x	a	a'	a''
y	b	b'	b''
z	c	c'	c''

welches von links nach rechts gelesen die Gleichungen (1), von oben nach unten gelesen die Gleichungen (2) wiedergiebt.

Die neun Gröſsen $a, \ldots c''$ sind nicht von einander unabhängig; es bestehen zwischen ihnen eine ganze Reihe von Relationen. In der That, wenn wir früher sagten, unser Kreisel besitze drei Grade der Freiheit, so bedeutet dies nichts anderes, als daſs seine sämtlichen Lagen durch drei von einander unabhängige Parameter dargestellt werden können. Wir haben also in den obigen Transformationsgleichungen zur Darstellung der Drehungen *überzählige Parameter* benutzt. Man findet die betr. Relationen in den Büchern; wir halten uns nicht bei denselben auf. Dagegen werden wir uns die Aufgabe stellen, eine *independente Darstellung der Drehungen durch drei unabhängige Parameter* anzugeben.

Zu diesem Zwecke benutzt man von alters her in erster Linie die sog. *Eulerschen unsymmetrischen Winkel* φ, ψ, ϑ.

Um die Bedeutung dieser Winkel unzweideutig definieren zu können, erklären wir zuerst, was wir (beim symmetrischen Kreisel) unter der „*Knotenlinie*“ verstehen wollen. Als Knotenlinie bezeichnen wir denjenigen *Halbstrahl*, welcher gleichzeitig auf der Vertikalen und der Figurenaxe senkrecht steht und von dem aus gesehen die erstere in die letztere durch eine im Sinne des Uhrzeigers erfolgende Drehung auf kürzestem Wege übergeführt wird. Diese Erklärung der Knotenlinie wird nur dann unbestimmt, wenn die Figurenaxe eine vertikale Lage annimmt, d. h. wenn die Axen der z und Z den Winkel 0 oder π einschlieſsen. (Bei allgemeiner Lage der Koordinatensysteme bez. bei allgemeiner Massenverteilung haben wir in der vorstehenden Definition statt Vertikale und Figurenaxe nur z- und Z-Axe zu sagen).

Darauf betrachten wir auſser unserem xyz- und XYZ-System noch ein drittes Hülfskoordinatenkreuz, welches wir in drei Schritten aus der Lage xyz in die Lage XYZ überdrehen wollen. Und zwar drehen wir

I. unser Hülfskoordinatenkreuz aus seiner Anfangslage xyz um die positive z-Axe im Sinne des Uhrzeigers, bis seine positive x-Axe

Hosted by Google

mit der Knotenlinie zusammenfällt. Die neue Lage des Hülfssystems werde mit $x_1 y_1 z_1$ bezeichnet; *der Winkel, um den wir drehen mufsten, definiere uns den Parameter* ψ.

II. Wir drehen sodann das Hülfssystem aus seiner Lage $x_1 y_1 z_1$ um die positive x_1-Axe (d. h. um die Knotenlinie), gleichfalls im Sinne des Uhrzeigers, bis seine positive z-Axe mit der positiven Z-Axe zusammenfällt. Dadurch gehe unser Hülfssystem in die Lage $x_2 y_2 z_2$ über. *Der Winkel, um welchen wir bei dieser Operation drehen mufsten, heifse* ϑ.

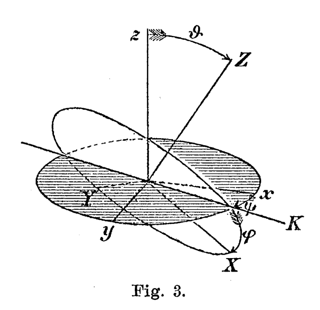


Fig. 3.

III. Wir drehen schliefslich das Hülfssystem um die positive z_2-Axe (oder, was dasselbe besagt, um die positive Z-Axe) abermals im Sinne des Uhrzeigers, bis die positiven Axen x_2 und y_2 mit den positiven Axen X und Y zusammenfallen. *Der zugehörige Drehungswinkel giebt uns den dritten Parameter* φ. Das Hülfssystem ist jetzt in seine Endlage XYZ übergeführt worden.

Kürzer aber weniger genau werden wir sagen können (vgl. die Figur): Es bedeutet

φ	den	Winkel	der	Knotenlinie	gegen	die	pos.	X-Axe,
ψ	„	„	„	„	„	„	„	x-Axe,
ϑ	„	„	„	pos. Z-	„	„	„	z-Axe.

Aus diesen Winkeln φ, ψ, ϑ werden wir die Koeffizienten unserer Drehungstransformation zusammensetzen. Zu diesem Zwecke stellen wir zunächst die Ausdrücke für die Operationen I, II und III einzeln her.

Die Operation I läfst die z-Axe ungeändert und verdreht die xy-Ebene in sich. Wir haben also zunächst die Gleichung $z_1 = z$. Andrerseits hängen die $x_1 y_1$ mit den xy durch die Transformationsgleichungen einer Drehung in der Ebene zusammen. Dabei müssen wir, um in Übereinstimmung mit den für den Raum getroffenen Festsetzungen zu bleiben, die positive y-Axe in solcher Weise bestimmen, dafs sie aus der positiven x-Axe durch eine im Sinne des Uhrzeigers erfolgende Drehung um O hervorgeht, also gerade umgekehrt, wie es in der analytischen Geometrie der Ebene meistens geschieht. Auf Grund der nebenstehenden Figur lautet nun das Schema für unsere ebene Drehung folgendermafsen:

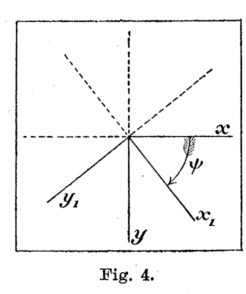


Fig. 4.

(4)

	x_1	y_1
x	$\cos\psi$	$-\sin\psi$
y	$\sin\psi$	$\cos\psi$

Die Transformationsgleichungen für die Operation I werden daher:

$$\begin{aligned} x &= \cos\psi\cdot x_1 - \sin\psi\cdot y_1,\\ y &= \sin\psi\cdot x_1 + \cos\psi\cdot y_1,\\ z &= \qquad\qquad\qquad\qquad z_1. \end{aligned}$$

Wir schreiben dieselben nach Analogie von (3) wieder in die Gestalt eines dreiseitigen Schemas und fügen die entsprechend gebildeten Schemata für die Operationen II und III hinzu. So ergiebt sich:

I.

	x_1	y_1	z_1
x	$\cos\psi$	$-\sin\psi$	0
y	$\sin\psi$	$\cos\psi$	0
z	0	0	1

II.

	x_2	y_2	z_2
x_1	1	0	0
y_1	0	$\cos\vartheta$	$-\sin\vartheta$
z_1	0	$\sin\vartheta$	$\cos\vartheta$

III.

	X	Y	Z
x_2	$\cos\varphi$	$-\sin\varphi$	0
y_2	$\sin\varphi$	$\cos\varphi$	0
z_2	0	0	1

Kombinieren wir diese Einzelsubstitutionen, so erhalten wir die gesuchten Transformationsgleichungen zwischen den Koordinaten xyz und XYZ, ausgedrückt durch die Eulerschen Winkel in der Form:

(5)

	X	Y	Z
x	$\cos\varphi\cos\psi - \cos\vartheta\sin\varphi\sin\psi$	$-\sin\varphi\cos\psi - \cos\vartheta\cos\varphi\sin\psi$	$\sin\vartheta\sin\psi$
y	$\cos\varphi\sin\psi + \cos\vartheta\sin\varphi\cos\psi$	$-\sin\varphi\sin\psi + \cos\vartheta\cos\varphi\cos\psi$	$-\sin\vartheta\cos\psi$
z	$\sin\vartheta\sin\varphi$	$\sin\vartheta\cos\varphi$	$\cos\vartheta$

Hosted by Google

Insbesondere merken wir an, daſs die Richtungscosinus der Vertikalen im beweglichen und die der Figurenaxe im festen System bez. die folgenden Werte haben:

$$(6)\qquad \begin{cases} c\;=\sin\vartheta\sin\varphi, & c' = \quad\sin\vartheta\cos\varphi, & c'' = \cos\vartheta, \\ a''=\sin\vartheta\sin\psi, & b'' = -\sin\vartheta\cos\psi, & c'' = \cos\vartheta. \end{cases}$$

Wir werden fernerhin darauf bedacht sein, diese allgemein gebrauchten, aber in der That äuſserst unübersichtlichen Formeln durch geeignete Zusammenfassung zu vereinfachen.

Dies gelingt zunächst dadurch, dass wir statt der *reellen* Koordinaten gewisse *komplexe Verbindungen* derselben einführen. Wir setzen:

$$\begin{aligned} \xi &= \quad x + iy, & \Xi &= \quad X + iY, \\ \eta &= -x + iy, & \mathrm{H} &= -X + iY, \\ \zeta &= -z, & \mathrm{Z} &= -Z. \end{aligned}$$

Dann entsteht aus dem Schema (5) ohne weiteres folgende Formelgruppe:

(7)

⇛	Ξ	H	Z
ξ	$\frac{\cos\vartheta+1}{2}\cdot e^{i(\varphi+\psi)}$	$\frac{\cos\vartheta-1}{2}\cdot e^{i(-\varphi+\psi)}$	$i\sin\vartheta\, e^{i\psi}$
η	$\frac{\cos\vartheta-1}{2}\cdot e^{i(\varphi-\psi)}$	$\frac{\cos\vartheta+1}{2}\cdot e^{i(-\varphi-\psi)}$	$i\sin\vartheta\, e^{-i\psi}$
ζ	$\frac{i\sin\vartheta}{2}\cdot e^{i\varphi}$	$\frac{i\sin\vartheta}{2}\cdot e^{-i\varphi}$	$\cos\vartheta$

Das Hineinspielen der komplexen Gröſsen in die Kinematik braucht uns nicht Wunder zu nehmen. Der tiefere Grund hierfür wird im folgenden Paragraphen klar werden; an dieser Stelle möge nur darauf hingewiesen werden, daſs auch die Gleichungen für eine ebene Drehung, die in dem Schema (4) enthalten sind, wie bekannt, mit Vorteil in die komplexe Form

$$x \pm iy = e^{\pm i\psi}(x_1 \pm iy_1)$$

umgeschrieben werden können*).

Übrigens ist durch die Einführung der komplexen Gröſsen die Eigenschaft der vorhergehenden Schemata verloren gegangen, daſs sie ebensowohl von links nach rechts wie von oben nach unten gelesen werden können. Unser Schema (7) giebt nur die Koeffizienten in den

*) Es kann auch daran erinnert werden, daſs in zahlreichen Gebieten der mathematischen Physik, z. B. in der Optik, der Gebrauch komplexer Gröſsen (zur symmetrischen Zusammenfassung sonst unsymmetrischer Gleichungen) gang und gäbe ist.

Hosted by Google

Ausdrücken der $\xi\eta\zeta$ durch die $\Xi \mathrm{H} \mathrm{Z}$ und darf nur von links nach rechts gelesen werden, (wie solches durch den beigefügten Pfeil angedeutet wird).

Eine überraschend einfache Gestalt aber nehmen die Transformationsgleichungen an, wenn wir schliefslich von ϑ zu $\frac{\vartheta}{2}$ übergehen und die folgenden Abkürzungen einführen:

$$
(8) \qquad \begin{cases} \alpha = \cos\frac{\vartheta}{2}\cdot e^{\frac{i(\varphi+\psi)}{2}}, & \beta = i\sin\frac{\vartheta}{2}\cdot e^{\frac{i(-\varphi+\psi)}{2}}, \\ \gamma = i\sin\frac{\vartheta}{2}\cdot e^{\frac{i(\varphi-\psi)}{2}}, & \delta = \cos\frac{\vartheta}{2}\cdot e^{\frac{i(-\varphi-\psi)}{2}}, \end{cases}
$$

welche durch die Relation

$$
\alpha\delta - \beta\gamma = +1
$$

verknüpft sind. Sie lauten dann nämlich

(9)

$\rightarrow$	Ξ	H	Z
ξ	α^2	β^2	$2\alpha\beta$
η	γ^2	δ^2	$2\gamma\delta$
ζ	$\alpha\gamma$	$\beta\delta$	$\alpha\delta+\beta\gamma$

Wie diese Gleichungen zu verändern sind, wenn wir umgekehrt $\Xi \mathrm{H} \mathrm{Z}$ durch $\xi\eta\zeta$ ausdrücken wollen (wenn wir also den horizontalen durch einen vertikalen Pfeil ersetzen wollen) wird pag. 31 erörtert werden.

Die Parameter α, β, γ, δ, welche in der Folge eine grofse Rolle spielen werden, sind, wie man sieht, nicht unabhängig, vielmehr sind α und δ einerseits, β und $-\gamma$ andrerseits konjugiert imaginär. Wollen wir zu entsprechenden vier reellen Parametern übergehen, so mögen wir setzen

$$
\alpha = D + iC, \qquad \beta = -B + iA,
$$
$$
\gamma = B + iA, \qquad \delta = D - iC;
$$

die so definierten Parameter A, B, C, D, welche durch die Relation

$$
A^2 + B^2 + C^2 + D^2 = 1
$$

verknüpft sind, werden wir als *Quaternionengröfsen* bezeichnen. Dieselben geben in der That den Übergang zur Hamiltonschen Quaternionentheorie. In ihnen lauten die Transformationsgleichungen, wenn wir noch von den $\xi\eta\zeta$ zu den xyz übergehen:

(10)

	X	Y	Z
x	$D^2+A^2-B^2-C^2$	$2(AB-CD)$	$2(AC+BD)$
y	$2(AB+CD)$	$D^2-A^2+B^2-C^2$	$2(BC-AD)$
z	$2(AC-BD)$	$2(BC+AD)$	$D^2-A^2-B^2+C^2$

Dieses Schema zeichnet sich durch einen höheren Grad von Symmetrie vor dem Schema (9) aus, ist im übrigen aber weniger einfach als jenes.

Wir haben somit drei verschiedene Parametersysteme zum Studium der Drehungen kennen gelernt, von denen jedes seine besonderen Vorzüge aufweist.

Die Eulerschen Winkel besitzen eine unmittelbare geometrische Bedeutung; überdies sind sie in mechanischer Hinsicht bei unserem Probleme ausgezeichnet. (Es wird sich später zeigen, dafs φ und ψ in der Kreiseltheorie die Rolle von „cyklischen Koordinaten" spielen). Natürlich sind die zu einer Drehung gehörigen φ, ψ, ϑ nur bis auf beliebige Multipla von 2π bestimmt. *Unsere Parameter* $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sind in analytischer Hinsicht die einfachsten Bausteine, aus denen sich die Formeln der Kreiselbewegung zusammensetzen lassen, wie solches namentlich bei Einführung der elliptischen Funktionen deutlich werden wird. Neben ihnen werden die *Quaternionengröfsen* A, B, C, D mehr zurücktreten; ihr Vorzug beruht in der formalen Symmetrie der Rechnungen; wir kommen auf dieselben, wie überhaupt auf die Stellung, welche die Quaternionentheorie hier einnimmt, noch wiederholt zurück (vergl. insbes. § 7 dieses Kapitels). Man beachte noch ausdrücklich, dafs die α, β, γ, δ, welche zu einer Drehung gehören, und ebenso natürlich die A, B, C, D nur bis auf das Vorzeichen bestimmt sind. In der That genügt es, in (8) das φ oder ψ um 2π zu ändern, um die α, β, γ, δ im Vorzeichen umzukehren. Wir werden in dieser Hinsicht später noch besondere Festsetzungen treffen.

Die Entwickelungen dieses Paragraphen dehnen sich unmittelbar auf die Behandlung des frei beweglichen starren Körpers aus. Um die Lage desselben zu bestimmen, können wir nach § 1 so verfahren, dafs wir einerseits die Lage des Bezugspunktes O, andrerseits die Lage des Körpers relativ zu O angeben. Ersteres geschieht am einfachsten dadurch, dafs wir die rechtwinkligen Koordinaten x, y, z des Bezugspunktes hinschreiben, letzteres dadurch, dafs wir eines der drei vorgenannten Parametersysteme benutzen.

Hosted by Google

§ 3. Die Bedeutung der Parameter α, β, γ, δ.

Wir werden vermuten, daſs die Vereinfachung unserer Transformationsgleichungen, welche wir durch die Einführung der $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ erzielt haben, keine zufällige ist, daſs vielmehr diese Gröſsen mit unserem Probleme der Drehung in einem nothwendigen inneren Zusammenhange stehen. Die folgenden Bemerkungen sollen dazu dienen, diesen Zusammenhang verständlich zu machen, soweit es ohne weitergehende Vorkenntnisse vorauszusetzen möglich ist. Es ist dabei bequem, von den beiden pag. 16 gekennzeichneten Auffassungen sich der zweiten anzuschlieſsen, also einen im Raume beweglichen Punkt in Bezug auf ein im Raume festes Koordinatensystem zu betrachten.

Durch eine Drehung um O wird jeder Raumpunkt XYZ in einen Raumpunkt xyz übergeführt, welcher von O dieselbe Entfernung hat, wie jener. Insbesondere müssen Punkte, welche von O die Entfernung Null haben, in ebensolche Punkte übergehen. Man könnte hiergegen einwenden, daſs es auſser O selbst keine weiteren Punkte von dieser Eigenschaft giebt. Dies ist richtig, solange man im Reellen bleibt. Indessen ist man in der Geometrie seit lange gewohnt, auch Punkte mit imaginären Koordinaten ins Auge zu fassen, wodurch die Einfachheit und Übersichtlichkeit der Theorie ganz bedeutend erhöht wird. Thun wir dieses, so müssen wir sagen: Punkte, welche von O die Entfernung Null haben, sind in unendlicher Anzahl vorhanden; sie liegen auf einem (allerdings imaginären) Kegel zweiter Ordnung, dessen Gleichung lautet

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0,$$

dem sogenannten *Minimalkegel.*

Wir schreiben diese Gleichung passend in die Form

$$(x + iy)(-x + iy) = z^2$$

oder mit Benutzung der pag. 20 eingeführten Gröſsen

$$\xi\eta = \zeta^2.$$

Wir definieren sodann zwei Parameter λ_1 und λ_2 durch die Gleichungen

(1) $$\xi = \lambda_1^2, \quad \eta = \lambda_2^2, \quad \zeta = \lambda_1 \lambda_2. \quad *)$$

Offenbar gehört zu jedem Wertepaar λ_1, λ_2 ein ganz bestimmter Punkt unseres imaginären Kegels (denn die Gleichung $\xi\eta = \zeta^2$ ist vermöge (1) identisch erfüllt); umgekehrt entsprechen einem Punkte des Kegels zwei Wertepaare λ_1, λ_2, welche sich aber nur durch einen gemeinsamen Vorzeichenwechsel unterscheiden. *Die Gleichungen* (1), können wir sagen, *liefern uns eine Parameterdarstellung der Punkte unseres imaginären Kegels.*



Eine zweite Parameterdarstellung gewinnen wir für dieselben Punkte, wenn wir, von der Gleichung

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 0$$

ausgehend, zwei Parameter Λ_1, Λ_2 einführen durch die Gleichungen:

$$\Xi = \Lambda_1^2, \quad \mathrm{H} = \Lambda_2^2, \quad \mathrm{Z} = \Lambda_1 \Lambda_2, \tag{2}$$

wo

$$\Xi = X + iY, \quad \mathrm{H} = -X + iY, \quad \mathrm{Z} = -Z.$$

Da unsere Drehung die Punkte (2) in die Punkte (1) überführt, so werden dadurch gleichzeitig die Parameter Λ_1, Λ_2 mit den Parametern λ_1, λ_2 in gewisser Weise in Beziehung gesetzt. Den Zusammenhang beider Wertepaare lesen wir aus dem Schema (9) des vorigen Paragraphen ab. Wir haben:

$$\begin{aligned}
\lambda_1^2 &= \alpha^2\Lambda_1^2 + \beta^2\Lambda_2^2 + 2\alpha\beta\Lambda_1\Lambda_2 &&= (\alpha\Lambda_1 + \beta\Lambda_2)^2,\\
\lambda_2^2 &= \gamma^2\Lambda_1^2 + \delta^2\Lambda_2^2 + 2\gamma\delta\Lambda_1\Lambda_2 &&= (\gamma\Lambda_1 + \delta\Lambda_2)^2,\\
\lambda_1\lambda_2 &= \alpha\gamma\Lambda_1^2 + \beta\delta\Lambda_2^2 + (\alpha\delta + \beta\gamma)\Lambda_1\Lambda_2 &&= (\alpha\Lambda_1 + \beta\Lambda_2)(\gamma\Lambda_1 + \delta\Lambda_2).
\end{aligned}$$

Hieraus folgt aber

$$\begin{cases} \lambda_1 = \alpha\Lambda_1 + \beta\Lambda_2, \\ \lambda_2 = \gamma\Lambda_1 + \delta\Lambda_2, \end{cases} \tag{3}$$

wobei es noch gestattet ist, die Vorzeichen der α, β, γ, δ simultan umzukehren.

Wir sehen also, daſs mit jeder orthogonalen Substitution der rechtwinkligen Koordinaten xyz eine lineare homogene Substitution zweier auf unserem imaginären Kegel definierten Parameter parallel läuft, deren Koeffizienten gerade unsere Gröſsen $\alpha\beta\gamma\delta$ sind. Wenn früher $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ gesetzt wurde, so heiſst dies, *daſs die in Rede stehende Substitution die Determinante* 1 *haben soll.* Hierin liegt eine neue und einfache Definition der Parameter α, β, γ, δ. Daſs bei dieser Definition die Vorzeichen der α, β, γ, δ unbestimmt bleiben, ist in Übereinstimmung mit der Schluſsbemerkung des vorigen Paragraphen. Übrigens aber gilt es, die neue Definition der $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ noch in verschiedene andere Formen umzusetzen.

Wir wollen zunächst von den Punkten des Kegels zu den auf ihm verlaufenden Geraden, seinen „Erzeugenden", übergehen. Während wir die zweifache Mannigfaltigkeit der Punkte auf zwei Parameter λ_1, λ_2 bezogen, können wir die einfache Mannigfaltigkeit seiner Geraden durch einen Parameter unterscheiden. Und zwar bietet sich hierzu von selbst dar:

$$\lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\xi}{\zeta} = \frac{\zeta}{\eta}. \tag{4}$$

Hosted by Google

In der That bestimmen diese Gleichungen zu jedem Werte von λ eine auf dem Kegel verlaufende (imaginäre) Gerade und umgekehrt. Definieren wir entsprechend den Parameter Λ:

$$\Lambda = \frac{\Lambda_1}{\Lambda_2} = \frac{\Xi}{Z} = \frac{Z}{H},$$

so haben wir nach (3) zwischen λ und Λ die Beziehung

$$\lambda = \frac{\alpha\Lambda + \beta}{\gamma\Lambda + \delta}. \tag{5}$$

Bei den Drehungen um den festen Punkt erleidet also der Parameter, durch welchen wir die Erzeugenden unseres imaginären Kegels charakterisierten, eine linear gebrochene Substitution, deren Koeffizienten, sofern wir nur die Substitutionsdeterminante gleich 1 *setzen, wieder unsere Gröfsen* α, β, γ, δ *sind.*

Wir werden aber zeigen, dafs wir ähnlich auch allen von O auslaufenden reellen Strahlen oder richtiger Halbstrahlen einen Parameter zuordnen können, welcher sich in gleicher Weise bei den Drehungen substituiert.

Wir gehen zu dem Zwecke von der trivialen Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \quad \text{oder} \quad \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = r$$

aus, welche nichts anderes als die Definition von r ist. Hinsichtlich des Vorzeichens der vorkommenden Wurzel setzen wir fest, dafs dasselbe bei reellen Werten von x, y, z stets *positiv* gerechnet werden soll. Der obigen Gleichung geben wir ähnlich wie früher die Form

$$(x + iy)(-x + iy) = (z + r)(z - r),$$

oder

$$\xi\eta = (\zeta - r)(\zeta + r)$$

oder endlich

$$\frac{\xi}{\zeta + r} = \frac{\zeta - r}{\eta}.$$

Bezeichnen wir den gemeinsamen Wert der rechten und linken Seite in der letzten Gleichung mit λ, so können wir schreiben

$$\frac{\xi}{\zeta + r} = \lambda, \quad \frac{\eta}{\zeta - r} = \frac{1}{\lambda}. \tag{6}$$

Auf solche Weise haben wir allen Punkten des Raumes einen (im allgemeinen komplexen) Parameter λ zugeordnet, der für reelle Raumpunkte zufolge unserer Verabredung über das Vorzeichen von r eindeutig festliegt. Dabei findet derselbe Parameterwert λ in allen Punkten eines und nur eines reellen Halbstrahles durch O statt. In der That bleibt der Wert von λ ungeändert, wenn wir die Koordinaten x, y, z eines reellen Raumpunktes mit einem gemeinsamen *positiven* Faktor

Hosted by Google

multiplizieren. Dagegen ändert sich sein Wert, nicht nur wenn wir die Verhältnisse dieser Gröſsen verändern, sondern auch wenn wir einen gemeinsamen negativen Faktor hinzufügen, letzteres wegen unserer Verabredung über das Vorzeichen von r. Es geht alsdann λ in einen Wert λ' über, welcher durch die Gleichungen bestimmt wird:

$$(6') \qquad \frac{\xi}{\zeta - r} = \lambda', \quad \frac{\eta}{\zeta + r} = \frac{1}{\lambda'};$$

derselbe ist ersichtlich zum Werte $-\frac{1}{\bar{\lambda}}$ konjugiert.

Durch unsere Gleichungen (6) *und* (6′) *sind also jedem reellen Halbstrahle des Raumes ein, jedem reellen Vollstrahle zwei Parameterwerte zugeordnet.* Dabei bemerken wir, daſs unsere jetzige Parameterdarstellung, auf die imaginären Strahlen des Kegels $r^2 = 0$ ausgedehnt, in die frühere durch Gl. (4) definierte übergeht, und daſs hierbei die beiden Werte λ und λ' identisch werden.

In entsprechender Weise mögen zwei Parameter Λ und Λ' definiert werden, welche sich auf die Anfangslage des reellen Halb- bez. Vollstrahles beziehen. Indem wir berücksichtigen, dass die Entfernung r bei der Drehung ungeändert bleibt, daſs also $R = r$ ist, setzen wir

$$(7) \qquad \frac{\Xi}{Z + r} = \Lambda, \quad \frac{\Xi}{Z - r} = \Lambda' \text{ etc.}$$

Um nun die Abhängigkeit der Parameter λ, λ' und Λ, Λ' festzustellen, drücken wir die Koordinaten ξ, η, ζ und Ξ, H, Z durch diese Parameter aus. Die Gleichungen (6) und (6′) ergeben

$$\lambda \lambda' = \frac{\xi^2}{\zeta^2 - r^2} = \frac{\xi^2}{\xi\eta} = \frac{\xi}{\eta}$$

und

$$\lambda + \lambda' = \frac{2\xi\zeta}{\zeta^2 - r^2} = \frac{2\xi\zeta}{\xi\eta} = \frac{2\zeta}{\eta}.$$

Wir können hiernach setzen

$$\xi : \zeta : \eta = \lambda\lambda' : \frac{\lambda + \lambda'}{2} : 1,$$

oder mit Benutzung eines Proportionalitätsfaktors ϱ

$$(8) \qquad \xi = \varrho\lambda\lambda', \quad \zeta = \varrho\frac{\lambda + \lambda'}{2}, \quad \eta = \varrho.$$

Ebenso ergiebt sich aus den Gleichungen (7)

$$(9) \qquad \Xi = \sigma\Lambda\Lambda', \quad Z = \sigma\frac{\Lambda + \Lambda'}{2}, \quad H = \sigma,$$

wo σ einen zweiten Proportionalitätsfaktor bedeutet.

Hosted by Google

Daraufhin nehmen unsere Transformationsformeln (9) von pag. 21 die folgende Gestalt an, wenn wir zur Abkürzung $\frac{\varrho}{\sigma} = \tau$ setzen:

$$\begin{aligned}
\tau \,.\, \lambda\lambda' &= \alpha^2 \Lambda\Lambda' + \alpha\beta(\Lambda + \Lambda') + \beta^2 = (\alpha\Lambda + \beta)(\alpha\Lambda' + \beta), \\
\tau \quad &= \gamma^2 \Lambda\Lambda' + \gamma\delta(\Lambda + \Lambda') + \delta^2 = (\gamma\Lambda + \delta)(\gamma\Lambda' + \delta), \\
\tau \cdot \frac{\lambda + \lambda'}{2} &= \alpha\gamma\Lambda\Lambda' + (\alpha\delta + \beta\gamma)\frac{\Lambda + \Lambda'}{2} + \beta\delta \\
&= \frac{1}{2}(\alpha\Lambda + \beta)(\gamma\Lambda' + \delta) + \frac{1}{2}(\gamma\Lambda + \delta)(\alpha\Lambda' + \beta).
\end{aligned}$$

Durch geeignete Division folgt

$$\begin{aligned}
\lambda\lambda' &= \frac{\alpha\Lambda + \beta}{\gamma\Lambda + \delta} \cdot \frac{\alpha\Lambda' + \beta}{\gamma\Lambda' + \delta}, \\
\lambda + \lambda' &= \frac{\alpha\Lambda + \beta}{\gamma\Lambda + \delta} + \frac{\alpha\Lambda' + \beta}{\gamma\Lambda' + \delta}.
\end{aligned}$$

Denken wir uns die Parameterwerte Λ unserer Halbstrahlen vor der Drehung gegeben, so sind hiernach ihre Parameter λ nach der Drehung zunächst nur erst zweideutig bestimmt. Wir haben entweder:

$$\lambda = \frac{\alpha\Lambda + \beta}{\gamma\Lambda + \delta}, \quad \lambda' = \frac{\alpha\Lambda' + \beta}{\gamma\Lambda' + \delta}$$

oder

$$\lambda = \frac{\alpha\Lambda' + \beta}{\gamma\Lambda' + \delta}, \quad \lambda' = \frac{\alpha\Lambda + \beta}{\gamma\Lambda + \delta}.$$

Man bemerke, daſs beide Formeln mit (5) zusammenfallen, wenn man $\lambda = \lambda'$, $\Lambda = \Lambda'$ setzt, wie dies für die Punkte des Minimalkegels zutrifft.

Nun ist aber klar, daſs nur die eine der beiden so gefundenen Beziehungen eine Drehung bedeuten kann. Es geht nämlich die zweite Reihe aus der ersten durch Vertauschung von λ mit λ' hervor, also dadurch, daſs wir jeden Halbstrahl in den entgegengesetzten überführen. Diese Operation ist aber durch keine Bewegung des dreidimensionalen Raumes zu verwirklichen. Andrerseits beachte man, daſs jede der beiden Formeln ein *Kontinuum* von Transformationen vorstellt. Wir können dann sofort sagen: die durch die eine Reihe dargestellte Operation führt das Bündel der Halbstrahlen in ein gleichstimmiges, die durch die andere Reihe dargestellte in ein ungleichstimmiges über.

Welche von beiden Reihen einer Drehung entspricht, erkennen wir am leichtesten, indem wir zu einem Spezialfall übergehen. Der einfachste Fall einer Drehung ist die „Drehung Null", durch welche jeder Punkt des Raumes in sich übergeführt wird. Der Drehung Null entsprechen die Parameterwerte $\vartheta = \varphi = \psi = 0$, also $\alpha = \delta = \pm 1$ und $\beta = \gamma = 0$. Die erste Reihe liefert in diesem Falle $\lambda = \Lambda$, wie

es sein mufs; die zweite Reihe aber giebt $\lambda = \Lambda'$, was unmöglich ist. Also stellt nur die erste Reihe eine Drehung dar; wir haben notwendig

$$\lambda = \frac{\alpha \Lambda + \beta}{\gamma \Lambda + \delta}, \tag{10}$$

und sprechen den Satz aus:

Wenn wir durch die Gleichungen (6) *jedem reellen Halbstrahle durch O einen Parameter λ zuordnen, so erleidet dieser bei einer Drehung um O eine linear gebrochene Substitution, gerade so wie der Parameter λ, durch welchen wir vorher die Erzeugenden unseres imaginären Kegels unterschieden.* Also auch hieraus können wir die Definition der $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ entnehmen. —

Hätten wir uns bei diesen Entwickelungen auf Vorkenntnisse aus der projektiven Geometrie berufen wollen, so hätten wir unsere Betrachtungen wesentlich vereinfachen können. Wir würden dann zunächst wie oben die Erzeugenden des Minimalkegels durch einen Parameter λ individualisiert haben. Da bei einer Drehung der Minimalkegel in sich übergeführt wird, so erleidet dieser Parameter eine projektive Transformation. Dies liefert den Satz von Formel (5), von wo man direkt zu Formel (3) aufsteigt. Sodann würden wir jedem Vollstrahle durch O die Parameter λ derjenigen beiden Erzeugenden zugewiesen haben, in welchen die durch den Strahl hindurchgehenden Tangentialebenen an den Minimalkegel den letzteren berühren. Dadurch würden wir genau zu der Definition der Werte λ und λ' kommen, die in den Gleichungen (6) enthalten ist. Dafs wir λ dem einen, λ' dem anderen Halbstrahle zuweisen, ist eine beiläufige Festsetzung, die wir aus Zweckmäfsigkeitsgründen treffen. Der letzte Satz, welcher ausspricht, dafs diese Werte bei einer Drehung sich projektiv substituieren, ist nun selbstverständlich d. h. eine unmittelbare Folge von (5); denn λ und λ' sind ja jetzt Parameter auf dem Minimalkegel. —

Schliefslich bringen wir noch unsere Parameterdarstellung in einen interessanten Zusammenhang mit einer Vorstellungsweise, welche in der Funktionentheorie seit Riemann üblich ist. Wir wollen nämlich das System unserer Halbstrahlen durch eine Kugelfläche auffangen, welche um O mit dem Radius 1 beschrieben ist. Jedem Punkte der Kugel wird dabei ein bestimmter Halbstrahl und also ein bestimmter Werth des Parameters λ zugeordnet. *Die komplexe Gröfse λ findet sich also eindeutig auf der Kugeloberfläche ausgebreitet*, wobei dem Punkte xyz mit $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ nach (6) die Gröfse

$$\lambda = \frac{x + iy}{1 - z} \tag{11}$$

entspricht.

Hosted by Google

Die Schnittpunkte der Kugel mit der positiven bez. negativen z-Axe werden wir als Nord- und Südpol bezeichnen. Wir haben dann im Nordpol ($z = +1$) den Wert $\lambda = \infty$, im Südpol ($z = -1$) den Wert $\lambda = 0$; die reellen Werte von λ liegen auf dem Meridiane $y = 0$, der Äquator $z = 0$ enthält diejenigen Punkte, für welche $|\lambda| = 1$ ist.

Man nennt diese Parameterteilung in der Funktionentheorie die *Interpretation der komplexen Variabeln λ auf der Riemannschen Kugelfläche.*

Gewöhnlich gelangt man zu ihr, indem man λ zunächst in der Ebene und zwar speziell in der Äquatorebene unserer Einheitskugel nach Gaufs deutet und diese Ebene durch stereographische Projektion vom Nordpol aus auf die Kugel bezieht. Für uns würde höchstens der umgekehrte Weg angezeigt sein. Nachdem wir durch die vorstehenden Betrachtungen, welche sich aus der Natur unseres Problemes ungezwungen ergaben, direkt zu der Definition der komplexen Variabeln auf der *Riemannschen Kugeloberfläche* gelangt sind, kann es nachträglich für gewisse Zwecke wünschenswert sein, zu der *Gaufsschen Ebene* überzugehen. Wenn wir z. B. eine Kurve auf der Kugeloberfläche mit Hülfe der Variabeln λ diskutiert haben und diese nun graphisch darzustellen wünschen, so müssen wir die Kugel auf irgend eine Zeichenebene beziehen. Zu dem Zwecke bietet sich als bestes Verfahren die stereographische Projektion und damit der Übergang zur Gaufsschen Ebene dar. Analytisch heifst dies einfach, dafs wir $\lambda = u + iv$ setzen und u und v als rechtwinklige Koordinaten in der Ebene deuten.

Ebenso wie wir den Parameter λ von dem System der Halbstrahlen auf die Riemannsche Kugelfläche übertrugen, so überträgt sich natürlich die Bedeutung der α, β, γ, δ von jener auf diese.

Wir betrachten zwei vereinigt gelegene Einheitskugeln um O, von denen wir die eine im Raume als fest, die andere als beweglich denken. Wir breiten in der beschriebenen Weise auf der festen Kugel den Parameter λ, auf der beweglichen den Parameter Λ aus, wobei in der Anfangslage je zwei zusammenfallende Punkte der Kugeln zusammenfallende Werte von λ und Λ tragen mögen. *Üben wir jetzt auf die bewegliche Kugel eine beliebige Drehung aus, so stehen die Parameter λ und Λ, welche zu je zwei nach der Drehung zusammenliegenden Punkten gehören, in der Beziehung*

$$\lambda = \frac{\alpha\Lambda + \beta}{\gamma\Lambda + \delta}, \tag{12}$$

wo die α, β, γ, δ gerade die früher definierten Gröfsen sind. Umgekehrt werden wir diese Formel (12) als Definition der α, β, γ, δ gelten lassen, wobei wir nur hinzunehmen müssen, dafs die Determinante $(\alpha\delta - \beta\gamma)$ allemal $= 1$ sein soll. Die so abgeleitete Definition hat vor den



früheren (3), (5) und (10) den Vorzug gröfster Anschaulichkeit voraus, daher wir sie in der Folge überall zu Grunde legen werden.

Der Gedanke, die Drehungen im Raum als lineare Substitutionen der komplexen Veränderlichen λ darzustellen, kommt gelegentlich bei Riemann vor*), zur vollen Geltung gelangt ist derselbe in der modernen Theorie der regulären Körper**).

§ 4. Nutzen der $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ bei dem Studium endlicher Drehungen.

Wenn wir im folgenden die Eigenschaften der Drehungstransformation studieren, werden wir die Rechnungen meist in unseren Parametern $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ausführen, wo sie am einfachsten werden. Dabei wollen wir uns durchgehends des Kunstgriffes bedienen, statt mit den Transformationsgleichungen der x, y, z lieber mit der einfacheren Substitution der Gröfsen λ_1, λ_2 zu operieren, welche, wie wir im vorigen Paragraphen sahen (vgl. Gl. 3), notwendig mit jenen verknüpft sind.

In diesem Sinne berechnen wir zunächst die zu einer gegebenen *inverse Drehung*. Führt die gegebene Drehung einen (im Kreisel festen) Punkt aus der Anfangslage XYZ in die Endlage xyz über, so bedeutet die inverse Drehung diejenige, welche den Punkt aus der Lage xyz nach XYZ zurückführt. Die vorgegebene Drehung besitze die Parameter $\alpha, \beta, \gamma, \delta$; es fragt sich, welche Parameter der inversen Drehung zukommen.

Wir betrachten

$$\lambda_1 = \alpha\Lambda_1 + \beta\Lambda_2,$$
$$\lambda_2 = \gamma\Lambda_1 + \delta\Lambda_2;$$

hieraus ergiebt sich die inverse Substitution durch Auflösung. Es wird mit Rücksicht auf $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$

$$(1) \qquad \begin{cases} \Lambda_1 = \delta\lambda_1 - \beta\lambda_2, \\ \Lambda_2 = -\gamma\lambda_1 + \alpha\lambda_2. \end{cases}$$

Wir erhalten also aus der vorgelegten die inverse Substitution, indem wir α und δ vertauschen und β und γ im Vorzeichen umkehren.

Übertragen wir dieses Resultat auf unsere anderen Parametersysteme A, B, C, D und φ, ψ, ϑ. Zunächst erkennt man unmittelbar aus der Definition der Quaternionengröfsen von pag. 21:

Ist uns eine Drehung durch die Werte der A, B, C, D gegeben, so erhalten wir die inverse Drehung, indem wir A, B und C im Vorzeichen umkehren, D aber ungeändert lassen.

*) Vgl. die Abh.: Über die Flächen von kleinstem Inhalte bei gegebener Begrenzung, art. 8. Ges. W., 2. Aufl. pag. 309.

**) Klein: Vorlesungen über das Ikosaeder, Cap. II, § 1.

Hosted by Google

Ferner folgt aus dem Zusammenhang der $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ mit den φ, ψ, ϑ (vgl. pag. 21) oder auch direkt aus der geometrischen Bedeutung der letzteren (vgl. pag. 17 f.):

Ist die direkte Drehung durch die Winkel φ, ψ, ϑ gegeben, so bestimmt sich die inverse Drehung durch die Winkel $-\psi, -\varphi, -\vartheta$.

Wir machen hiervon eine Anwendung, um die in dem Schema (9) von pag. 21 enthaltenen Gleichungen nach den Ξ, H, Z aufzulösen. Zu dem Zwecke brauchen wir dort nur statt der $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ bez. $\delta, -\beta, -\gamma, \alpha$ einzutragen. Die Auflösung des Schemas (9) lautet also:

$\rightarrow$	ξ	η	ζ
Ξ	δ^2	β^2	$-2\beta\delta$
H	γ^2	α^2	$-2\alpha\gamma$
Z	$-\gamma\delta$	$-\alpha\beta$	$\alpha\delta+\beta\gamma$

(wo der beigefügte Pfeil bedeutet, dafs dieses Schema nur von links nach rechts gelesen werden soll). Tragen wir andrerseits $-A, -B, -C, +D$ bez. $-\psi, -\varphi, -\vartheta$ statt A, B, C, D bez. φ, ψ, ϑ in die Schemata (10) bez. (5) des vorletzten Paragraphen ein, so erhalten wir ein bereits bekanntes Resultat: es findet nur eine Transposition der Koeffizienten statt, wie solches bei der Umkehr einer orthogonalen Substitution nach pag. 17 selbstverständlich ist.

In entsprechender Weise behandeln wir die *Zusammensetzung zweier Drehungen.* Wir betrachten eine Drehung mit den Parametern $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ und eine zweite Drehung mit den Parametern $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$. Es handelt sich darum die Parameter $\alpha'', \beta'', \gamma'', \delta''$ zu berechnen, welche in ihrer Wirkung der ersten und zweiten Drehung zusammengenommen gleichkommt. Dabei wird es bequem sein, die erste der beiden Auffassungen von pag. 16 zu Grunde zu legen, also die Koordinaten eines Raumpunktes in Bezug auf ein successive gedrehtes Koordinatensystem zu betrachten. Und zwar haben wir drei Lagen des beweglichen Koordinatensystems zu unterscheiden: 1) eine Anfangslage, in welcher es mit dem festen System zusammenfällt, 2) eine Lage, in welche es durch die erste Drehung übergeführt wird, und 3) eine Endlage, in welche es von der Lage 2) aus bei der zweiten Drehung übergeht. Der Raumpunkt sei durch seine Koordinaten xyz im festen Koordinatensystem gegeben. Dann bedeuten xyz gleichzeitig die Koordinaten des Raumpunktes vor der ersten Drehung in Bezug auf die Lage 1) des beweglichen Koordinatensystems. Ferner mögen $x'y'z'$ bez. XYZ die

Hosted by Google

Koordinaten desselben Raumpunktes in Bezug auf die Lagen 2) und 3) des beweglichen Koordinatensystems sein.

Wir schreiben in einer leicht verständlichen Symbolik:

$$(x\,y\,z) = (\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta)\,(x'y'z'),$$
$$(x'y'z') = (\alpha'\beta'\gamma'\delta')\,(XYZ).$$

Gesucht werden die Parameter α'', β'', γ'', δ'' in der symbolischen Gleichung:

$$(xyz) = (\alpha''\beta''\gamma''\delta'')\,(XYZ).$$

Gehen wir zu den komplexen Gröfsen λ, λ', Λ über, welche bez. den Koordinaten xyz, $x'y'z'$, XYZ entsprechen mögen, so bedeuten unsere Gleichungen folgendes:

$$(2)\qquad \begin{cases} \lambda_1 = \alpha\lambda_1' + \beta\lambda_2', \\ \lambda_2 = \gamma\lambda_1' + \delta\lambda_2', \end{cases}$$

$$(2')\qquad \begin{cases} \lambda_1' = \alpha'\Lambda_1 + \beta'\Lambda_2, \\ \lambda_2' = \gamma'\Lambda_1 + \delta'\Lambda_2, \end{cases}$$

und

$$(3)\qquad \begin{cases} \lambda_1 = \alpha''\Lambda_1 + \beta''\Lambda_2, \\ \lambda_2 = \gamma''\Lambda_1 + \delta''\Lambda_2. \end{cases}$$

Aus den Gleichungen (2) und (2') folgt aber durch Elimination

$$\lambda_1 = (\alpha\alpha' + \beta\gamma')\Lambda_1 + (\alpha\beta' + \beta\delta')\Lambda_2,$$
$$\lambda_2 = (\gamma\alpha' + \delta\gamma')\Lambda_1 + (\gamma\beta' + \delta\delta')\Lambda_2.$$

Die Zusammenstellung dieser Gleichungen mit den Gleichungen (3) liefert die gesuchten Werte der Parameter α'', β'', γ'', δ'', nämlich:

$$(4)\qquad \begin{cases} \alpha'' = \alpha\alpha' + \beta\gamma', & \beta'' = \alpha\beta' + \beta\delta', \\ \gamma'' = \gamma\alpha' + \delta\gamma', & \delta'' = \gamma\beta' + \delta\delta'. \end{cases}$$

Wir konstatieren, dafs diese Gröfsen *bilineare zweigliedrige* Verbindungen der $\alpha\beta\gamma\delta$ und $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$ sind und dafs die letzteren Gröfsen in unsern Formeln *unsymmetrisch* vorkommen. Daraufhin sprechen wir den Satz aus:

Wenn wir zwei Drehungen nach einander ausführen und diejenige Drehung bestimmen, welche jenen beiden zusammen äquivalent ist, so werden die Parameter α, β, γ, δ der neuen Drehung bilineare zweigliedrige Verbindungen von den Parametern der gegebenen Drehungen. Dabei müssen wir auf die Reihenfolge der zusammenzusetzenden Drehungen Acht geben: wenn wir die Reihenfolge umkehren, ändert sich das Resultat ihrer Zusammensetzung.

Wir werden wünschen, die vorstehende Zusammensetzungsregel auch auf die anderen Parametersysteme zu übertragen. Hinsichtlich

Hosted by Google

der Quaternionengröſsen A, B, C, D geschieht dieses einfach dadurch, daſs wir die Gleichungen (4) in ihren reellen und imaginären Teil spalten. Es ergiebt sich so, wenn A, A', A'' etc. den Gröſsen α, α', α'' etc. bez. entsprechen:

$$(5)\qquad \begin{cases} A'' = \quad AD' + BC' - CB' + DA', \\ B'' = -AC' + BD' + CA' + DB', \\ C'' = \quad AB' - BA' + CD' + DC', \\ D'' = \quad DD' - AA' - BB' - CC'. \end{cases}$$

Die Parameter der resultierenden Drehung sind wieder bilinear in den Parametern der Teildrehungen. Aber die Ausdrücke sind jetzt viergliedrig geworden.

Die entsprechenden Formeln für die φ, ψ, ϑ wollen wir nicht explicite hinschreiben, weil sie ziemlich kompliziert sind. Sie ergeben sich aus den Gleichungen (4), indem wir α, β, γ, δ durch ihre Werte in den φ, ψ, ϑ von pag. 21 ersetzen.

Wir gehen nun dazu über, die *eigentlichen geometrischen Elemente einer Drehung, nämlich die Lage der Drehungsaxe und die Gröſse des Drehungswinkels* zu berechnen, vorausgesetzt, daſs die Drehungsparameter α, β, γ, δ bekannt sind. Dies geht nicht ohne etwas Rechnung ab. Um einen diesbezüglichen ersten Ansatz zu gewinnen, denken wir uns zunächst Drehungswinkel und Drehungsaxe als bekannt. Die Drehungsaxe machen wir zur ersten Koordinatenaxe eines im Raume festen rechtwinkligen Systems mit dem Ursprunge O, in welchem U, V, W die Koordinaten eines Punktes vor der Drehung, u, v, w die Koordinaten desselben Punktes nach der Drehung sein mögen. In diesem System werden die Formeln der Drehungstransformation besonders einfach. Sie sind in dem Schema II von pag. 19 enthalten; bezeichnen wir den Drehungswinkel mit ω und benutzen wir ähnlich wie pag. 20 geschehen, statt der Koordinaten V, W etc. die komplexen Verbindungen $V + iW$, $V - iW$ etc., so lauten sie:

$$(6)\qquad \begin{cases} u = U, \\ v + iw = e^{i\omega}(V + iW), \\ v - iw = e^{-i\omega}(V - iW). \end{cases}$$

Wir schlieſsen hieraus Folgendes: Die Drehungsaxe selbst oder, wie wir lieber sagen, die „*Hauptaxe der Drehung*“ ist dadurch ausgezeichnet, daſs ihre Punkte bei der Drehung durchaus ungeändert bleiben. Auſser dieser „Hauptaxe“ giebt es aber, sobald wir einmal imaginäre Punkte und Geraden mitberücksichtigen, noch zwei bemerkenswerte „*Nebenaxen*“, nämlich die in der Ebene $U = 0$ gelegenen

Hosted by Google

Strahlen $V + iW = 0$ und $V - iW = 0$. Sie sind dadurch ausgezeichnet, daſs sich die zu ihren Punkten gehörigen komplexen Koordinaten nur um einen Faktor ändern. Dieser Faktor ist gleich $e^{-i\omega}$ längs der ersten Nebenaxe, gleich $e^{+i\omega}$ längs der zweiten und, wie wir hinzufügen mögen, gleich 1 längs der Hauptaxe. In der That, setzen wir $U = 0$ und $V + iW = 0$, so wird nach (6) auch $u = 0$ und $v + iw = 0$, während $v - iw = e^{-i\omega}(V - iW)$ ist. Alle drei Koordinaten U, $V + iW$ und $V - iW$, so können wir sagen, multiplizieren sich längs dieser ersten Nebenaxe mit dem gemeinsamen Faktor $e^{-i\omega}$. In entsprechender Weise multiplizieren sich die Koordinaten U, $V + iW$, $V - iW$ längs der zweiten Nebenaxe mit dem gemeinsamen Faktor $e^{+i\omega}$ und längs der Hauptaxe mit 1.

Dasselbe gilt natürlich auch von den Koordinaten U, V, W selbst und weiterhin von allen homogenen linearen Funktionen dieser Gröſsen, also z. B. von den Koordinaten X, Y, Z in einem beliebigen rechtwinkligen Koordinatensystem, welches mit dem U, V, W-System einen gemeinsamen Ursprung hat, und schlieſslich auch von unsern früher benutzten Gröſsen Ξ, H, Z. *Auch die Koordinaten* Ξ, H, Z, *welche zu einem Punkte auf einer unserer drei Drehungsaxen gehören, multiplizieren sich bei der Drehung mit einem gemeinsamen Faktor, nämlich bez. mit* 1, $e^{+i\omega}$ *und* $e^{-i\omega}$. Bezeichnen wir also mit m irgend einen dieser drei Faktoren, so haben wir in den Punkten unserer drei Axen:

$$\xi = m\Xi, \quad \eta = m\mathsf{H}, \quad \zeta = m\mathsf{Z}. \tag{7}$$

Um die Verbindung mit den $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ herzustellen, ziehen wir das Schema (9) von pag. 21 heran. Für einen Punkt unserer Drehungsaxen besagt dasselbe mit Rücksicht auf (7) das Bestehen der folgenden Gleichungen:

$$\left\{\begin{aligned} 0 &= (\alpha^2 - m)\Xi + \beta^2\mathsf{H} + 2\alpha\beta\mathsf{Z}, \\ 0 &= \gamma^2\Xi + (\delta^2 - m)\mathsf{H} + 2\gamma\delta\mathsf{Z}, \\ 0 &= \alpha\gamma\Xi + \beta\delta\mathsf{H} + (\alpha\delta + \beta\gamma - m)\mathsf{Z}. \end{aligned}\right. \tag{8}$$

Sollen diese drei Gleichungen mit einander verträglich sein, so muſs ihre Determinante verschwinden. Es muſs also m der kubischen Gleichung genügen:

$$\begin{vmatrix} \alpha^2 - m & \beta^2 & 2\alpha\beta \\ \gamma^2 & \delta^2 - m & 2\gamma\delta \\ \alpha\gamma & \beta\delta & \alpha\delta + \beta\gamma - m \end{vmatrix} = 0.$$

Bei der Ausrechnung ziehen sich die Koeffizienten vermöge der Relation $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ wesentlich zusammen; unsere Gleichung nimmt die Gestalt an:

Hosted by Google

$$m^3 - (m^2 - m)((\alpha + \delta)^2 - 1) - 1 = 0.$$

Ihre Wurzeln müssen bez. identisch sein mit den Gröſsen $1, e^{i\omega}, e^{-i\omega}$. In der That läſst sich zunächst $(m-1)$ als Faktor herausheben. Die übrig bleibende quadratische Gleichung lautet:

$$m^2 + m(2 - (\alpha + \delta)^2) + 1 = 0.$$

Ihre Wurzeln sind

$$m = \frac{(\alpha + \delta)^2}{2} - 1 \pm \sqrt{-(\alpha + \delta)^2 + \frac{(\alpha + \delta)^4}{4}} = e^{\pm i\omega}.$$

Daraus folgt

$$\cos\omega = \frac{(\alpha + \delta)^2}{2} - 1,$$

womit die Gröſse des Drehungswinkels gefunden ist. Die Formel vereinfacht sich durch Einführung des halben Winkels; wir haben

$$(9) \qquad \pm\cos\frac{\omega}{2} = \frac{\alpha + \delta}{2}$$

und

$$(9') \qquad \pm\sin\frac{\omega}{2} = \sqrt{1 - \left(\frac{\alpha + \delta}{2}\right)^2}.$$

Auf die Vorzeichenbestimmung in diesen Formeln werden wir sogleich noch näher eingehen.

Nachdem die *Gröſse des Drehungswinkels* gefunden, erübrigt noch die *Lage der Drehungsaxe* (oder in unserer obigen Bezeichnung der „Drehungshauptaxe") zu berechnen. Hiezu dienen uns die Gleichungen (8). Tragen wir in ihnen $m = 1$ ein, so wird wegen der verschwindenden Determinante eine derselben entbehrlich. Wir greifen zur Bestimmung der Drehungsaxe etwa die beiden Gleichungen

$$(\alpha^2 - 1)\Xi + \beta^2 \mathrm{H} + 2\alpha\beta \mathrm{Z} = 0,$$
$$\gamma^2 \Xi + (\delta^2 - 1)\mathrm{H} + 2\gamma\delta \mathrm{Z} = 0$$

heraus, aus welchen durch eine kleine Determinantenrechnung folgt:

$$(10) \qquad \Xi : \mathrm{H} : \mathrm{Z} = -2\beta : 2\gamma : (\alpha - \delta).$$

Wir wollen geradezu die Richtungscosinus $\cos a$, $\cos b$, $\cos c$ berechnen, welche unsere Drehaxe mit den Koordinatenaxen einschlieſst. Da wir annehmen, daſs vor der Drehung das bewegliche mit dem festen System koincidiert, so werden die Richtungscosinus in dem einen System offenbar mit denen im anderen System identisch. Und zwar haben wir längs der Drehungsaxe:

$$\Xi : \mathrm{H} : \mathrm{Z} = \xi : \eta : \zeta = \cos a + i\cos b : -\cos a + i\cos b : -\cos c.$$

Unter ϱ einen Proportionalitätsfaktor verstanden, setzen wir mit Rücksicht auf (10):

Hosted by Google

$$(11)\qquad \begin{cases} \cos a + i \cos b = -2\beta\varrho, \\ -\cos a + i \cos b = 2\gamma\varrho, \\ -\cos c = (\alpha - \delta)\varrho. \end{cases}$$

Aus der Gleichung $\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c = 1$ ergiebt sich noch für ϱ die Bedingung:

$$\varrho^2((\alpha-\delta)^2 + 4\beta\gamma) = \varrho^2((\alpha+\delta)^2 - 4) = 1,$$

oder mit Rücksicht auf (9′)

$$(12)\qquad \varrho = \frac{\pm i}{2 \sin \frac{\omega}{2}}.$$

Wir wollen uns nun mit der Unbestimmtheit der Vorzeichen in den vorstehenden und den früheren Formeln, soweit es möglich ist, abfinden.

Zunächst ist klar, daſs sofern wir nur die Anfangs- und Endlage des Körpers betrachten, statt des Winkels ω auch jeder Winkel $\omega + 2k\pi$ als Drehungswinkel angesehen werden kann, unter k eine beliebige ganze Zahl verstanden. In der That ändert die Hinzufügung einer oder mehrerer voller Umdrehungen an der Endlage des Körpers gar nichts. Von diesem Standpunkte bleibt also das Vorzeichen von $\cos\frac{\omega}{2}$ und $\sin\frac{\omega}{2}$ notwendig unbestimmt.

Demgegenüber wollen wir nun festsetzen, daſs wir die Gröſse einer Drehung nicht lediglich aus der Anfangs- und Endlage des Körpers beurteilen wollen, daſs wir also ω nicht nur modulo 2π gegeben denken. *Vielmehr wollen wir die bei einer Drehung durchlaufenen Zwischenlagen soweit als bekannt ansehen, daſs auch* $\frac{\omega}{2}$ *modulo* 2π, *also* ω *modulo* 4π *festgelegt werden kann.*

Trotz dieser Festsetzung bleibt aber immer noch eine Unbestimmtheit bestehen, welche wir nicht gut heben können. Wir können nämlich jede um einen bestimmten Halbstrahl im positiven Sinn erfolgende Drehung ω sowohl hinsichtlich der Endlage wie hinsichtlich der Zwischenlagen des Körpers ersetzen durch eine Drehung, welche um den entgegengesetzten Halbstrahl im negativen Sinne statt hat. Diesem Umstande entspricht es, daſs wir gleichzeitig a, b, c und ω mit $a + \pi$, $b + \pi$, $c + \pi$ und $-\omega$ vertauschen können.

Aus dem Gesagten ergiebt sich, daſs auf Grund unserer Festsetzung zwar $\cos\frac{\omega}{2}$ *sowie die Produkte* $\sin\frac{\omega}{2}\cos a$ *etc. ein bestimmtes Vorzeichen erhalten werden, daſs aber das Vorzeichen von* $\sin\frac{\omega}{2}$, $\cos a$, $\cos b$, $\cos c$ *einzeln genommen auch jetzt noch unbestimmt bleibt.*

Hosted by Google

Nach dieser Vorbereitung kommen wir auf die Gleichungen (9) bis (12) zurück; dabei wollen wir eine spezielle Lage des Koordinatensystems zu Grunde legen. Wir nehmen die Drehungsaxe zur z-Axe und betrachten eine Drehung, welche von der positiven z-Axe aus gesehen im Sinne des Uhrzeigers erfolgt und deren Gröſse durch einen modulo 2π bestimmten Wert von $\frac{\omega}{2}$ gegeben ist. Alsdann haben wir $\cos a = \cos b = 0$, $\cos c = 1$; andrerseits können wir für diese Drehung die $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ eindeutig angeben. Es folgt nämlich aus der Definition der Eulerschen Winkel $\vartheta = 0$, $\varphi + \psi = \omega$ oder, genauer gesagt, $\frac{\vartheta}{2} \equiv 0$, $\frac{\varphi + \psi}{2} \equiv \frac{\omega}{2}$ modulo 2π. Mithin bekommen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die Werte $\alpha = e^{\frac{i\omega}{2}}$, $\beta = \gamma = 0$, $\delta = e^{-\frac{i\omega}{2}}$. Die dritte der Gleichungen (11) ergiebt nun

$$-1 = \left(e^{\frac{i\omega}{2}} - e^{-\frac{i\omega}{2}}\right)\varrho$$

d. h.

$$\varrho = \frac{+i}{2\sin\frac{\omega}{2}}.$$

Gleichzeitig wird

$$\frac{\alpha + \delta}{2} = +\cos\frac{\omega}{2}.$$

Wir werden dementsprechend auch bei allgemeiner Lage des Koordinatensystems in den Gleichungen (9) und (12) beidemal die *oberen* Vorzeichen wählen. Dagegen bleibt das Vorzeichen in Gleichung (9′) auch jetzt noch unbestimmt, wie es nach der obigen Auseinandersetzung nicht anders zu erwarten ist. Indem wir die entwickelten Formeln übersichtlich zusammenstellen, schreiben wir:

$$(13)\quad \begin{cases} \cos a + i\cos b = -\dfrac{\beta i}{\sin\frac{\omega}{2}}, \\[2ex] -\cos a + i\cos b = \dfrac{\gamma i}{\sin\frac{\omega}{2}}, \\[2ex] -\cos c = \dfrac{(\alpha - \delta) i}{2\sin\frac{\omega}{2}}, \end{cases} \qquad \begin{aligned} \cos\frac{\omega}{2} &= \frac{\alpha+\delta}{2}, \\ \sin\frac{\omega}{2} &= \pm\sqrt{1 - \left(\frac{\alpha+\delta}{2}\right)^2}. \end{aligned}$$

Durch die vorstehenden Formeln ist die oben gestellte Aufgabe gelöst: *die geometrischen Elemente der Drehung mittelst der $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ auszudrücken.*

Die Lösung der umgekehrten Aufgabe: *zu einer durch Axe und*

Hosted by Google

Winkel gegebenen Drehung die Parameter $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ *zu berechnen:* ist in denselben Gleichungen enthalten. Man findet sofort:

$$(13') \quad \begin{cases} \alpha = \cos\frac{\omega}{2} + i \sin\frac{\omega}{2} \cos c, \\ \beta = i \sin\frac{\omega}{2} (\cos a + i \cos b), \\ \gamma = i \sin\frac{\omega}{2} (\cos a - i \cos b), \\ \delta = \cos\frac{\omega}{2} - i \sin\frac{\omega}{2} \cos c. \end{cases}$$

Diese Formeln setzen in Evidenz, daſs die $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ jetzt auch dem Vorzeichen nach bestimmt sind, da sie nur von $\cos\frac{\omega}{2}$ und den Produkten $\sin\frac{\omega}{2}\cos a$ etc. abhängen.

Dasselbe gilt natürlich von den Quaternionengröſsen A, B, C, D, für welche die entsprechenden Formeln besonders einfach werden; sie lauten nämlich:

$$(14) \quad \begin{cases} A = \sin\frac{\omega}{2} \cos a, \\ B = \sin\frac{\omega}{2} \cos b, \\ C = \sin\frac{\omega}{2} \cos c, \\ D = \cos\frac{\omega}{2}. \end{cases}$$

Wir kommen schlieſslich von hier aus noch einmal auf die Zusammensetzungsformeln (4) von pag. 32 zurück. Wir denken uns in ihnen die Parameter $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ und $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ eindeutig gegeben, indem wir die zugehörigen Drehungswinkel ω und ω' willkürlich modulo 4π festlegen. Zunächst werden wir vermuten, daſs eine entsprechende Festsetzung auch hinsichtlich der resultierenden Drehung nötig ist, daſs also zunächst die $\alpha'', \beta'', \gamma'', \delta''$ sich wiederum nur bis auf das Vorzeichen bestimmen. Demgegenüber ergeben aber unsere Formeln zu bestimmten $\alpha, \ldots$ und $\alpha', \ldots$ eindeutig bestimmte Werte von $\alpha'', \ldots$; es wird also zwischen den beiden möglichen Vorzeichen von $\alpha'', \ldots$ durch unsere Formeln von vornherein eine bestimmte Auswahl getroffen.

Nach welchem Prinzip diese Auswahl geschieht, stellen wir dadurch fest, daſs wir unsere jetzigen Formeln mit der geometrischen Konstruktion der resultierenden Drehung, auf welche im ersten Paragraphen pag. 10 Bezug genommen wurde, vergleichen. Notwendigerweise werden jene Konstruktion und diese Formeln modulo 2π denselben Wert des resultierenden Drehungswinkels ω'' ergeben; dagegen ist es zunächst

Hosted by Google

fraglich, ob der Winkel $\frac{\omega''}{2}$ in beiden Fällen modulo 2π gleich oder um π verschieden herauskommt.

Bei der geometrischen Konstruktion ergiebt sich nach pag. 10 $\frac{\omega''}{2}$ als Aufsenwinkel eines sphärischen Dreiecks, in welchem die gegenüberliegenden Winkel bez. $\frac{\omega}{2}$ und $\frac{\omega'}{2}$ sind und die gegenüberliegende Seite gleich dem Winkel $(\widehat{12})$ ist, den die Axe der ersten Drehung mit der Axe der zweiten einschliefst.

Andrerseits ergiebt sich aus unseren Zusammensetzungsformeln (man geht am bequemsten von der letzten der Gleichungen (5) aus) mit Rücksicht auf die Gleichungen (14) der Wert

$$\cos\frac{\omega''}{2} = \cos\frac{\omega}{2}\cos\frac{\omega'}{2} - \sin\frac{\omega}{2}\sin\frac{\omega'}{2}(\cos a\cos a' + \cos b\cos b' + \cos c\cos c')$$
$$= \cos\frac{\omega}{2}\cos\frac{\omega'}{2} - \sin\frac{\omega}{2}\sin\frac{\omega'}{2}\cos(\widehat{12}).$$

Dies ist aber eine der bekannten Grundformeln der sphärischen Trigonometrie. Sie zeigt uns, dafs der so bestimmte Wert von $\frac{\omega''}{2}$ wiederum aufgefafst werden kann als Aufsenwinkel eines sphärischen Dreiecks, dessen gegenüberliegende Winkel $\frac{\omega}{2}$ und $\frac{\omega'}{2}$ sind, dafs also dieser Wert mit dem geometrisch bestimmten Werte von $\frac{\omega''}{2}$ übereinstimmt. Daraufhin können wir sagen:

Die Zusammensetzungsformeln (4) *oder* (5) *sind einfach der analytische Ausdruck für die im ersten Paragraphen genannte Konstruktion in dem Sinne, dafs sie nicht nur denselben Wert von* ω'', *sondern auch denselben Wert von* $\frac{\omega''}{2}$ *wie jene ergeben.*

§ 5. Übergang zu den sog. unendlich kleinen Drehungen.

Wir machen jetzt den *Grenzübergang von einer endlichen zu einer „unendlich kleinen Drehung"*, der schon in § 1 erwähnt wurde, lassen also den Drehungswinkel ω unbegrenzt abnehmen, wobei wir jedoch voraussetzen, dafs sich die Drehungsgeschwindigkeit, welche mit

$$\Omega = \frac{\omega}{dt}$$

bezeichnet werden möge, einer endlichen Grenze nähert. Mit einer unendlich kleinen Drehung operieren wir ebenso, wie wir es in der Infinitesimalrechnung mit einer „unendlich kleinen Verrückung" gewohnt

Hosted by Google

sind, nämlich so, daſs wir die höheren Potenzen der in der Grenze verschwindenden Gröſsen neben den niederen vernachlässigen.

Es möge zunächst überhaupt nur eine unendlich kleine Drehung vorgelegt sein, d. h. es sollen die Systeme x, y, z und X, Y, Z direkt durch eine unendlich kleine Drehung verbunden sein.

Indem wir den Begriff des Drehungsvektors von pag. 11 aufnehmen, zerlegen wir die auf der Drehungsaxe aufgetragene Winkelgeschwindigkeit in Komponenten nach den Koordinatenaxen und nennen dieselben p, q, r. Wir haben nun ersichtlich

$$\Omega = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}, \qquad \omega = \Omega\, dt$$

und mit Benutzung der Richtungscosinus der Drehaxe

$$p = \Omega \cos a,$$
$$q = \Omega \cos b,$$
$$r = \Omega \cos c.$$

Wir fragen weiter, wie sich die Parameter $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ bez. A, B, C, D der unendlich kleinen Drehung durch die p, q, r ausdrücken. Besonders einfach werden die Ausdrücke der Quaternionengröſsen A, B, C, D. Nach Gleichung (14) des vorigen Paragraphen wird nämlich in der Grenze $\omega = 0$:

$$(1) \quad \begin{cases} A = \frac{1}{2}\,\omega \cos a = \frac{1}{2}\, p\, dt, \\ B = \frac{1}{2}\,\omega \cos b = \frac{1}{2}\, q\, dt, \\ C = \frac{1}{2}\,\omega \cos c = \frac{1}{2}\, r\, dt, \\ D = 1. \end{cases}$$

Mithin lauten die Ausdrücke für unsere Parameter $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ folgendermaſsen:

$$(2) \quad \begin{cases} \alpha = D + iC = 1 + \frac{ir}{2}\, dt, & \beta = -B + iA = \frac{ip - q}{2}\, dt, \\ \gamma = B + iA = \frac{ip + q}{2}\, dt, & \delta = \quad D - iC = 1 - \frac{ir}{2}\, dt. \end{cases}$$

Wir wollen auch die expliciten Transformationsgleichungen für die rechtwinkligen Koordinaten xyz und XYZ im Falle einer unendlich kleinen Drehung hinschreiben. Zu dem Zwecke brauchen wir nur die vorstehenden Werte der A, B, C, D in das Schema (10) von pag. 22 einzutragen. Wir finden so, indem wir konsequent die höheren Potenzen von dt wegwerfen, das folgende schiefe Determinantenschema:

Hosted by Google

(3)

	X	Y	Z
x	1	$-r\,dt$	$+q\,dt$
y	$+r\,dt$	1	$-p\,dt$
z	$-q\,dt$	$+p\,dt$	1

Wir mögen noch den Gleichungen des vorstehenden Schemas eine etwas andere Form geben. Es bedeuten ja XYZ die Koordinaten eines im Kreisel festen Punktes vor der unendlich kleinen Drehung, xyz die Koordinaten desselben Punktes nach derselben, beide bezogen auf ein im Raume festes Koordinatensystem. Mithin sind

$$x - X, \quad y - Y, \quad z - Z$$

die Verrückungskomponenten des Punktes; aus ihnen berechnen sich die Geschwindigkeitskomponenten x', y', z' durch die Gleichungen

$$x'\,dt = x - X, \quad y'\,dt = y - Y, \quad z'\,dt = z - Z.$$

Auf Grund des Schemas (3) *wird also die Lineargeschwindigkeit eines Kreiselpunktes*

$$(3') \qquad \begin{cases} x' = \qquad\quad - r\,Y + qZ, \\ y' = \quad rX \qquad\quad - pZ, \\ z' = -\,qX + p\,Y \end{cases}$$

Wir werden hier rechter Hand statt X, Y, Z ebensowohl x, y, z schreiben dürfen, da sich diese Gröfsen von einander nur um Glieder mit dem Faktor dt unterscheiden. Dann haben wir also:

$$(3'') \qquad \begin{cases} x' = \qquad\quad - ry + qz, \\ y' = \quad rx \qquad\quad - pz, \\ z' = -\,qx + py \end{cases}$$

Jetzt können wir den wichtigen Satz über die Zusammensetzung zweier unendlich kleiner Drehungen, auf den bereits pag. 11 Bezug genommen wurde und der die Einführung des Wortes „Drehungsvektor“ rechtfertigt, direkt analytisch verifizieren. Wir betrachten neben der Drehung mit den Parametern $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ in Gl. (2) eine zweite Drehung, welche durch die Parameter

$$\alpha' = 1 + \frac{ir'}{2}\,dt, \qquad \beta' = \frac{ip' - q'}{2}\,dt,$$

$$\gamma' = \frac{ip' + q'}{2}\,dt, \qquad \delta' = 1 - \frac{ir'}{2}\,dt$$

gegeben sei. Nach der Zusammensetzungsregel von pag. 32 sind die

Hosted by Google

Parameter der resultierenden Drehung bei Vernachlässigung höherer Potenzen von dt die folgenden:

$$\alpha'' = 1 + \frac{i(r+r')}{2}\,dt, \qquad \beta'' = \frac{i(p+p') - (q+q')}{2}\,dt,$$

$$\gamma'' = \frac{i(p+p') + (q+q')}{2}\,dt, \qquad \delta'' = 1 - \frac{i(r+r')}{2}\,dt.$$

Mithin lauten die Komponenten der resultierenden Drehgeschwindigkeit:

$$p'' = p + p', \quad q'' = q + q', \quad r'' = r + r'.$$

Zwei unendlich kleine Drehungen setzen sich also ebenso zusammen, wie Vektoren, nämlich so, daſs sich ihre Komponenten einfach addieren.

Insbesondere wird das Resultat zweier unendlich kleiner Drehungen von ihrer Reihenfolge unabhängig; *unendlich kleine Drehungen stellen,* wie wir sagten, *vertauschbare Operationen vor.*

Wir sehen jetzt auch deutlich den allgemeinen Grund dieses einfachen Resultates ein. Er beruht wesentlich darin, daſs wir uns in dem Grenzfalle einer unendlich kleinen Drehung gestatten, die höheren Potenzen von dt zu vernachlässigen und daſs in den beibehaltenen ersten Potenzen die Gröſsen $p, \ldots, p', \ldots$ notwendig in der Verbindung $p + p', \ldots$ vorkommen. Man erkennt hiernach unmittelbar, daſs ein entsprechendes Ergebnis bei jeder „unendlich kleinen Transformation“ eintreten muſs.

Übrigens hätten wir mit Hülfe des letzten Satzes die in dem Schema (3) enthaltenen sehr bekannten Gleichungen einfacher direkt ableiten können, wie dies auch in der That gewöhnlich geschieht, nämlich durch Zusammensetzung der successiven Drehungen $p\,dt$, $q\,dt$, $r\,dt$.

Demnächst kombinieren wir eine endliche Drehung mit einer unendlich kleinen. Die endliche Drehung habe die Parameter $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ und möge zuerst ausgeführt werden, die Parameter der unendlich kleinen Drehung heiſsen $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$. Wir fragen nach den Parametern der resultierenden Drehung

$$\alpha'' = \alpha + d\alpha, \quad \beta'' = \beta + d\beta, \quad \gamma'' = \gamma + d\gamma, \quad \delta'' = \delta + d\delta.$$

Da wir jetzt annehmen werden, daſs das bewegliche Koordinatensystem XYZ in seiner Anfangslage *vor der ersten Drehung* mit dem festen Koordinatensystem xyz zusammenfällt, so ist seine Lage *zu Beginn der zweiten* (der unendlich kleinen) *Drehung* von der des festen Systems verschieden. Wir müssen daher von jetzt ab zwischen den Komponenten des Drehungsvektors nach dem beweglichen und festen System wohl unterscheiden. Die ersteren nennen wir p, q, r, die letzteren $\pi, \varkappa, \varrho$. Wollen wir die Zusammensetzungsformeln von pag. 32 direkt verwenden, so müssen wir die unendlich kleine Drehung auf das be-

Hosted by Google

wegliche System beziehen, also die Komponenten p, q, r benutzen. Wir erhalten so mit Rücksicht auf die Gleichungen (2):

$$\alpha + d\alpha = \alpha\alpha' + \beta\gamma' = \alpha + \left(\frac{ir}{2}\alpha + \frac{ip+q}{2}\beta\right) dt,$$

$$\beta + d\beta = \alpha\beta' + \beta\delta' = \beta + \left(\frac{ip-q}{2}\alpha - \frac{ir}{2}\beta\right) dt \text{ etc.}$$

Hierfür schreiben wir, indem wir die analogen Gleichungen für γ und δ hinzufügen:

$$(4) \quad \begin{cases} \dfrac{d\alpha}{dt} = \dfrac{ir}{2}\alpha + \dfrac{ip+q}{2}\beta, & \dfrac{d\beta}{dt} = \dfrac{ip-q}{2}\alpha - \dfrac{ir}{2}\beta, \\ \dfrac{d\gamma}{dt} = \dfrac{ir}{2}\gamma + \dfrac{ip+q}{2}\delta, & \dfrac{d\delta}{dt} = \dfrac{ip-q}{2}\gamma - \dfrac{ir}{2}\delta. \end{cases}$$

Die vorstehenden Gleichungen geben die Änderungen an, welche die Parameter $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ bei dem Hinzutreten einer unendlich kleinen Drehung von den Komponenten p, q, r erleiden. Denken wir uns die p, q, r irgendwie als Funktionen der Zeit gegeben, so können wir aus ihnen die successiven Änderungen der $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ d. h. die successiven Lagenänderungen des Kreisels im Raume durch Integration des vorstehenden Systems von Differentialgleichungen bestimmen. Sind umgekehrt die $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ bekannte Funktionen der Zeit, sind also die successiven Lagen des Kreisels im Raume gegeben, so können wir aus unseren Gleichungen die p, q, r vermöge Differentiation berechnen.

Nun bestimmen aber die Verhältnisse $p:q:r$ die Lage der instantanen Drehungsaxe gegen das im Kreisel feste XYZ-System und die successiven Werte dieser Verhältnisse die *Gestalt des Polhodiekegels.* Ferner bedeuten p, q, r die Koordinaten des Endpunktes des Drehungsvektors in demselben Koordinatensystem; also geben die successiven Werte der p, q, r selbst die *Gestalt der Polhodiekurve* an.

Die expliciten Ausdrücke der p, q, r finden wir durch Auflösen der Gleichungen (4). Wir behalten die komplexen Verbindungen $p + iq, \; -p + iq, \; -r$ einfach bei und haben

$$(5) \quad \begin{cases} p + iq = 2i\left(\beta\dfrac{d\delta}{dt} - \delta\dfrac{d\beta}{dt}\right), \\ -p + iq = 2i\left(\alpha\dfrac{d\gamma}{dt} - \gamma\dfrac{d\alpha}{dt}\right), \\ -r \qquad = 2i\left(-\alpha\dfrac{d\delta}{dt} + \gamma\dfrac{d\beta}{dt}\right) = 2i\left(-\beta\dfrac{d\gamma}{dt} + \delta\dfrac{d\alpha}{dt}\right), \end{cases}$$

wobei noch die beiden für $-r$ angegebenen Werte wegen der Relation $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ identisch sind.

Wir schliefsen hieran die Formeln für den *Kegel* bez. die *Kurve der Herpolhodie,* berechnen also die Komponenten $\pi, \varkappa, \varrho$ des Drehungs-

Hosted by Google

vektors im festen System. Wir könnten so verfahren, daſs wir die soeben bestimmten Werte von $p + iq$, $-p + iq$, $-r$ statt Ξ, H, Z in das Schema (9) von pag. 21 eintragen; die zugehörigen Werte von ξ, η, ζ liefern dann die gesuchten Gröſsen $\pi + i\varkappa$, $-\pi + i\varkappa$, $-\varrho$. Direkter führt indessen folgender Weg zum Ziele. Wir bemerkten schon pag. 14, daſs die Herpolhodiekurve der direkten Bewegung diametral in bezug auf den Unterstützungspunkt zu der Polhodiekurve der umgekehrten Bewegung liegt. Nun erhalten wir aus den Gleichungen (5) die Polhodiekurve der umgekehrten Bewegung, indem wir $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ nach der pag. 30 gegebenen Regel ersetzen durch δ, $-\beta$, $-\gamma$, α. Mithin lauten die *Formeln für die Herpolhodiekurve* der direkten Bewegung:

$$(6)\qquad \begin{cases} \pi + i\varkappa = 2i\left(\beta \dfrac{d\alpha}{dt} - \alpha \dfrac{d\beta}{dt}\right), \\ -\pi + i\varkappa = 2i\left(\delta \dfrac{d\gamma}{dt} - \gamma \dfrac{d\delta}{dt}\right), \\ -\varrho \qquad = 2i\left(\delta \dfrac{d\alpha}{dt} - \gamma \dfrac{d\beta}{dt}\right) = 2i\left(\beta \dfrac{d\gamma}{dt} - \alpha \dfrac{d\delta}{dt}\right). \end{cases}$$

Der *Herpolhodiekegel* ist natürlich schon durch die Verhältnisse der rechts stehenden Gröſsen bestimmt.

Die entsprechenden Gleichungen in den A, B, C, D wollen wir nicht ausführlich hinschreiben; sie folgen durch Zerlegung von (5) und (6) in einen reellen und imaginären Teil. Dagegen werden wir später die Darstellung der p, q, r durch die Eulerschen Winkel φ, ψ, ϑ und ihre Differentialquotienten nach der Zeit brauchen. Wir kommen hierzu, indem wir etwa von den Gleichungen (5) ausgehen. Die rechter Hand stehenden Aggregate der α, β, γ, δ rechnen wir mit Hülfe der ursprünglichen Definition unserer Parameter in die φ, ψ, ϑ um. So erhalten wir beispielsweise:

$$\beta \frac{d\delta}{dt} - \delta \frac{d\beta}{dt} = -\frac{i}{2} e^{-i\varphi} \vartheta' \left(\sin^2 \frac{\vartheta}{2} + \cos^2 \frac{\vartheta}{2}\right) + e^{-i\varphi} \psi' \sin \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\vartheta}{2}$$
$$= -\frac{i}{2} (\vartheta' + i\psi' \sin \vartheta) e^{-i\varphi}$$

und

$$-\alpha \frac{d\delta}{dt} + \gamma \frac{d\beta}{dt} = +\frac{i}{2} \cos^2 \frac{\vartheta}{2} (\varphi' + \psi') - \frac{i}{2} \sin^2 \frac{\vartheta}{2} (-\varphi' + \psi')$$
$$= \frac{i}{2} (\varphi' + \cos \vartheta \psi');$$

mithin wird

$$\begin{aligned} p + iq &= (\vartheta' + i\psi' \sin \vartheta) e^{-i\varphi}, \\ -p + iq &= (-\vartheta' + i\psi' \sin \vartheta) e^{+i\varphi}, \\ -r &= -(\varphi' + \psi' \cos \vartheta) \end{aligned}$$

oder

$$(7)\qquad \begin{cases} p = \vartheta' \cos\varphi + \psi' \sin\vartheta \sin\varphi, \\ q = -\vartheta' \sin\varphi + \psi' \sin\vartheta \cos\varphi, \\ r = \varphi' + \cos\vartheta\, \psi'. \end{cases}$$

Der Übergang zu der umgekehrten Bewegung, welche in den Eulerschen Parametern nach pag. 31 durch Vertauschung von φ, ψ, ϑ mit $-\psi, -\varphi, -\vartheta$ zu bewerkstelligen ist, liefert:

$$(8)\qquad \begin{cases} \pi = \vartheta' \cos\psi + \varphi' \sin\vartheta \sin\psi, \\ \varkappa = \vartheta' \sin\psi - \varphi' \sin\vartheta \cos\psi, \\ \varrho = \psi' + \cos\vartheta\, \varphi'. \end{cases}$$

Nach $\varphi', \psi', \vartheta'$ aufgelöst lauten die Gleichungen (7):

$$(9)\qquad \begin{cases} \varphi' = r - \frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta}(p \sin\varphi + q \cos\varphi), \\ \psi' = \frac{1}{\sin\vartheta}(p \sin\varphi + q \cos\varphi), \\ \vartheta' = (p \cos\varphi - q \sin\varphi). \end{cases}$$

Man kann diese Gleichungen (7) und (9) natürlich auch durch elementare Zerlegung der unendlich kleinen Drehung in Komponenten finden, wie dies in den Büchern vielfach ausgeführt wird.

Die Gleichungen (7) und (8) geben eine neue Darstellung für den Polhodie- und Herpolhodiekegel, welche freilich an Durchsichtigkeit den früheren nachsteht; die Gleichungen (9) sagen aus, wie sich die Parameter φ, ψ, ϑ beim Hinzutreten einer unendlich kleinen Drehung modifizieren; sie bilden einen Bestandteil desjenigen Differentialgleichungssystems, mit dessen Integration wir uns im vierten Kapitel beschäftigen werden. —

Wir haben im zweiten Paragraphen verschiedene Parametersysteme ($\alpha, \beta, \gamma, \delta$; A, B, C, D; φ, ψ, ϑ) aufgestellt, durch welche wir die jeweilige *Lage* des Kreisels bestimmten; andrerseits lernten wir in diesem Paragraphen gelegentlich der Betrachtung unendlich kleiner Drehungen Parametersysteme kennen, durch welche der jeweilige *Geschwindigkeitszustand* des Kreisels charakterisiert wird. Es sind dieses in erster Linie die Gröſsen p, q, r und $\varphi', \psi', \vartheta'$. —

Wir können die genannten Gröſsen kurz als *Geschwindigkeitskoordinaten des Kreisels* bezeichnen, u. zw. werden die p, q, r *rechtwinklige*, die $\varphi', \psi', \vartheta'$ *schiefwinklige Geschwindigkeitskoordinaten* zu nennen sein, weil wir bei Benutzung der ersteren den Drehungsvektor nach den rechtwinkligen Axen X, Y, Z, bei Benutzung der letzteren

Hosted by Google

nach drei im allgemeinen schiefwinkligen Axen (nämlich der Figurenaxe, der Vertikalen und der Knotenlinie) in Komponenten zerlegen.

Zwischen den beiden Gröſsentripeln p, q, r und $\varphi', \psi', \vartheta'$ besteht noch ein weiterer wichtiger Unterschied: *Die $\varphi', \psi', \vartheta'$ sind die nach der Zeit genommenen Differentialquotienten gewisser Raum-(Winkel-)Abmessungen, die p, q, r sind dieses nicht:* oder: *die Gröſsen $\varphi' dt$, $\psi' dt$, $\vartheta' dt$ sind exakte, dagegen $p\,dt$, $q\,dt$, $r\,dt$ unexakte Differentiale.*

Wir erkennen dies etwa daraus, daſs die Werte der Zeitintegrale

$$\int p\,dt, \qquad \int q\,dt, \qquad \int r\,dt$$

von einer Anfangszeit t_0 bis zu einer Endzeit t_1 erstreckt, nicht allein von der Anfangs- und Endlage des Körpers, sondern auch von seinen Zwischenlagen abhängen, was geometrisch evident ist. Dasselbe lehrt auch die Betrachtung irgend einer der zuletzt angeschriebenen Gleichungen. Nehmen wir z. B. die erste der Gleichungen (7):

$$p\,dt = d\vartheta \cos\varphi + d\psi \sin\vartheta \sin\varphi.$$

Soll hier die rechte Seite ein vollständiges Differential sein, so müſsten

$$\frac{\partial \cos\varphi}{\partial \psi} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \sin\vartheta \sin\varphi}{\partial \vartheta}$$

denselben Wert haben, was ersichtlich nicht der Fall ist.

Wir werden also sagen müssen: *Die p, q, r sind nicht, wie die Geschwindigkeitskoordinaten x', y', z' des einzelnen Massenpunktes, zeitliche Differentialquotienten von Raumabmessungen, sondern nur lineare Funktionen von solchen.* Trotzdem sind sie in der Kreiseltheorie als Geschwindigkeitskoordinaten sehr geeignet und auch allgemein üblich.

Wir können den Geschwindigkeitszustand natürlich noch durch beliebig viele andere, mehr oder minder geeignete, Parameter charakterisieren, z. B., was gleichfalls bereits geschehen, durch die Gröſsen $\frac{d\alpha}{dt}, \frac{d\beta}{dt}, \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\delta}{dt}$. Die letzteren stellen offenbar „überzählige Geschwindigkeitskoordinaten" vor, während unsere p, q, r oder unsere $\varphi', \psi', \vartheta'$ als „independente Geschwindigkeitskoordinaten" zu bezeichnen wären.

Von hier aus gelangen wir sofort dazu, auch für den Fall des *frei beweglichen starren Körpers* Geschwindigkeitskoordinaten anzugeben. Wir haben zu dem Zwecke nur die Geschwindigkeit des Bezugspunktes einerseits (die Translationsgeschwindigkeit) und die Bewegung um den Bezugspunkt andrerseits (die Rotationsgeschwindigkeit) je durch drei Parameter festzulegen. Die einfachsten und allgemein gebräuchlichen Geschwindigkeitskoordinaten des frei beweglichen starren Körpers werden hiernach die sechs Gröſsen:

Hosted by Google

$$x', \; y', \; z', \; p, \; q, \; r,$$

wo x, y, z wie am Ende von § 2 die rechtwinkligen Koordinaten des Bezugspunktes bedeuten. Indessen können wir den Geschwindigkeitszustand natürlich noch in sehr mannigfacher Weise durch andere sechs Gröſsen charakterisieren. Je sechs solche Gröſsen mögen auch aufgefaſst werden als „*Koordinaten der instantanen Bewegungsschraube*“, durch welche wir jede unendlich kleine Bewegung des freien starren Körpers nach § 1 charakterisieren können.

§ 6. Das Beispiel der regulären Präcession.

Als Beispiel für die vorangehende allgemeine Theorie behandeln wir eine besonders einfache Bewegung des Kreisels, welche wir in der Folge bei dem Studium komplizierterer Bewegungen stets zur Orientierung heranziehen werden, nämlich die *reguläre Präcession.* Natürlich kann es sich hier nur um die *kinematische* Seite dieser Bewegung handeln; ihre *kinetische* Untersuchung, d. h. die Beantwortung der Frage, ob und unter welchen Umständen sich bei einem gegebenen Kreisel eine reguläre Präcessionsbewegung einstellen kann, wird uns erst später beschäftigen. Wir wollen die Untersuchung zuerst geometrisch im Anschluſs an den ersten Paragraphen dieses Kapitels, sodann analytisch im Anschluſs an den vorangehenden Paragraphen führen.

Die reguläre Präcession definieren wir in der Weise, daſs wir einerseits die Bewegung der Figurenaxe im Raume, andrerseits die Bewegung des Kreisels gegen die Figurenaxe angeben. Beide Teilbewegungen sind im vorliegenden Falle so einfach wie möglich. *Es dreht sich nämlich die Figurenaxe um eine feste Gerade des Raumes unter konstanter Neigung mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit; gleichzeitig dreht sich der Kreisel um die Figurenaxe gleichfalls mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit herum.* Die feste Gerade des Raumes bezeichnen wir als die „Axe der Präcession“; wir denken uns dieselbe meistens der Einfachheit halber vertikal.

Die Drehgeschwindigkeit der Figurenaxe um diese Axe heiſse ν, die hinzutretende Drehgeschwindigkeit des Kreisels um die Figurenaxe μ; erstere bezeichnen wir auch speziell als die „Präcessionsgeschwindigkeit der Figurenaxe“. Übrigens wollen wir, um bei der vorläufigen geometrischen Behandlung Fallunterscheidungen möglichst zu vermeiden, zunächst voraussetzen, daſs die Drehgeschwindigkeit μ, im Verhältnis zur „Präcessionsgeschwindigkeit“ ν sehr groſs ist, wie es in den späteren Anwendungen thatsächlich die Regel sein wird.

Hosted by Google

Unsere Einzeldrehungen μ und ν kombinieren sich in jedem Momente zu einer resultierenden Drehung, welche durch ihre Winkelgeschwindigkeit, ihre Axe und ihren Sinn Gröfse, Richtung und Sinn des instantanen Drehungsvektors bestimmt. In den untenstehenden Figuren bedeutet OV die Axe der Präcession, OF die Figurenaxe,

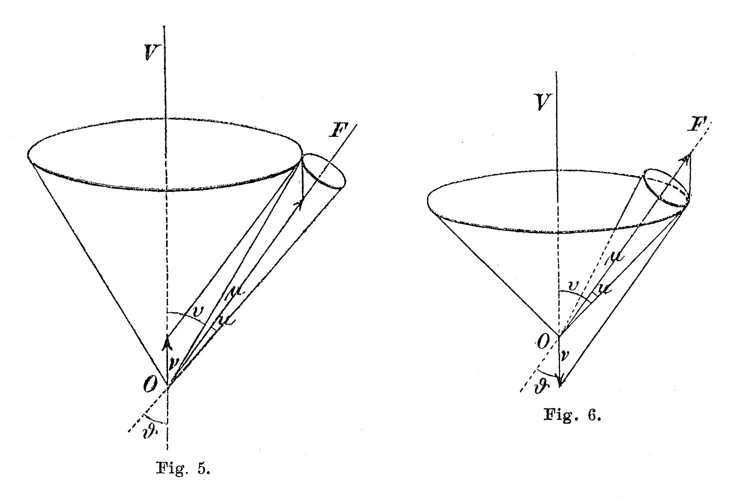


Fig. 5. Fig. 6.

wobei wir die Bezeichnung „Figurenaxe" so wählen können, dafs der Winkel zwischen OV und OF nicht gröfser als ein Rechter wird und wo wir den Spezialfall, dafs dieser Winkel gerade gleich einem Rechten ist, vorderhand ausschliefsen wollen. Auf diesen Axen tragen wir bez. die Winkelgeschwindigkeiten μ und ν in der pag. 11 festgesetzten Weise ab. Wir unterscheiden zwei Fälle, je nachdem die Winkelgeschwindigkeiten μ und ν gleichen oder entgegengesetzten Sinn besitzen, je nachdem also die zugehörigen Vektoren einen spitzen oder stumpfen Winkel einschliefsen. Im ersten Fall bezeichnen wir die Präcession als *progressive*, im zweiten als *retrograde*. Machen wir nun die Parallelogrammkonstruktion, so kommt in dem ersten Falle die Diagonale in den spitzen Winkel zwischen der Vertikalen und der Figurenaxe, im zweiten Falle aufserhalb dieses Winkels zu liegen. Im übrigen aber besitzt unsere Diagonale, da nach Voraussetzung die Teilvektoren μ und ν während der Bewegung eine konstante Länge und eine unveränderliche relative Lage haben, in beiden Fällen eine feste Länge und eine unveränderliche relative Lage gegen die Vertikale wie gegen die Figurenaxe.

Der Endpunkt des Drehungsvektors beschreibt also im Laufe der Bewegung, sofern wir seine Lage im Raume betrachten, einen Kreis um die Vertikale; gleichzeitig durchläuft er, sofern wir von seiner Lage gegen den Kreisel sprechen wollen, einen Kreis um die Figurenaxe.

Hosted by Google

Mithin sind im Falle der regulären Präcession die Kurven der Polhodie und der Herpolhodie einfache Kreise; dementsprechend werden die Kegel der Polhodie und der Herpolhodie, welche jene Kurven von O aus projizieren, gewöhnliche Kreiskegel. Hinsichtlich der gegenseitigen Lage dieser beiden Kegel konstatieren wir auf Grund der Figuren 5 und 6 einen Unterschied: *Bei der progressiven Präcession rollt der Polhodiekegel von aufsen, bei der retrograden von innen auf dem Herpolhodiekegel ab.*

Wir mögen noch aus der Parallelogrammkonstruktion einige elementargeometrische Folgerungen ziehen. Wir bezeichnen den Winkel zwischen Figurenaxe und Vertikalen, wie früher, mit ϑ. Ferner heifse der Winkel zwischen der instantanen Rotationsaxe und der Figurenaxe u, der Winkel zwischen der instantanen Rotationsaxe und der Vertikalen v. Alsdann bestimmt u die Öffnung des Polhodie-, v die des Herpolhodiekegels.

Bedeutet Ω, wie früher, die Gröfse der resultierenden Drehgeschwindigkeit, also die Länge der Diagonalen im Parallelogramm, so haben wir nach dem Pythagoräischen Lehrsatze:

$$\Omega^2 = \mu^2 + \nu^2 + 2\mu\nu\cos\vartheta.$$

Ferner ergiebt sich aus den beiden Dreiecken, in welche unser Parallelogramm durch die Diagonale zerlegt wird:

$$\frac{\sin u}{\nu} = \frac{\sin\vartheta}{\Omega}$$

und

$$\frac{\sin v}{\mu} = \frac{\sin\vartheta}{\Omega}.$$

Also

(1) $$\mu \sin u = \nu \sin v.$$

Ein wichtiges Beispiel für retrograde Präcession liefert unsere *Erde.* Die Erde spielt hier die Rolle des Kreisels; den Mittelpunkt der Erde denken wir uns bei der Bewegung fest. Der Vertikalen entspricht die Normale zur Ebene der Ekliptik. *Die Erdaxe umkreist diese Gerade unter der festen Neigung von rund* $23\frac{1}{2}^0$ *in ca.* 26 000 *Jahren einmal.* Nehmen wir als Zeiteinheit die Länge eines Tages, so wird

$$\mu = 2\pi, \qquad \nu = \frac{-2\pi}{365\,.\,26\,000}.$$

Aus der Gl. (1) ergiebt sich

(2) $$\sin u = \frac{-\sin v}{365\,.\,26\,000}.$$

Der Winkel u wird also eine sehr kleine Gröfse, so dafs wir sin u



durch u ersetzen können. Da ferner wie in Fig. 6 $v = \vartheta + u$ ist, so werden wir v durch ϑ ersetzen dürfen. *Der Herpolhodiekegel wird also sehr nahezu ein Kreiskegel von* $23^1/_2{}^0$ *Winkelöffnung.* Wir fragen ferner nach der Gestalt des Polhodiekegels. Statt seines Öffnungswinkels geben wir lieber den Radius (r) desjenigen Kreises an, in welchem die Erdoberfläche von diesem Kegel geschnitten wird. Bedeutet R die Länge des Erdradius*) $\left(R = \frac{40\,000\,000}{2\pi}\text{ Meter } = \frac{4\,000\,000\,000}{2\pi}\text{ cm}\right)$, so haben wir nach Gl. (2)

$$r = Ru = \frac{\sin(23^1/_2{}^0) \,.\, 4\,000\,000\,000}{2\pi \,.\, 365 \,.\, 26\,000}\text{ cm} = 27\text{ cm}.$$

Ein kleiner, um den Nordpol beschriebener Kreis von 27 *cm Radius würde also die Spur des Polhodiekegels auf der Erdoberfläche sein.* Die Präcessionsbewegung der Erde können wir uns dadurch hervorgebracht denken, daſs ein entsprechend schmaler Polhodiekegel auf einem Herpolhodiekegel von ca. $23^1/_2{}^0$ Winkelöffnung von innen abrollt.

Wie wir sehen, giebt die Poinsotsche Theorie der rollenden Kegel im Falle der regulären Präcession ein höchst anschauliches und prägnantes Bild von dem Ablauf der Bewegung. Dementsprechend handelt auch Poinsot bei den Anwendungen seiner Theorie mit Vorliebe von dem Beispiele der regulären Präcession**).

Wir behandeln jetzt die reguläre Präcession noch einmal analytisch auf Grund der im vorigen Paragraphen abgeleiteten Resultate. Zunächst übertragen wir die obige geometrische Definition unserer Bewegung ins Analytische, was mit Hülfe der Eulerschen Parameter φ, ψ, ϑ auf das Einfachste bewerkstelligt wird.

Wir haben nämlich offenbar:

(3) $$\vartheta = \text{const.} \quad \varphi = \mu t, \quad \psi = \nu t.$$

Die Komponenten des instantanen Drehungsvektors werden daraufhin nach Gleichung (7) des vorigen Paragraphen, wenn wir sie auf das im Kreisel feste System beziehen:

(4) $$p = \nu \sin\vartheta \sin\varphi, \quad q = \nu \sin\vartheta \cos\varphi, \quad r = \mu + \nu\cos\vartheta$$

und nach Gleichung (8) desselben Paragraphen, wenn wir sie für das im Raume feste System berechnen:

(5) $$\pi = \mu \sin\vartheta \sin\psi, \quad \varkappa = -\mu\sin\vartheta\cos\psi, \quad \varrho = \nu + \mu\cos\vartheta.$$

Diese Gleichungen zeigen zunächst wieder, *daſs Polhodie- und Herpolhodiekurve in unserem Falle Kreise werden.* In der That haben wir z. B.:

$$p^2 + q^2 = \nu^2 \sin^2\vartheta = \text{const.}, \quad r = \mu + \nu\cos\vartheta = \text{const.}$$

*) Alles in runden Zahlen gerechnet.

**) Vgl. z. B. seine Schrift: Théorie des cônes circulaires roulants, in der Zeitschrift Connaissance des temps, 1853.


Hosted by Google

Die Winkelöffnungen der abrollenden Kegel berechnen sich, wenn u und v die oben angegebene Bedeutung haben, nach der Formel:

$$(6) \qquad \operatorname{ctg} u = \frac{r}{\sqrt{p^2+q^2}}, \quad \operatorname{ctg} v = \frac{\varrho}{\sqrt{\pi^2+\varkappa^2}};$$

den Gleichungen (4) und (5) zufolge haben wir also:

$$(7) \qquad \operatorname{ctg} u = \frac{\frac{\mu}{\nu}+\cos\vartheta}{\sin\vartheta}, \quad \operatorname{ctg} v = \frac{\frac{\nu}{\mu}+\cos\vartheta}{\sin\vartheta}.$$

Natürlich genügen diese Werte von u und v der obigen Relation (1), wie man leicht nachrechnet.

Wir geben jetzt eine *ausführliche Diskussion der verschiedenen möglichen Fälle regulärer Präcessionsbewegung*, indem wir dieselben nach den Werten von $\frac{\nu}{\mu}$ klassifizieren. Die jetzt zu gebende Einteilung subsumiert sich dabei der früheren, in welcher wir, je nach dem $\frac{\nu}{\mu} > 0$ oder < 0 war, die Bewegung als progressive oder retrograde unterschieden.

Bei der folgenden Diskussion denken wir uns ϑ als fest gegeben und zwar können wir, wie oben, voraussetzen, daſs ϑ nicht gröſser als ein Rechter ist. Indem wir die Grenzfälle $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ bis zum Schlusse zurückschieben, nehmen wir für das zunächst Folgende an:

$$0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}.$$

Von den Winkelöffnungen u und v dürfen wir noch eine, etwa v, als spitzen Winkel rechnen. Gleichzeitig mit den Kegeln u und v rollen nämlich auch die diametralen Kegel $\pi - u$ und $\pi - v$ auf einander ab. Wenn daher $v > \frac{\pi}{2}$, so können wir durch Übergang zu den Kegeln $u' = \pi - u$ und $v' = \pi - v$ erreichen, daſs $v' < \frac{\pi}{2}$ wird.

Das ganze Wertegebiet von $\frac{\nu}{\mu}$ zerlegt sich für unsere Zwecke in vier Intervalle, welche durch die folgenden vier Grenzwerte

$$\frac{\nu}{\mu} = \infty, \quad \frac{\nu}{\mu} = 0, \quad \frac{\nu}{\mu} = -\cos\vartheta, \quad \frac{\nu}{\mu} = -\frac{1}{\cos\vartheta}$$

geschieden werden.

Erster Grenzfall: $\frac{\nu}{\mu} = +\infty$. In diesem Falle ist $\mu = 0$, d. h. der Kreisel rotiert relativ zu seiner Figurenaxe überhaupt nicht. Die Formeln

(7) zeigen gleichzeitig, daſs $v = 0$. Der Herpolhodiekegel ist also unendlich dünn und die instantane Rotationsaxe fällt beständig mit der Vertikalen zusammen. *In unserem ersten Grenzfalle führt der Kreisel eine gleichförmige Rotation von der Winkelgeschwindigkeit* ν *um eine (von der Figurenaxe verschiedene) feste Gerade (nämlich die Vertikale) aus.*

Erstes Intervall: $+\infty > \frac{\nu}{\mu} > 0$. Im Innern unseres ersten Intervalles haben ν und μ gleiche Zeichen. Die Parallelogrammkonstruktion, welche wir oben ausführten, zeigt dann, daſs die instantane Rotationsaxe in dem spitzen Winkel zwischen der Vertikalen und der Figurenaxe liegt. Dementsprechend ergiebt sich aus den Gl. (7), daſs u und v kleiner als ϑ sind. *Der bewegliche Kegel rollt daher auf dem festen von auſsen ab* (vgl. Fig. 7). Wir werden diese Bewegung als *epicykloidische* bezeichnen.

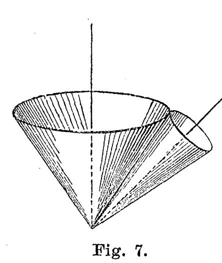


Fig. 7.

Zweiter Grenzfall: $\frac{\nu}{\mu} = 0$. Bei abnehmenden positiven Werten von $\frac{\nu}{\mu}$ erweitert sich der Herpolhodiekegel allmählich, während der Polhodiekegel sich verengert. In dem Grenzfalle $\frac{\nu}{\mu} = 0$ ist der Polhodiekegel unendlich dünn geworden; in der That ergeben die Gl. (7) in diesem Falle $u = 0$. Infolgedessen fällt die instantane Rotationsaxe beständig mit der Figurenaxe zusammen. Gleichzeitig steht wegen $v = 0$ die Figurenaxe im Raume stille. *Der Kreisel rotiert also mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit* μ *um seine im Raume feste Figurenaxe.*

Zweites Intervall: $0 > \frac{\nu}{\mu} > -\cos\vartheta$. Wenn $\frac{\nu}{\mu}$ zu negativen Werten übergeht, beginnt sich der Polhodiekegel wieder zu erweitern. Gleichzeitig tritt er ins Innere des Herpolhodiekegels ein. In der That ergiebt sich aus den Gl. (7) $v > \vartheta$. *Der bewegliche Kegel rollt daher auf dem festen von innen ab* (vgl. Fig. 8). Wir werden diesen Fall als *Hypocykloidenbewegung* bezeichnen.

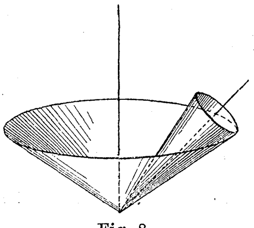


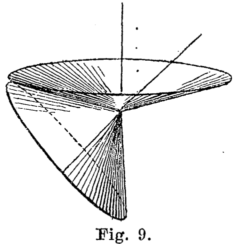
Fig. 8.

Dritter Grenzfall: $\frac{\nu}{\mu} = -\cos\vartheta$. Wenn $\frac{\nu}{\mu}$ den Wert $-\cos\vartheta$ erreicht hat, ist nach Gl. (7) $v = \frac{\pi}{2}$ geworden, *der Herpolhodiekegel also in eine Ebene ausgeartet.*

Drittes Intervall: $-\cos\vartheta > \frac{\nu}{\mu} > -\frac{1}{\cos\vartheta}$. Wenn $\frac{\nu}{\mu}$ weiter abnimmt, würde sich $v > \frac{\pi}{2}$ ergeben. Nach unserer obigen Verabredung

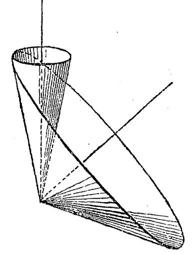
Hosted by Google

haben wir dann zu den diametralen Kegeln $\pi - u$ und $\pi - v$ überzugehen, wodurch $v < \frac{\pi}{2}$ und $u > \frac{\pi}{2}$ wird. *In dem dritten Intervalle rollt daher ein stumpfer Polhodiekegel auf einem spitzen Herpolhodiekegel von aufsen ab* (vgl. Fig. 9). Wir wollen diese Art der Bewegung als *anticykloidisch* bezeichnen.


Fig. 9.

Vierter Grenzfall: $\frac{v}{\mu} = -\frac{1}{\cos\vartheta}$. Während $\frac{v}{\mu}$ von $-\cos\vartheta$ bis $-\frac{1}{\cos\vartheta}$ abnimmt, flacht sich der Polhodiekegel allmählich ab. Für den Grenzwert $\frac{v}{\mu} = -\frac{1}{\cos\vartheta}$ ist er nach (7) *in eine Ebene ausgeartet.*

Viertes Intervall: $-\frac{1}{\cos\vartheta} > \frac{v}{\mu} > -\infty$. Bei weiter abnehmendem $\frac{v}{\mu}$ verengert sich der Polhodiekegel, so dafs im vierten Intervalle wieder $u < \frac{\pi}{2}$ ist. *Gleichzeitig umfafst der Polhodiekegel den Herpolhodiekegel von aufsen* (vgl. Fig. 10). Die hieraus sich ergebende Art des Abrollens wollen wir als *Pericykloidenbewegnng* bezeichnen.


Fig. 10.

Der Grenzfall $\frac{v}{\mu} = -\infty$ schliefslich deckt sich mit dem Grenzfalle $\frac{v}{\mu} = +\infty$, mit dem wir diese Diskussion begonnen haben.

Um unsere jetzige Einteilung mit der früheren in Beziehung zu setzen, fügen wir das nachfolgende Schema bei, welches ohne weitere Erklärung verständlich sein wird:

Retrograde,			Progressive Präcession
Peri-	Anti-	Hypo-	Epi-Cykloidenbewegung

$-\infty \leftarrow -\frac{1}{\cos\vartheta}$ $\qquad -\cos\vartheta$ $\qquad 0$ $\qquad \rightarrow +\infty$

Es erübrigt nur noch ein Wort über die Grenzfälle $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ zu sagen.

Wenn $\vartheta = 0$, fällt die Figurenaxe mit der Vertikalen zusammen, hat also eine feste Richtung im Raume und ist gleichzeitig Drehungsaxe. *Der Kreisel rotiert mit konstanter Geschwindigkeit um diese Axe; die auf einander abrollenden Kegel sind beide unendlich dünn.* Die Lage der Knotenlinie in der Äquatorebene ist unbestimmt, desgleichen die Werte von v und μ.

Hosted by Google

In dem anderen Grenzfalle $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ beschreibt die Figurenaxe die Horizontalebene. Das zweite und vierte unserer obigen Intervalle kommt dabei in Fortfall; die Bewegung ist entweder *epi-* oder *anti-cykloidisch.* —

Wir sind auf die reguläre Präcession um so lieber eingegangen, weil uns eine geringe Modifikation des Begriffes gestattet, jede beliebige Bewegung des Kreisels für einen bestimmten Zeitpunkt als eine geeignete Präcessionsbewegung aufzufassen. Die Modifikation des Begriffes besteht darin, dafs wir von der regulären (oder gleichförmigen) Präcession zn einer *gleichförmig beschleunigten Präcession* übergehen. Wir verstehen darunter eine Bewegung, welche sich hinsichtlich der successiven Richtungen der Drehungsaxe ebenso verhält, wie eine reguläre Präcession, welche sich aber hinsichtlich der Gröfse der Drehung dadurch von jener unterscheidet, dafs diese Gröfse proportional mit der Zeit anwächst. Die Kegel der Polhodie und Herpolhodie sind bei dieser Bewegung wieder einfache Kreiskegel; dagegen sind die entsprechenden Kurven keine Kreise, sondern spiralförmige Linien, welche sich mit immer weiter werdenden Windungen um die Kreiskegel herumziehen.

Sei nun eine beliebige Bewegung durch ihre Polhodie- und Herpolhodie-Kegel und Kurven gegeben. Wir haben im ersten Paragraphen gesehen, dafs wir jede Bewegung des Kreisels für den einzelnen Augenblick durch eine *einfache Rotation* um die instantane Drehungsaxe ersetzen können. *Diese ersetzt die gegebene Bewegung sowohl hinsichtlich der Geschwindigkeitsrichtung wie hinsichtlich der Geschwindigkeitsgröfse aller einzelnen Massenpunkte des Kreisels für einen bestimmten Zeitpunkt, oder, wie wir sagen können, sie approximiert sie von der ersten Ordnung.*

In entsprechender Weise behaupten wir: *Durch eime gleichförmig beschleunigte Präcession können wir jede beliebige Bewegung des Kreisels nach Richtung und Gröfse der Bewegung von der zweiten Ordnung d. h. in zwei benachbarten Zeitmomenten approximieren.*

Um dieses einzusehen, konstruieren wir uns zu den gegebenen Kegeln der Polhodie und Herpolhodie diejenigen Kreiskegel hinzu, welche jene längs der instantanen Drehungsaxe oskulieren. Wir können sie als *Krümmungskegel* bezeichnen, da sie für uns genau dieselbe Rolle spielen, wie die Krümmungskreise in der Kurventheorie. Wir betrachten ferner die Polhodie- und Herpolhodiekurve der gegebenen Bewegung. Diese bestimmen mittelst der Richtung, in welcher sie durch den Endpunkt des instantanen Drehungsvektors hindurchlaufen, eine bestimmte Änderungsgeschwindigkeit für die Länge des Drehungsvektors in dem

Hosted by Google

betrachteten Zeitpunkte. Wir konstruieren uns nun auf den Krümmungskegeln je eine neue Polhodie- und Herpolhodiekurve, welche dieselbe Änderungsgeschwindigkeit konstant aufweist. Die so entstehenden Spiralkurven berühren die Polhodie- und Herpolhodiekurve der gegebenen Bewegung in dem betrachteten Zeitpunkte. Wickeln wir nun die beiden Krümmungskegel so aufeinander ab, dafs die Drehgeschwindigkeit in jedem Momente der durch unsere Polhodie- oder Herpolhodiekurve bestimmten Länge des Drehungsvektors proportional ist, so erhalten wir eine gleichförmig beschleunigte Präcession, welche die gegebene Bewegung sowohl hinsichtlich der Geschwindigkeitsrichtung wie der Geschwindigkeitsgröfse sämmtlicher Kreiselpunkte von der zweiten Ordnung approximiert. In der That stimmt die Lage und Gröfse des Drehungsvektors bei der vorgegebenen Bewegung und bei unserer gleichförmig beschleunigten Präcession in zwei benachbarten Zeitmomenten überein.

Wenn es uns nur darauf angekommen wäre, die Geschwindigkeits*richtung* der wirklichen Bewegung wiederzugeben, wenn wir also von der Geschwindigkeits*gröfse* absehen wollten, so hätten wir schon mit einer *regulären* Präcession auskommen können, welche sich aus irgendwelcher *gleichförmigen* Abwickelung unserer Krümmungskegel ergiebt.

§ 7. Exkurs über die Quaternionentheorie.

Wir können dieses Kapitel nicht schliefsen, ohne auf den Zusammenhang hinzuweisen, in dem die vorhergehenden Erörterungen mit der Theorie der Hamiltonschen Quaternionen stehen. Trotzdem diese Theorie nicht mehr jung ist*), gehen die Ansichten über ihren Wert bis heute stark auseinander. Der Grund hiervon dürfte darin zu suchen sein, dafs die Vertreter der Quaternionentheorie ihre Lehren meistens einseitig und mit einem metaphysischen Anfluge behaftet darstellen, wobei die einfache geometrische Deutung, welche man den Operationen ihres Kalkuls geben kann, nicht immer genügend hervortritt. Wir hoffen in dieser Hinsicht durch die folgende Darstellung, welche sich dem Vorangehenden ungezwungen anpafst, zur Klärung der Ansichten einen Beitrag liefern zu können, und thun dieses um so lieber, als die Quaternionentheorie, wie wir unten sehen werden, als speziellen Fall die sog. *Vektorenrechnung* umfafst, und als letztere für viele Probleme der modernen Physik ein bequemes und allgemein übliches Ausdrucksmittel

*) Hamiltons grundlegendes Werk: Lectures on Quaternions stammt aus dem Jahre 1853; 1866 folgten die Elements of Quaternions (deutsch von Glan).


Hosted by Google

geworden ist, von dem wir selbst mannigfachen Gebrauch machen werden. —

Als „Quaternionengrößsen“ haben wir früher vier Parameter A, B, C, D bezeichnet, welche wir bei der analytischen Darstellung der Drehungen um einen festen Punkt einführten. Es sind dieses spezielle Fälle derjenigen Größsen, welche wir weiterhin mit A, B, C, D bezeichnen werden. Um zu letzteren zu gelangen, machen wir folgende Überlegung:

Wir betrachten *eine Operation, welche sich aus einer Drehung um O und einer Ähnlichkeitstransformation mit dem Zentrum O zusammensetzt.* Die Drehung ist durch die Richtung der Drehungsaxe und die Gröfse des Drehungswinkels bestimmt und möge wie früher (vgl. pag. 36) durch die Winkel a, b, c und $\frac{\omega}{2}$ charakterisiert werden; der Ähnlichkeitstransformation kommt ein gewisses Vergröfserungsverhältnis zu, welches wir mit T bezeichnen wollen. Für die so entstehende zusammengesetzte Operation schlagen wir den abkürzenden Ausdruck *Drehstreckung* vor. Durch unsere Drehstreckung wird jeder Punkt XYZ in einen Punkt xyz übergeführt. Die Beziehung zwischen den Koordinaten beider Punkte ist ganz ähnlich wie im Falle der reinen Drehung. Wir haben, nachdem wir aus XYZ durch die *Drehung* einen Punkt $x'y'z'$ erhalten haben, nur noch die Koordinaten des letzteren mit dem Vergröfserungsverhältnisse T zu multiplizieren, um zu dem Punkte xyz zu gelangen, welcher das Resultat der *Drehstreckung* darstellt. Infolgedessen würde in dem Drehungsschema von pag. 22 zu jedem Koeffizienten der Faktor T hinzuzufügen sein. Wir können aber auch jenes Schema direkt als Ausdruck der Drehstreckung ansehen, wenn wir die Bedeutung der Parameter A, B, C, D ein wenig gegen früher abändern. *Wir definieren nämlich* (im Gegensatz zu den Gl. (14) von pag. 38) *die A, B, C, D jetzt durch die folgenden Ausdrücke:*

$$(1) \qquad \begin{aligned} A &= \sqrt{T} \sin\frac{\omega}{2}\cos a, \\ B &= \sqrt{T} \sin\frac{\omega}{2}\cos b, \\ C &= \sqrt{T} \sin\frac{\omega}{2}\cos c, \\ D &= \sqrt{T} \cos\frac{\omega}{2}. \end{aligned}$$

Die Transformationsformeln der Drehstreckung sind daraufhin in dem mit dem früher angeschriebenen identischen Schema enthalten:

Hosted by Google

(2)

	X	Y	Z
x	$D^2+A^2-B^2-C^2$	$2(AB-CD)$	$2(AC+BD)$
y	$2(AB+CD)$	$D^2-A^2+B^2-C^2$	$2(BC-AD)$
z	$2(AC-BD)$	$2(BC+AD)$	$D^2-A^2-B^2+C^2$

Der Unterschied zwischen der jetzigen und der früheren Definition der A, B, C, D besteht darin, daſs diese Gröſsen jetzt *frei veränderliche Parameter* sind, während sie früher durch die Relation von pag. 21

(3) $$A^2+B^2+C^2+D^2=1$$

verbunden waren. Wir können sagen: *Zu jedem beliebig vorgegebenen Wertsystem A, B, C, D gehört jetzt eine bestimmte Drehstreckung.* Den Definitionsgleichungen (1) zufolge berechnen wir nämlich aus den absoluten Werten der A, B, C, D das Vergröſserungsverhältnis der Drehstreckung zu

(4) $$A^2+B^2+C^2+D^2=T,$$

während sich aus den Verhältnissen $A:B:C:D$ Axe und Drehungswinkel der Drehstreckung eindeutig ergeben.

Umgekehrt gehört auch zu jeder Drehstreckung ein ganz bestimmtes Parametersystem A, B, C, D, vorausgesetzt, daſs wir uns den Drehungswinkel ω nicht nur schlechtweg, d. h. modulo 2π gegeben denken, sondern daſs wir, wie oben verabredet, auch $\frac{\omega}{2}$ in bestimmter Weise modulo 2π festlegen.

Wir fragen sodann nach den Formeln für die *Zusammensetzung zweier Drehstreckungen.* Sei eine erste Drehstreckung durch die Parameter A, B, C, D, eine zweite durch A', B', C', D' gegeben. Das Resultat beider werde mit A'', B'', C'', D'' bezeichnet. Offenbar bekommen wir die resultierende Drehstreckung, indem wir die zugehörigen Drehungen einerseits, die Streckungen andrerseits einzeln zusammensetzen. Die Formeln für die Zusammensetzung zweier Drehungen haben wir pag. 33 in den Quaternionengröſsen angeschrieben. Die Zusammensetzung zweier Streckungen geschieht nach der einfachen Formel

$$T''=TT'.$$

Mithin lauten die Zusammensetzungsformeln für Drehstreckungen bei der neuen Bedeutung der Parameter A, B, C, D formal genau ebenso wie die für Drehungen. Wir haben:

Hosted by Google

$$(5)\qquad \begin{cases} A'' = AD' + BC' - CB' + DA', \\ B'' = -AC' + BD' + CA' + DB', \\ C'' = AB' - BA' + CD' + DC', \\ D'' = DD' - AA' - BB' - CC'. \end{cases}$$

Wir betrachten nun die vorangehenden Formeln im Lichte der Quaternionentheorie. Als ursprüngliche Definition des Wortes Quaternion legen wir unsern Begriff der Drehstreckung zu Grunde: *Eine Quaternion bedeutet nichts anderes als die Operation der Drehstreckung.* Sie ist eindeutig bestimmt durch die Gröſse der Streckung (T), durch die Axe der Drehung (a, b, c) und die Gröſse des *halben* Drehungswinkels $\left(\frac{\omega}{2}\right)$.

Der Quaternion kommen hiernach vier „Komponenten" A, B, C, D zu. Um letztere auch äuſserlich als etwas Zusammengehöriges erscheinen zu lassen, fassen wir sie mittelst „dreier imaginärer Einheiten" i, j und k in einen symbolischen Ausdruck zusammen. Wir schreiben hiernach die Quaternion als eine „viergliedrige komplexe Zahl" folgendermaſsen:

$$(6)\qquad Q = iA + jB + kC + D.$$

Die Einführung der imaginären Einheiten i, j, k ist von unserem Standpunkte aus natürlich etwas rein konventionelles; sie dient lediglich dazu, die Parameter A, B, C, D gewissermaſsen als benannte Gröſsen erscheinen zu lassen. Bei ihrer ursprünglichen Einführung durch Hamilton lag die Sache anders. Hamilton ging darauf aus, die gewöhnlichen komplexen Zahlen zu verallgemeinern. Deshalb war für ihn die obige Schreibweise etwas wesentlicheres.

Wir erwähnen zunächst einige Kunstausdrücke. Die Gröſse T bezeichnet man nach Hamilton als den *Tensor der Quaternion.* Hiernach können wir sagen: *Eine gewöhnliche Drehung ist eine Einheitsquaternion* (d. h. eine *Quaternion von dem Tensor* 1).

Ferner bezeichnen wir den unbenannten Term D in dem Ausdrucke (6) als den *skalaren Teil der Quaternion.* Dem Terme D kommt nämlich eine gewisse numerische Gröſse $\sqrt{T}\cos\frac{\omega}{2}$ zu, welche sich durch Messung auf irgend welcher Skala festlegen läſst und keine besondere Orientierung im Raume besitzt. Sodann heiſst der benannte Term $iA + jB + kC$ der *vektorielle Teil der Quaternion.* Dieser Term hat nämlich den Charakter eines Vektors, da ihm gleichzeitig eine gewisse Axe (gegeben durch die Winkel a, b, c) und eine gewisse Gröſse $\left(\text{gegeben durch das Produkt } \sqrt{T}\sin\frac{\omega}{2}\right)$ zukommt.

Betrachten wir noch speziell eine Quaternion, welche sich auf ihren vektoriellen Teil reduziert. Es ist dieses nach den Gleichungen



(1) eine Drehstreckung von dem Drehungswinkel $\omega = \pi$; sie besteht aus einer Streckung und einer Umklappung des Raumes um die Axe a, b, c. Wir wollen dafür das Wort *Wendestreckung* benutzen. Andrerseits besitzt eine solche Quaternion durchaus den Charakter eines Vektors; ihre Komponenten A, B, C sind direkt die Komponenten einer auf der Axe a, b, c aufgetragenen Strecke von der Länge $\sqrt{T}$. Wir können also sagen: *Vektoren treten in der Quaternionentheorie als Wendestreckungen auf.*

Einen Vektor (V) liefert uns z. B. die Verbindung eines beliebigen Punktes (XYZ) mit dem Anfangspunkte O. Als Wendestreckung aufgefaſst können wir ihn so darstellen:

(7) $$V = iX + jY + kZ. —$$

Bei der Einführung der Quaternionenbezeichnung besteht nun weiterhin die Absicht, mit den symbolischen Ausdrücken von der Form (6) Rechnungen vorzunehmen, ähnlich wie mit den gewöhnlichen komplexen Zahlen. Vorbedingung hierzu ist, daſs man Regeln für das Rechnen mit Quaternionen festsetzt. An sich könnten solche Regeln natürlich willkürlich angenommen werden. Indessen wird man zweckmässigerweise darauf ausgehen, den Quaternionenkalkul so einzurichten, daſs er sonst übliche Operationen umfaſst.

Wir definieren in diesem Sinne zunächst die *Addition der Quaternionen*, die für uns allerdings nur beiläufig in Betracht kommt. Dabei lassen wir uns von dem Prinzipe leiten, daſs die Addition der Quaternionen in dem speziellen Falle der Wendestreckungen mit der gewöhnlichen Addition der Vektoren, d. h. mit der Parallelogrammkonstruktion zusammenfällt. Alsdann liegt folgende Festsetzung nahe:

Man addiert zwei Quaternionen, indem man die skalaren Teile einerseits, die vektoriellen andrerseits für sich addiert, erstere im gewöhnlichen algebraischen Sinne, letztere nach der Regel der geometrischen Addition. Ist also neben Q (s. Gl. (6)) eine zweite Quaternion

$$Q' = iA' + jB' + kC' + D'$$

gegeben, so bedeutet ihre Summe Q'' die folgende Quaternion

$$Q'' = Q + Q' = i(A + A') + j(B + B') + k(C + C') + (D + D').$$

Dies Verfahren kann übrigens auch als Verallgemeinerung der Addition der gemeinen zweigliedrigen komplexen Zahlen angesehen werden.

Sodann definieren wir ein Verfahren zur *Multiplikation der Quaternionen.* Das Prinzip, welches uns hierbei leiten wird, soll die geometrische Vorstellung der Drehstreckungen sein. Wir setzen fest:

Man multipliziert zwei Quaternionen, indem man die zugehörigen Drehstreckungen nach den früheren Regeln zusammensetzt.


Hosted by Google

Ist also Q eine erste, Q' eine zweite Quaternion, so soll ihr Produkt

$$Q'' = Q\,Q'$$

zu Komponenten gerade diejenigen Gröſsen A'', B'', C'', D'' haben, welche durch die Gleichungen (5) bestimmt werden. Da in diesen Gleichungen die Komponenten von Q und Q' in unsymmetrischer Weise vorkommen, so wird das Resultat der Multiplikation von der Reihenfolge der Faktoren abhängig sein. Daher der Satz:

Die Multiplikation der Quaternionen ist keine kommutative Operation.

Dieser Satz ist in unserer Auffassung ein unmittelbarer Ausfluſs der mehrfach hervorgehobenen Thatsache, daſs bei endlichen Drehungen das Resultat mehrerer Drehungen von der Reihenfolge der Teildrehungen abhängt.

Wir können dem somit festgelegten Multiplikationsgesetze noch einen anderen bemerkenswerten Ausdruck geben. Führen wir nämlich das Produkt $Q\,Q'$ rein formal aus, wie wenn es sich um die Multiplikation gewöhnlicher mehrgliedriger algebraischer Ausdrücke handelt, so treten dabei Terme mit den Faktoren $i^2, ij, j^2, \ldots$ auf. Soll nun der so erhaltene Ausdruck mit dem obigen Produkte Q'' übereinstimmen, so müssen wir über die Bedeutung jener Faktoren folgendes festsetzen. *Es sei:*

(8) $$i^2 = j^2 = k^2 = -1,$$

(9) $$ij = k, \quad jk = i, \quad ki = j$$

und

(10) $$ji = -k, \quad kj = -i, \quad ik = -j.$$

Alsdann führt die formale Ausrechnung des Produktes $Q\,Q'$ genau auf die Gleichungen (5) zurück*).

Bemerken wir noch, daſs die vorstehenden Gleichungen (9) und (10), welche übrigens nicht von einander unabhängig sind, die Nichtver-

*) Übrigens sind die Zusammensetzungsformeln (5) und also die Multiplikationsformeln der Quaternionen, wenigstens im Falle $T = 1$, im Prinzip schon vor Hamilton bekannt gewesen; sie decken sich mit den Formeln, welche Rodrigues in Liouville's Journal (1. sér.) V, 1841 für die Zusammensetzung der Drehungen angegeben hat. Um dies einzusehen, führe man statt der Quaternionenkomponenten selbst ihre Verhältnisse ein durch die Proportion

$$A : B : C : D = \lambda : \mu : \nu : 1.$$

Diese Gröſsen λ, μ, ν kommen zur Bezeichnung der einzelnen Drehung schon bei Euler vor; sie werden (im Gegensatz zu den φ, ψ, ϑ) als *Eulers symmetrische Drehungsparameter* bezeichnet. Schreibt man nun die Gleichungen (5) in die λ, μ, ν um, indem man mit der letzten dieser Gleichungen in die vorangehenden hineindividiert, so ergeben sich die Formeln von Rodrigues.

tauschbarkeit der Faktoren eines Quaternionenproduktes von neuem in Evidenz setzen. Offenbar können wir die Einheiten i, j und k ihrerseits als spezielle Quaternionen auffassen und zwar geometrisch als Wendestreckungen vom Tensor 1, d. h. als Umklappungen bez. um die x, y und z-Axe. Die Formeln (8), (9) und (10) ergeben sich dann leicht geometrisch, allerdings zunächst nur bis auf das Vorzeichen. Sie sagen nämlich einfach aus: Das Resultat zweier Umklappungen um dieselbe Axe ist die Identität; zwei Umklappungen um zwei zu einander rechtwinklige Axen ergeben eine Umklappung um das gemeinsame Lot der beiden Axen. Wünscht man auch das Vorzeichen richtig zu treffen, so mufs man nach pag. 36 u. ff. von der Betrachtung des ganzen zu der des halben Drehungswinkels übergehen. Alsdann erkennt man: Es wird $i^2 = -1$, weil es sich bei i^2 um eine volle Umdrehung handelt, deren halber Drehungswinkel modulo 2π gleich π (und nicht gleich Null) ist. Übrigens erinnern die Formeln (8) an die Gleichung $i^2 = -1$ aus der Theorie der gewöhnlichen komplexen Zahlen. —

Etwas näher gehen wir speziell auf die Multiplikation der Wendestreckungen, d. h. auf *Vektorenprodukte* ein, deren Benutzung uns später gelegentlich gute Dienste leisten wird. Gegeben seien zwei Vektoren v und v' durch die Koordinaten ihrer Endpunkte x, y, z bez. x', y', z'. Wir bilden dann

$$vv' = (ix + jy + kz)(ix' + jy' + kz').$$

Die Multiplikationsregeln (8), (9) und (10) liefern als Resultat eine Quaternion, nämlich

$$vv' = i(yz' - zy') + j(zx' - xz') + k(xy' - yx') \\ - (xx' + yy' + zz').$$

Wir betrachten den skalaren und den vektoriellen Teil der so erhaltenen Quaternion einzeln. Den ersteren, negativ genommen, nennen wir das *skalare Produkt* der Vektoren v und v' (in Grassmanns Terminologie als „inneres Produkt“ zu bezeichnen); der letztere heifse das *vektorielle Produkt* (gleich Grassmanns „äufserem Produkte“). Das skalare Produkt möge durch das Zeichen $S(v, v')$, das vektorielle durch $V(v, v')$ charakterisiert werden.

Skalares und vektorielles Produkt lassen sich so fassen, dafs sie eine von der Wahl des Koordinatensystems, in welchem wir $x, \ldots$ und $x', \ldots$ messen, unabhängige Bedeutung haben. Es folgt dieses sofort aus ihrer Einführung als Zusammensetzungsresultat der beiden Wendestreckungen; wir erkennen es aber auch auf Grund ihrer unmittelbaren geometrischen Bedeutung. *Das skalare Produkt ist nämlich*



gleich dem Produkt aus der Länge von v in die Projektion von v' auf v, wie unmittelbar aus der Formel

$$(11) \qquad S(v, v') = xx' + yy' + zz'$$

hervorgeht. *Das vektorielle Produkt ist selbst ein Vektor, welcher senkrecht auf v und v' nach derjenigen Seite hin errichtet ist, von der aus gesehen v auf kürzestem Wege durch eine Drehung im Sinne des Uhrzeigers in v' übergeführt wird; die Länge dieses Vektors ist gleich dem Inhalte des aus v und v' zu konstruierenden Parallelogrammes.* Auch dieses wird man ohne Schwierigkeit auf Grund der Formel

$$(12) \qquad V(v, v') = i(yz' - zy') + j(zx' - xz') + k(xy' - yx')$$

verifizieren. —

Wir gehen ferner darauf aus, auch die Gleichungen (2) unter die formale Operation der Quaternionenmultiplikation einzubegreifen. In den Gleichungen (2), können wir sagen, werden zwei Vektoren

$$v = ix + jy + kz$$

und

$$V = iX + jY + kZ,$$

welche bez. durch Verbindung des Punktes x, y, z und X, Y, Z mit O entstehen, mittelst der Drehstreckung

$$Q = iA + jB + kC + D$$

zu einander in Beziehung gesetzt. Dabei nehmen wir in Übereinstimmung mit den den Gleichungen (2) zu Grunde liegenden Vorstellungen an, daſs die Richtung von v zur Richtung von V so liegt, daſs erstere in letztere durch die in Q enthaltene Drehung übergeführt wird, und ferner, daſs die Länge von V zur Länge von v sich so verhält, daſs erstere in letztere durch die in Q enthaltene Streckung übergeht. Ist also T der Tensor von Q und nehmen wir, was bequem ist und keine wesentliche Einschränkung bedeutet, die Länge von V gleich 1 an, so wird die Länge von v gleichfalls T sein. Wir fassen nun im folgenden nicht nur Q, sondern auch v und V als *Operationen*, letztere natürlich als *Wendestreckungen*, auf. Dann gelangen wir zu den Gleichungen (2) im Anschluſs an bekannte Vorstellungen der Gruppentheorie sehr elegant auf folgendem Wege:

Wir markieren uns die von O auslaufenden Axen der Wendestreckungen v und V und der Drehstreckung Q. Das Objekt, auf welches die Operationen v, V und Q auszuüben sind, repräsentieren wir — ähnlich wie gegen Ende von § 3 — durch eine um O gelegte Einheitskugel. In der Anfangslage möge sie mit K bezeichnet werden. Auf dieses Objekt üben wir zwei Serien von Operationen aus, welche zu demselben Resultate führen werden.

Hosted by Google

1) Wir unterwerfen K der Wendestreckung v, wobei K einerseits um die Axe von v umgeklappt und andrerseits im Verhältnisse von $T:1$ vergröſsert wird. Die so entstehende Kugel vom Radius T nennen wir $(K)v$. Darauf machen wir die Vergröſserung der Kugel wieder rückgängig, indem wir auf $(K)v$ eine Ähnlichkeitstransformation T^{-1} vom Vergröſserungsverhältnisse $1:T$ ausüben. So entsteht wiederum eine Einheitskugel, die wir mit $(K)v\,T^{-1}$ bezeichnen. Wir hätten übrigens $(K)v\,T^{-1}$ auch aus K durch eine bloſse Umklappung um die Richtung von v erhalten können.

2) Andrerseits unterwerfen wir K successive der Drehstreckung Q, der Wendestreckung V und der „inversen Drehstreckung Q^{-1}“. Unter letzterem Worte verstehen wir diejenige Operation, welche die Operation Q gerade rückgängig macht. Diese Drehstreckung Q^{-1} hat dieselbe Axe wie Q, bewirkt dieselbe Drehung, nur im umgekehrten Sinne, und die reciproke Streckung $\frac{1}{T}\cdot$ Insbesondere führt sie die Richtung von V in die von v über.

Durch die Drehstreckung Q geht nun K zunächst in eine Kugel $(K)Q$ vom Radius T über, wobei insbesondere diejenigen Punkte, welche ursprünglich auf der Axe von v lagen, in die Axe von V zu liegen kommen. Sodann nehmen wir die Wendestreckung V vor. Hierdurch wird $(K)Q$ in eine Kugel $(K)\,Q\,V$ verwandelt, welche gegen $(K)Q$ um die Axe von V durch zwei Rechte verdreht ist und denselben Radius wie $(K)Q$ besitzt. Endlich fügen wir die Drehstreckung Q^{-1} hinzu. Diese Operation möge der Deutlichkeit halber sowohl auf $(K)\,Q\,V$ wie auf $(K)Q$ angewandt werden. Dabei entstehen aus $(K)\,Q\,V$ bez. $(K)Q$ zwei Einheitskugeln, welche bez. $(K)\,Q\,V Q^{-1}$ und $(K)\,Q Q^{-1}$ heiſsen mögen. Offenbar ist $(K)\,Q Q^{-1}$ mit der Ausgangskugel K identisch. Wir behaupten aber ferner, daſs $(K)\,Q\,V Q^{-1}$ mit unserer früheren Kugel $(K)v\,T^{-1}$ nach Gröſse und Lage übereinstimmt. In der That: durch die Operation Q^{-1} wird die gegenseitige Lage der vorher mit $(K)Q$ und $(K)\,Q\,V$ bezeichneten Kugeln nicht geändert. Wenn also $(K)Q$ in K übergeht, verwandelt sich $(K)\,Q\,V$ in eine Kugel, welche aus K durch eine Umklappung um diejenige Axe entsteht, in welche die Axe V durch die Operation Q^{-1} übergeht, d. h. durch eine Umklappung um die Axe von v.

Durch dieselbe Umklappung haben wir aber vorher $(K)v\,T^{-1}$ aus K erzeugt. Die unter 1) und 2) genannten Operationen führen also wirklich zu demselben Resultat d. h. sie geben, zusammengesetzt, dieselbe Drehungsaxe und denselben Drehungswinkel. Letzterer ist dabei zunächst nur modulo 2π bestimmt. Um zu sehen, daſs der Drehungs-

Hosted by Google

winkel auch modulo 4π derselbe ist, machen wir eine kleine Kontinuitätsbetrachtung. Wir lassen nämlich den zur Quaternion Q gehörigen Winkel $\frac{\omega}{2}$ von Null bis zu seinem definitiven Werte wachsen. Sicherlich geben im Falle $\frac{\omega}{2} = 0$ unsere Operationen 1) und 2) modulo 4π denselben Drehungswinkel. In Folge dessen wird das Gleiche auch bei stetiger Zunahme von $\frac{\omega}{2}$ stattfinden. Diese Kontinuitätsbetrachtung ist deshalb nötig, weil wir sonst in den folgenden Formeln unbestimmte Vorzeichen haben würden.

Die Gleichheit der Operationen 1) und 2) drücken wir durch die symbolische Gleichung aus:

$$(K) v T^{-1} = (K) Q V Q^{-1},$$

oder, indem wir von dem Objekte K absehen und nurmehr auf die Operationen achten:

$$v T^{-1} = Q V Q^{-1}. \quad (13)$$

— Bemerken wir noch, daſs die beiden Operationen $v T^{-1}$ und V denselben Tensor (1) und denselben Drehungswinkel (π) besitzen, und daſs sich unsere Überlegung auf irgend zwei Drehstreckungen von übereinstimmendem Tensor und Drehungswinkel ausdehnen läſst, deren Axen mittelst Q in einander übergeführt werden. —

Die Gleichung (13) kann nun ihrer Ableitung nach nichts anderes aussagen, wie die Gleichungen (2); sie muſs den Zusammenhang zwischen den Komponenten x, y, z und X, Y, Z von v und V aussprechen. In der That wird man, wenn man sich die Mühe nehmen will, die Quaternionenprodukte rechts wirklich auszurechnen, und wenn man die Faktoren von i, j und k rechts und links einander einzeln gleichsetzt, zu den Gleichungen (2) zurückgeführt*). Die Umrechnung ist aber ziemlich umständlich. Wir wollen daher folgenden einfacheren und überdies instruktiveren Weg einschlagen.

Wir fügen in (13) rechts und links die Operation Q hinzu, wodurch nichts geändert wird. So erhalten wir

$$v T^{-1} Q = Q V. \quad (14)$$

Jetzt berechnen wir mit Rücksicht auf (9), (10) und (11):

$$\begin{aligned} QV &= (iA + jB + kC + D)(iX + jY + kZ) \\ &= i(DX - CY + BZ) + j(CX + DY - AZ) + k(-BX + AY + DZ) \\ &\quad - (AX + BY + CZ). \end{aligned}$$

---

*) Dies bemerkt Cayley Philos. Magazin, Bd. 26, 1845; vgl. Ges. W. Bd. 1, pag. 123, wo die Gl. (13) zum ersten Male auftritt.

Hosted by Google

Ebenso ergiebt sich:

$$
\begin{aligned}
vQ &= (ix + jy + kz)(iA + jB + kC + D) \\
&= i(Dx + Cy - Bz) + j(-Cx + Dy + Az) + k(Bx - Ay + Dz) \\
&\quad - (Ax + By + Cz).
\end{aligned}
$$

Die Gleichung (14) zerlegt sich daher in folgende vier Gleichungen:

$$
(15) \qquad \left\{
\begin{aligned}
\frac{1}{T}(\ \ Dx + Cy - Bz) &= \ \ DX - CY + BZ, \\
\frac{1}{T}(-Cx + Dy + Az) &= \ \ CX + DY - AZ, \\
\frac{1}{T}(\ \ Bx - Ay + Dz) &= -BX + AY + DZ, \\
\frac{1}{T}(\ \ Ax + By + Cz) &= \ \ AX + BY + CZ.
\end{aligned}
\right.
$$

Diese Gleichungen besitzen eine merkwürdige Struktur; in den drei ersten bilden nämlich die Koeffizienten auf der rechten und linken Seite je eine schiefe Determinante, wobei noch die Horizontalreihen der einen mit den Vertikalreihen der anderen Determinante übereinstimmen.

Es ist nun ein Leichtes, von den Gleichungen (15) zu den im Schema (2) enthaltenen Gleichungen zu gelangen. Wir lösen die Gleichungen (15) beispielsweise nach x auf, indem wir sie der Reihe nach mit D, $-C$, B, A multiplizieren und addieren; der Koeffizient von x wird dabei

$$\frac{1}{T}(D^2 + C^2 + B^2 + A^2) = 1,$$

während die Koeffizienten von y und z gleich Null werden; wir erhalten schliefslich:

$$x = (D^2 - C^2 - B^2 + A^2)X + 2(AB - CD)Y + 2(BD + AC)Z.$$

Dies ist aber eine der in (2) enthaltenen Gleichungen. In entsprechender Weise findet man die übrigen. Wir können also sagen:

Die Transformationsgleichungen (2) *sind vom Standpunkte der Quaternionentheorie nur eine andere Schreibweise der selbstverständlichen Relation* (13).

Wie man sieht, führt unsere geometrische Definition der Drehstreckungen zu einer vollkommen klaren begrifflichen Auffassung des Quaternionenkalkuls. Sie hat überdies den Vorteil, das *Anwendungsgebiet der Quaternionen* klar zu umgrenzen. Ähnlich wie in der letzten Betrachtung, werden die Quaternionen dann am Platze sein, wenn man für die Zusammensetzung von Drehungen und Streckungen einen handlichen Algorithmus zu haben wünscht. Wir können diese Operationen als Operationen der sog. „Hauptgruppe“ der Geometrie zusammenfassen;

Hosted by Google

sie sind dadurch ausgezeichnet, dafs sie die Eigenschaften der geometrischen Figuren nur in unwesentlicher Weise, d. h. nur ihrer Gröfse und ihrem Mafsstabe nach, verändern. Darüber hinaus werden wir aber der Quaternionentheorie eine allgemeinere Bedeutung für die Mathematik nicht beimessen können, im Gegensatz zu vielen Vertretern der Theorie, welche in den Quaternionen ein für Funktionentheorie und Algebra ebenso fundamentales Hülfsmittel erblicken möchten, wie in den gewöhnlichen komplexen Zahlen. Überhaupt scheint uns der eigentliche *Quaternionenkalkul* (bei welchem Additionen und Multiplikationen von Quaternionen in beliebiger Mannigfaltigkeit mit einander verbunden werden) von nur sekundärem Interesse zu sein.

Übrigens soll mit den vorstehenden Bemerkungen nicht gesagt sein, dafs für unser Kreiselproblem, bei dem es sich ja wesentlich um die Zusammensetzung von Drehungen handelt, die Quaternionen die geeignetsten Drehungsparameter liefern. Thatsächlich besitzen für uns die Parameter $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ in analytischer, die Eulerschen Winkel φ, ψ, ϑ in geometrischer Hinsicht den Vorzug gröfserer Einfachheit. Wenn wir also keinen Grund haben werden, in den folgenden Kapiteln auf die Quaternionenrechnung zurückzukommen, so werden wir uns dagegen der Vektoranalysis mehrfach mit Vorteil bedienen. Die Addition der Vektoren hat auf Grund des Satzes vom Parallelogramm der Kräfte in der Mechanik ihre naturgemäfse Stelle. Auch die Multiplikation der Vektoren werden wir wiederholt heranziehen, da manche Formeln in der Ausdrucksweise der Vektoranalysis einen prägnanteren Sinn bekommen. —

Wie schon eingangs erwähnt, kommt unsere geometrische Definition der Quaternionen in den gewöhnlichen Darstellungen bei Hamilton und seinen Nachfolgern nicht genügend zur Geltung. Hamilton definiert vielmehr eine Quaternion als *„den Quotienten zweier Vektoren“*. Als Grundlage einer Theorie ist diese Definition kaum zweckmäfsig; denn der Ausdruck „Quotient zweier Vektoren“ bedarf seinerseits erst der Erklärung und verweist uns, falls eine solche nicht gegeben wird, lediglich auf eine unklare Analogie mit den Rechnungsregeln der gewöhnlichen Algebra. Die Bezeichnung läfst sich natürlich theoretisch rechtfertigen und hat dann sogar gewisse sogleich zu erwähnende Vorzüge; aber es scheint nicht geeignet, mit ihr zu beginnen.

Um mit der Hamiltonschen Definition einen präzisen Sinn verbinden zu können, werden wir im Anschlufs an Gl. (13) folgendermafsen verfahren:

Wir machen uns zunächst klar, dafs eine Drehstreckung Q mit einer Wendestreckung V zusammengesetzt, deren Axe zur Axe von Q

senkrecht steht, dasselbe Resultat ergiebt, wie die Aufeinanderfolge der Wendestreckung V und der inversen Drehstreckung Q^{-1} verbunden mit einer Ähnlichkeitstransformation vom Vergröfserungsverhältnisse T^2, wo T der Tensor von Q ist. In Zeichen bedeutet dieses

(16) $$QV = VQ^{-1}T^2.$$

Hierbei möge, ebenso wie pag. 62, V der Kürze halber einen Einheitsvektor, d. h. eine einfache Umklappung bedeuten. Den Beweis der Gleichung (16) wird man ähnlich wie den von (13) geometrisch erbringen können, indem man die successiven Veränderungen einer Einheitskugel K betrachtet. Ihre Richtigkeit wollen wir hier auf Grund des Quaternionenmultiplikationsgesetzes nachrechnen. Zu dem Zwecke legen wir die x-Axe in die Axe der Wendestreckung V, so dafs V einfach gleich i wird. Gleichzeitig mufs dann die erste Komponente von Q verschwinden, weil die Axe von Q nach Voraussetzung auf der von V senkrecht steht. Wir haben also

$$V = i, \quad Q = jB + kC + D.$$

Um die inverse Quaternion Q^{-1} zu finden, haben wir nach pag. 63 den Winkel $\frac{\omega}{2}$ von Q in $-\frac{\omega}{2}$, den Tensor T in $\frac{1}{T}$ zu verwandeln und die Axe ungeändert zu lassen. In Folge dessen wird

$$Q^{-1} = \frac{1}{T^2}(-jB - kC + D).$$

Die Gleichung (16) geht daher in die folgende Gleichung über

$$(jB + kC + D)i = i(-jB - kC + D),$$

welche nach (8), (9) und (10) identisch erfüllt ist.

Sodann tragen wir den Wert von VQ^{-1} aus (16) in (13) ein. So ergiebt sich

$$Tv = Q^2 V$$

oder

(17) $$Q^2 = T\frac{v}{V}.$$

Da wir annehmen, dafs V zur Axe von Q senkrecht steht, mufs auch der Vektor v, welcher ja durch die Drehstreckung Q aus V hervorgeht, senkrecht zur Axe von Q liegen. Wir bezeichnen noch das Produkt Tv mit v'; dann hat v' die Länge T^2, wenn, wie wir voraussetzen, V die Länge 1 besitzt. Ferner fassen wir Q^2 als eine neue Quaternion Q' auf; Q' hat dann offenbar dieselbe Axe wie Q, den doppelten Drehungswinkel und das Quadrat des Tensors von Q. Die Gleichung (17) geht daraufhin über in folgende:

(18) $$Q' = \frac{v'}{V}.$$

Hosted by Google

In Worte gefafst liefert diese Gleichung die Hamiltonsche Definition der Quaternionen. Wir können sagen:

Die Quaternion Q' wird in Gleichung (18) *dargestellt als Quotient zweier Vektoren v' und V, welche senkrecht zur Axe von Q' gerichtet sind, welche mit einander einen Winkel bilden, der gleich der Hälfte des Drehungswinkels von Q' ist, und deren Länge sich verhält wie der Tensor von Q' zur Einheit.*

Offenbar ist diese Definition der Quaternionen ziemlich partikulär und steht an Einfachheit unserer ursprünglichen Einführung des Begriffes nach. Andrerseits dürfen wir uns nicht verhehlen, dafs sie vor unserer Definition einen grofsen Vorzug voraus hat. Sie setzt nämlich unmittelbar in Evidenz, dafs es zur eindeutigen Festlegung der Quaternion auf den *halben* Drehungswinkel $\frac{\omega}{2}$ ankommt, während unsere Vorstellung der Drehstreckungen zunächst mit dem *ganzen* Drehungswinkel ω operiert und erst durch die einigermafsen willkürliche Festsetzung von pag. 36 mit dem halben Drehungswinkel in Beziehung gesetzt werden mufste.

Wir möchten zum Schlusse noch einen Vorzug zur Sprache bringen, der nicht ohne Grund der Quaternionentheorie und der Vektoranalysis nachgerühmt wird, nämlich die Unabhängigkeit ihrer Operationen wie ihrer Grundgebilde von dem Koordinatensystem.

Diesen Vorzug teilt die Quaternionentheorie indes nur mit jeder rationellen analytischen Geometrie (mag sie metrische Verhältnisse mit rechtwinkligen Koordinaten oder projektive Verhältnisse mit homogenen Koordinaten behandeln). Das wesentliche ist allemal, dafs man *invariant denkt,* nicht dafs man *invariant rechnet.* Es hiefse das Wesen der analytischen Geometrie verkennen, wenn man bei der Durchführung der Rechnungen prinzipiell die Koordinaten nicht explizite benutzen wollte. In Wirklichkeit thun dies die Quaternionentheoretiker auch überall, wo es ihnen nützlich scheint, nämlich allemal, wenn sie die vier Komponenten A, B, C, D einer Quaternion explizite hinschreiben.

Hosted by Google

Kapitel II.

Einführung in die Kinetik (Statik und Impulstheorie).

§ 1. Gegensatz zwischen kontinuierlich wirkenden Kräften und Stofskräften; der Impuls beim einzelnen freien Massenpunkte.

Während wir in dem vorangehenden kinematischen Kapitel von den Prinzipien der Mechanik an keiner Stelle zu sprechen Gelegenheit hatten, werden wir diese bei den nun folgenden kinetischen Betrachtungen in irgend einer Form heranzuziehen haben. Dies kann auf verschiedene Weise geschehen.

Die ursprüngliche Fassung der mechanischen Prinzipien bei Newton setzt den *Begriff der Kraft* als etwas unmittelbar Gegebenes und Verständliches voraus. Neuere Darstellungen suchen diesen Begriff vielfach aus den Grundlagen zu eliminieren und führen ihn erst nachträglich als eine bequeme abkürzende Bezeichnung in die Mechanik ein. Die Zweckmäfsigkeit des einen oder anderen Verfahrens hängt wesentlich von dem Ziele ab, welches man verfolgt. Geht man, wie Hertz in seinem schönen Werk über die „Prinzipien der Mechanik" lediglich darauf aus, ein in sich folgerichtiges, begriffliches System aufzustellen, so kann man den Kraftbegriff wohl entbehren. Will man aber, wie es in dieser Vorlesung unsere Absicht ist, ein lebendiges Erfassen der mechanischen Erscheinungen und eine schnelle Orientierung in speziellen Fragen erreichen, so scheint der Kraftbegriff schon aus psychologischen Gründen besonders wertvoll; er knüpft nämlich unmittelbar an die Thätigkeit des Menschen an, welcher in seinen Muskeln die Möglichkeit der Arbeitsleistung hat. Eine solche Arbeitsleistung ist für unsere Empfindung mit dem Gefühl der *Anstrengung* verbunden. Unwillkürlich übertragen wir diese Empfindung auch auf äufsere Bewegungsvorgänge. In dieser anthropomorphen Auffassung der äufseren Geschehnisse liegt ohne Zweifel die Wurzel des Kraftbegriffs. Wir werden denselben darum nicht zurückdrängen, sondern gerade unter diesem Gesichtspunkte in den Vordergrund rücken.

Hosted by Google

Ob auf einen Massenpunkt, der irgendwie im Raume fest gedacht werde, in einer gewissen Richtung eine Kraft wirkt, konstatieren wir, indem wir ihn in der entgegengesetzten Richtung ein wenig verschieben. Haben wir dabei eine Arbeit zu leisten (unsere Muskeln anzuspannen), so ist eine Kraft vorhanden; im anderen Falle ist der Punkt in der betr. Richtung kräftefrei. Dasselbe Verfahren kann auch zur Messung der Kraft dienen: *Wir messen eine auf einen Punkt in einer bestimmten Richtung wirkende Kraft durch das Verhältnis derjenigen Arbeit, welche wir bei einer Verschiebung des Punktes in der entgegengesetzten Richtung zu leisten haben, zu dieser Verschiebung* $\left(P = \frac{A}{l}\right)$. Ist über die Einheit der Länge und der Arbeit verfügt worden, so ist hiernach auch die Einheit der Kraft bestimmt.

Die Einheit der Länge haben wir schon pag. 11 definiert, indem wir das „absolute Maſssystem" acceptierten. *Die Einheit der Arbeit* definiert man in diesem Maſssystem bekanntlich dadurch, daſs man zunächst *die Einheit der Masse* als die eines Grammes festsetzt und sich übrigens auf die Erfahrungen beruft, die man mit frei fallenden Körpern gemacht hat (die sog. Fallgesetze). Alsdann bestimmt man etwa: Die Arbeitseinheit ist der 980, 60te Teil derjenigen Arbeit, welche man beim Heben eines Grammes um einen Centimeter unter dem 45ten Breitengrade zu leisten hat. Die Arbeit erhält hier die Dimension $\frac{m l^2}{t^2}$, die Kraft $\frac{m l}{t^2}$. Allerdings werden wir diese Definition der Arbeitseinheit von dem obigen psychologischen Standpunkte aus für ziemlich indirekt erklären müssen. Da nämlich Kräfte und Arbeiten unmittelbarer in unsere Wahrnehmung fallen, als Massen, so könnten wir verlangen, die Arbeitseinheit vor der Masseneinheit festzulegen, und könnten die Einführung eines allgemeinen Maſssystems befürworten, (welches übrigens auch von anderer Seite gelegentlich vorgeschlagen ist) in dem neben Raum und Zeit als dritte Grunddimension die Arbeit benutzt wird. Ob sich ein solches Maſssystem praktisch empfehlen würde, lassen wir hier völlig dahingestellt.

Des Weiteren unterscheidet man von altersher zwei Arten von Kräften: *kontinuierlich wirkende Kräfte* und *Stoſs-* oder *Momentankräfte.* Die soeben gegebene Regel für die Messung einer Kraft bezog sich, wie wir ausdrücklich hervorheben müssen, auf kontinuierlich wirkende Kräfte. Um die Messung der Stoſskräfte hieran anzuschlieſsen, sagen wir: *eine Stoſskraft ist äquivalent mit einer auſserordentlich groſsen kontinuierlichen Kraft, welche nur eine auſserordentlich kurze Zeit hindurch wirksam ist.*

Hosted by Google

Die Gröſse der Stoſskraft bemessen wir daraufhin durch das *Produkt der Gröſse jener kontinuierlich wirkenden Kraft in die Länge des Wirkungsintervalles* $\left([P] = \frac{ml}{t}\right)$.

Wir erinnern nun kurz an diejenigen Erfahrungsthatsachen (oder Axiome), welche die Statik der Kräfte (und zwar der kontinuierlichen wie der Stoſskräfte) beim einzelnen Massenpunkte ausmachen. Man kann diese in die eine Aussage zusammenfassen:

Das allgemeinste Kraftsystem hat beim einzelnen frei beweglichen Massenpunkte den Charakter eines von dem Punkte auslaufenden Vektors.

In diese Aussage begreifen wir sowohl den Satz vom Parallelogramm der Kräfte wie die Zerlegung der Kraft in Komponenten ein, *Kräfte sollen sich genau so addieren wie Vektoren.*

Die Vektorvorstellung einer Kraft ist uns so geläufig, daſs wir leicht unser Axiom für selbstverständlich halten und seine Tragweite unterschätzen könnten. Es ist daher vielleicht nicht überflüssig auf die unmittelbarsten Konsequenzen unseres Axioms einzugehen. Der Kraft kommt, ebenso wie dem Vektor, eine gewisse Gröſse und eine ausgezeichnete Richtung zu. Stellen wir uns nun einen Massenpunkt vor, der von beliebigen äuſseren Kräften angegriffen werden möge. Die Richtung der resultierenden Kraft ist derjenigen Richtung entgegengesetzt, in welcher wir bei einer Verschiebung die maximale Arbeit zu leisten haben. Verschieben wir andrerseits den Punkt in einer von dieser ausgezeichneten abweichenden Richtung, so ist nach unserem Grundsatz die hierbei zu leistende Arbeit gleich der vorherigen maximalen Arbeitsleistung multipliziert in den Cosinus des Winkels, welchen die jetzige mit der früheren Verschiebung einschlieſst. Insbesondere werden wir, so oft wir bei einer bestimmten Verschiebung eine gewisse Arbeit zu leisten haben, bei der entgegengesetzten Verschiebung dieselbe Arbeitsgröſse gewinnen.

Wir erinnern sodann an diejenigen Axiome, welche der Kinetik des einzelnen Massenpunktes zu Grunde liegen. Sie lauten bekanntlich: *Eine kontinuierlich wirkende Kraft ruft eine Beschleunigung des Punktes hervor, deren Richtung mit der Richtung der Kraft übereinstimmt und deren Gröſse, multipliziert in die Masse des Punktes,* (*bei Benutzung des einmal angenommenen absoluten Maſssystems*) *gleich ist der Gröſse der Kraft;* ferner: *Eine Momentankraft ruft eine momentane Geschwindigkeitsänderung hervor, deren Richtung mit der Richtung der Kraft übereinstimmt und deren Gröſse, multipliziert in die Masse des Punktes, gleich ist der Gröſse der Stoſskraft.*

Da die Geschwindigkeit und die Beschleunigung eines Punktes,

Hosted by Google

ebenso wie nach Obigem die Kraft, den Charakter eines Vektors hat, so folgt aus unserem die Gleichheit der Vektoren aussagenden Axiom sofort die Gleichheit ihrer Komponenten. Bedeutet also X bez. $[X]$ die x-Komponente einer kontinuierlichen bez. einer Stofskraft, so haben wir:

$$(1) \qquad X = m\frac{d^2x}{dt^2} \text{ etc.}, \qquad (2) \quad [X] = m\Delta\left(\frac{dx}{dt}\right) \text{ etc.}$$

Hier soll $\Delta\left(\frac{dx}{dt}\right)$ schlechtweg die Änderung des $\left(\frac{dx}{dt}\right)$ bezeichnen.

Im Übrigen lassen sich Stofskräfte auf kontinuierlich wirkende Kräfte zurückführen und umgekehrt, wie solches durch bekannte Beispiele aus der Physik dargethan wird. Z. B. denkt man sich in der kinetischen Gastheorie den kontinuierlich wirkenden Druck eines Gases gegen die Wand des Gefäfses durch das Anprallen der Gasmoleküle hervorgebracht. Man löst also den kontinuierlichen Druck in eine Reihe sehr kleiner und sehr schnell hintereinander erfolgender Einzelstöfse auf. Umgekehrt verfährt man in der Elastizitätstheorie, wenn man den Zusammenstofs zweier Kugeln näher verfolgen will. Dort ersetzt man die scheinbar momentane Stofskraft durch eine zwar sehr kurze aber doch kontinuierlich zu- und abnehmende Kraft, welche von der stofsenden zu der gestofsenen Kugel wirksam ist.

Man erkennt sofort, dafs die Gleichungen (1) und (2) bei der einen oder anderen Auffassung wechselweise in einander übergehen. Denken wir uns nämlich, wie in dem Beispiel der Gastheorie, eine Reihe von Einzelstöfsen $[X_1], [X_2], \ldots, [X_n]$ in dem sehr kleinen Zeitintervalle Δt auf einander folgen, und nehmen wir an, dafs das Verhältnis $[X_i] : \Delta t$ bei abnehmendem Δt einer endlichen Grenze X zustrebt, so erhalten wir aus (2) durch Übergang zur Grenze $\Delta t = 0$ die Gleichung (1). Gehen wir andrerseits von einer kontinuierlich wirkenden Kraft X aus, welche nur in dem Zeitintervalle Δt eine von Null verschiedene, dann aber gleich sehr bedeutende Intensität besitzt, so zwar, dafs das „Zeitintegral"

$$\int_{t_0}^{t_0+\Delta t} X\,dt$$

einen endlichen Wert $[X]$ selbst dann noch behält, wenn wir Δt zu Null abnehmen lassen, so erhalten wir aus (1) durch Integration nach t die Gleichung (2).

Da hiernach Stofskräfte und kontinuierliche Kräfte in gewissem Sinne mathematisch äquivalent sind, wird es möglich sein, die Mechanik ebensowohl auf die einen wie auf die anderen zu begründen. Beide

Hosted by Google

Methoden entsprechen je einem besonderen naturphilosophischen Standpunkte: Wer der Meinung ist, dafs in der Natur keine unstetigen Übergänge vorkommen können, wird die kontinuierlichen Kräfte bevorzugen. Wer aber die Stetigkeit in der Natur nur für scheinbar und dadurch hervorgebracht hält, dafs unsere unvollkommenen Sinnesorgane uns ein undeutliches Bild der Welt liefern, wird überall auf Stofskräfte zurückgehen wollen*). Für den Mathematiker als solchen kommen derartige Fragen nicht in Betracht; dieser wird die Vorzüge beider Methoden nach ihrer gröfseren oder geringeren mathematischen Brauchbarkeit und Bequemlichkeit abschätzen.

Von diesem Gesichtspunkte aus können wir nicht umhin, der Methode der Stofskräfte bei der Einführung in die Mechanik im allgemeinen vor der jetzt gebräuchlicheren Methode der kontinuierlichen Kräfte den Vorzug zu geben. Wir werden von dieser Methode auch da Gebrauch machen, wo es sich garnicht um plötzlich oder schnell erfolgende Änderungen des Bewegungszustandes handelt. Damit nehmen wir nur eine Darstellungsweise wieder auf, die bei den eigentlichen Begründern der Mechanik allgemein üblich war.

Im Grunde übrigens handelt es sich dabei nur darum, die Bedeutung der mechanischen Differentialgleichungen oder der Differentialgleichungen überhaupt unabhängig von der Formel, nach ihrem inneren begrifflichen Inhalte zu erfassen.

Unser Vorhaben erläutern wir zunächst an dem Beispiel des einzelnen frei beweglichen Massenpunktes.

Wir betrachten unsern Punkt an irgend einer Stelle seiner Bahn und denken uns allemal *diejenige Stofskraft* hinzu, *welche im stande ist, den Punkt an Ort und Stelle aus dem Zustande der Ruhe momentan in den der gerade vorliegenden Bewegung überzuführen.* Dieselbe Stofskraft würde der Punkt, an der betr. Stelle in seiner Bewegung plötzlich gehemmt, gegen das Hindernis auszuüben im stande sein. Diese Stofskraft nennen wir den *Impuls des Punktes* und haben fortan gewissermafsen als erstes Interesse, nicht die Bewegung des Punktes sondern die Änderung seines Impulses zu verfolgen.

Auf Grund des allgemeinen statischen Axioms können wir sagen:

Beim einzelnen freien Massenpunkte ist der Impuls ein Vektor.

Auf Grund der kinetischen Axiome können wir ferner Gröfse und Richtung dieses Vektors sofort angeben. Nach Gleichung (2) ist nämlich eine Stofskraft, welche die Geschwindigkeit 0 in die Ge-

*) Vgl. hierzu etwa L. Boltzmann: Über die Unentbehrlichkeit der Atomistik in der Naturwissenschaft, Berichte der Wiener Akademie 1896 sowie Wied. Ann. 1897.


Hosted by Google

schwindigkeit v verwandelt, der Gröfse nach gleich mv; der Richtung nach fällt sie mit der Richtung v zusammen. Wir werden also sagen:

Beim einzelnen Massenpunkte ist die Gröfse des Impulses gleich der sog. Quantität der Bewegung; die Richtung des Impulses stimmt mit der jeweiligen Fortschreitungsrichtung überein.

Mit Benutzung des so eingeführten Impulsbegriffes läfst sich die Bewegung des einzelnen Massenpunktes nunmehr besonders einfach schildern.

Wir haben zunächst den

Satz I. *Wenn keine Kräfte auf den Punkt einwirken, bleibt der Impuls nach Gröfse und Richtung im Raume konstant.* (Galileisches Trägheitsgesetz = Newtons lex prima).

Ist der Punkt dagegen äufseren Einwirkungen ausgesetzt, so können diese in momentanen Stöfsen $[P_i]$ oder in einer kontinuierlichen Kraft P bestehen. Im ersteren Falle setzen sich die Stöfse $[P_i]$ mit dem schon vorhandenen Impuls nach dem Parallelogramm der Kräfte zusammen. Im zweiten Falle konstruieren wir denjenigen Einzelstofs, welcher während des einzelnen Zeitelementes Δt der kontinuierlichen Kraft äquivalent ist; wir bilden also:

$$[P] = \int_t^{t+\Delta t} P \, . \, dt = P \, . \, \Delta t.$$

Dieser „unendlich kleine Stofs“ setzt sich wieder mit dem schon vorhandenen Impulse nach dem Parallelogramm der Kräfte zusammen.

Wir formulieren daher den

Satz II. *Wenn äufsere Kräfte auf unseren Punkt einwirken, ändert sich der Impuls so, dafs seine Änderung nach Gröfse und Richtung in jedem Momente Δt gleich dem während dieses Zeitmomentes von den äufseren Kräften hervorgerufenen (endlichen oder unendlich kleinen) Stofse ist* (Newtons lex secunda).

Diese fundamentalen Sätze übertragen sich, wie wir später sehen werden, wörtlich auf den Fall des Kreisels und mutatis mutandis auf beliebige mechanische Systeme. —

Wir fragen sodann nach *der Arbeit, welche der Impuls oder irgend eine kontinuierliche Kraft bei der Erzeugung des instantanen Bewegungszustandes zu leisten hat, d. h. nach derjenigen Arbeit, welche erforderlich ist, um den Punkt aus dem Zustande der Ruhe in den gerade vorhandenen Bewegungszustand überzuführen.* Dieselbe Arbeit vermag der Punkt umgekehrt abzugeben, wenn wir seine Bewegung plötzlich oder allmählich hemmen. Hieraus erklärt sich die Bezeichnung unseres Arbeitsquantums als der *lebendigen Kraft des Punktes.*

Hosted by Google

Offenbar beträgt die Arbeit, welche eine *kontinuierliche Kraft* (X, Y, Z) an dem Massenpunkte bei der Verrückung (dx, dy, dz) leistet

(3) $$dA = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = (Xx' + Yy' + Zz')\,dt.$$

In der That ist diese Gleichung weiter nichts, als der analytische Ausdruck für unsere ursprüngliche Definition des Kraftbegriffes.

Hier tragen wir für X, Y, Z die Werte aus Gleichung (1) ein, indem wir uns vorstellen, dafs (X, Y, Z) diejenige Kraft ist, welche die faktische Bewegung des Punktes von der Ruhe beginnend erzeugt hat. Dann lautet das Arbeitselement:

$$dA = m(x''x' + y''y' + z''z')\,dt.$$

Die Gesamtarbeit, welche eben die lebendige Kraft des Punktes ausmacht, folgt hieraus durch Integration nach der Zeit; wir erhalten so die genugsam bekannte Formel:

(4) $$T = \frac{m}{2}(x'^2 + y'^2 + z'^2).$$

Die lebendige Kraft des Punktes ist hiernach durch den jeweiligen Bewegungszustand des Punktes allein bestimmt; sie ist unabhängig davon, wie wir uns diesen Zustand entstanden denken, in welcher Weise wir also x', y', z' bez. X, Y, Z während der Erzeugung der Bewegung variieren lassen. Sie gilt daher insbesondere auch, wenn wir uns die Bewegung instantan durch den Impuls erzeugt denken, was wir jetzt thun wollen.

Nehmen wir unter dieser speziellen Voraussetzung die Berechnung der lebendigen Kraft noch einmal vor, so wird die Sache besonders anschaulich. Wir können uns zu dem Zwecke zunächst vorstellen, dafs eine Kraft (X, Y, Z) von konstantem sehr grofsen Betrage während eines sehr kleinen Intervalles Δt wirksam ist, so dafs die Geschwindigkeit (x', y', z') während dieses Intervalles *gleichmäfsig* anwächst. Aus unserem obigen Ausdruck für die Arbeit ergiebt sich dann, wenn wir die Wirkungsdauer der Kraft mit Δt bezeichnen:

$$T = \int_0^{\Delta t} dA = X\int_0^{\Delta t} x'\,dt + Y\int_0^{\Delta t} y'\,dt + Z\int_0^{\Delta t} z'\,dt.$$

Zu Anfang des Intervalles Δt ist die Geschwindigkeit des Punktes gleich Null, zum Schlufs ist sie (x', y', z') geworden. Da sie überdies von ihrem Anfangs- zu ihrem Endwerte gleichmäfsig anwächst, so bekommen die vorstehenden Zeitintegrale der rechten Seite bez. die Werte $\frac{1}{2}x'\Delta t$, $\frac{1}{2}y'\Delta t$, $\frac{1}{2}z'\Delta t$. Wir haben also:

$$T = \frac{1}{2}(Xx' + Yy' + Zz')\,\Delta t.$$



Nunmehr lassen wir Δt gegen Null abnehmen. Dann gehen die Produkte $X\Delta t$, $Y\Delta t$, $Z\Delta t$ in die Komponenten des Impulses über, welche wir mit $[X]$, $[Y]$, $[Z]$ bezeichnen:

$$[X]=\int_0^{\Delta t} X\,dt = X\Delta t, \quad [Y]=\int_0^{\Delta t} Y\,dt = Y\Delta t, \quad [Z]=\int_0^{\Delta t} Z\,dt = Z\Delta t.$$

Infolgedessen können wir den letzten Ausdruck für die lebendige Kraft folgendermaſsen schreiben:

$$(5) \qquad T=\frac{1}{2}\left([X]x'+[Y]y'+[Z]z'\right).$$

Die durch den Impuls erzeugte lebendige Kraft erscheint hier als das halbe Produkt aus der Gröſse des Impulses in die Länge des Geschwindigkeitsvektors.

Der Ausdruck (5) ist mit (4) natürlich identisch. In der That folgt aus unserer obigen Impulsdefinition sofort

$$(6) \qquad [X]=mx', \quad [Y]=my', \quad [Z]=mz'.$$

Dieselben Gleichungen können auch in der bemerkenswerten Form geschrieben werden:

$$(7) \qquad [X]=\frac{\partial T}{\partial x'}, \quad [Y]=\frac{\partial T}{\partial y'}, \quad [Z]=\frac{\partial T}{\partial z'}.$$

Hier ist bei der Ausführung der partiellen Differentiationen T in der Form (4) anzusetzen, d. h. als Funktion der Geschwindigkeitskomponenten zu schreiben.

Wir können andrerseits T auch als Funktion der Impulskomponenten auffassen. Aus den Gleichungen (4) und (6) ergiebt sich nämlich

$$(4') \qquad T=\frac{1}{2m}\left([X]^2+[Y]^2+[Z]^2\right).$$

Infolgedessen können wir den Gleichungen (7) auch noch die folgende Form geben:

$$(7') \qquad x'=\frac{\partial T}{\partial [X]}, \quad y'=\frac{\partial T}{\partial [Y]}, \quad z'=\frac{\partial T}{\partial [Z]}.$$

Bei der Bildung dieser Gleichungen ist T natürlich durch die Gleichung (4′) erklärt, d. h. als Funktion der Impulskomponenten aufgefaſst. Ob wir die eine oder die andere Auffassung der lebendigen Kraft zu Grunde legen, werden wir durch die Bezeichnung nicht besonders hervorkehren, wofern, wie hier, durch den Zusammenhang ein Miſsverständnis ausgeschlossen ist.

Neben die Gleichungen (7) und (7′) stellen wir als analytischen Ausdruck für die Kraftkomponenten X, Y, Z die folgenden Gleichungen

$$(8) \qquad X=\frac{\partial A}{\partial x}, \quad Y=\frac{\partial A}{\partial y}, \quad Z=\frac{\partial A}{\partial z},$$

Hosted by Google

welche sich aus unserer ursprünglichen Einführung des Kraftbegriffes beziehungsweise aus der Gleichung (3) ergeben*).

Dafs die lebendige Kraft bei der kräftefreien Bewegung des Punktes konstant bleibt ($dT = 0$) und dafs ihre Änderung bei der durch äufsere Kräfte beeinflufsten Bewegung gleich der von diesen Kräften geleisteten Arbeit wird ($dT = dA$), ist eine unmittelbare Folge aus unseren obigen Impulssätzen I) und II).

Die Gleichungen (7) oder die äquivalenten Gleichungen (7′) geben uns Beziehungen zwischen dem Vektor der Geschwindigkeit, dem Vektor des Impulses und dem Ausdrucke der lebendigen Kraft, welche wir folgendermafsen gemeinsam in Worte fassen:

Die Impuls-(Geschwindigkeits-)Komponenten sind die nach den Geschwindigkeits-(Impuls-)Komponenten genommenen partiellen Differentialquotienten der lebendigen Kraft, wobei wir die letztere als Funktion der Geschwindigkeits-(Impuls-)Komponenten gegeben denken.

Den Gleichungen (7) bez. (7′) stellt sich ein zweites Gleichungstripel an die Seite, welches angiebt, wie der Impuls durch die äufseren Einwirkungen abgeändert wird. Dieses Gleichungstripel ist nur der analytische Ausdruck des in dem Satze II ausgesprochenen Gesetzes. Wirkt auf unseren Punkt die kontinuierliche Kraft (X, Y, Z), so haben wir offenbar nach II bei Benutzung rechtwinkliger Koordinaten:

$$\frac{d[X]}{dt} = X, \quad \frac{d[Y]}{dt} = Y, \quad \frac{d[Z]}{dt} = Z. \tag{9}$$

Die Formeln (7), (8) *und* (9) *sind die sehr bekannten fundamentalen Gleichungen der Punktmechanik in rechtwinkligen Koordinaten.* —

Wir wollen uns nun fragen, wie sich diese Gleichungen ändern, wenn wir statt der *rechtwinkligen Koordinaten* irgend welche *allgemeine Koordinaten* einführen. Allerdings liegt beim einzelnen frei beweglichen Massenpunkte kein Grund vor, von den rechtwinkligen Koordinaten abzugehen. Die folgenden Betrachtungen sollen uns aber als Vorbereitung für schwierigere Fälle dienen, in denen wir mit den rechtwinkligen Koordinaten nicht auskommen.

Wir wollen die Lage eines Punktes im Raume statt durch drei zu einander senkrechte Ebenen vielmehr durch drei beliebige Flächen gegeben denken, als Koordinaten also nicht die Gröfsen x, y, z sondern irgend drei Funktionen $\varphi = \varphi(x, y, z)$, $\psi = \psi(x, y, z)$, $\vartheta = \vartheta(x, y, z)$ betrachten. Statt der gewöhnlichen Geschwindigkeitskoordinaten x', y', z'

*) Man bemerke, dafs die Bedeutung der Differentialzeichen in (8) von der üblichen Bedeutung abweicht, insofern als dieselben zwar „Differentialquotienten" sind, aber nicht „Ableitungen" einer Funktion der Koordinaten zu sein brauchen, weil der Ausdruck (3) im allgemeinen kein vollständiges Differential vorstellt.


Hosted by Google

werden wir dementsprechend die „allgemeinen Geschwindigkeitskoordinaten“ φ', ψ', ϑ' einführen, d. h. die Differentialquotienten unserer Gröſsen φ, ψ, ϑ nach der Zeit.

Unmittelbar erkennt man, wenn man die Definitionsgleichungen der φ, ψ, ϑ nach t differentiiert, daſs *die neuen Geschwindigkeitskoordinaten lineare Funktionen der alten sind und umgekehrt.* Insbesondere wollen wir die Koeffizienten der φ', ψ', ϑ' in den linearen Ausdrücken für x', y', z' mit a_{ik} bezeichnen, so daſs

$$(10)\qquad \begin{cases} x' = a_{11}\varphi' + a_{12}\psi' + a_{13}\vartheta', \\ y' = a_{21}\varphi' + a_{22}\psi' + a_{23}\vartheta', \\ z' = a_{31}\varphi' + a_{32}\psi' + a_{33}\vartheta'; \end{cases}$$

die Bedeutung der a_{ik} ist ersichtlich die folgende:

$$(11)\qquad a_{11} = \frac{\partial x}{\partial \varphi}, \quad a_{12} = \frac{\partial x}{\partial \psi}, \cdots a_{21} = \frac{\partial y}{\partial \varphi}.$$

Es wird nun aber ferner nötig, auch *entsprechend verallgemeinerte Koordinaten der Kraft und des Impulses* zu betrachten. Um diese zu definieren, gehen wir auf unsere ursprüngliche Kraftdefinition zurück. Wir fragen nach der Arbeit, welche wir bei einer unendlich kleinen Änderung der Koordinate φ und bei festgehaltenen Werten von ψ und ϑ zu leisten haben. Das Verhältnis dieser Arbeit zu der Änderung von φ definiere uns die φ-Koordinate der Kraft. Bezeichnen wir sie mit Φ, so haben wir hiernach

$$\Phi = \frac{\partial A}{\partial \varphi};$$

(wobei der Sinn dieses Differentiationszeichens durch die Bedingungen $\psi = \text{const.}$, $\vartheta = \text{const.}$ definiert wird); entsprechende Bedeutung mögen die Kraftkoordinaten Ψ und Θ haben. Der Ausdruck für die Arbeit bei einer beliebigen unendlich kleinen Verrückung $(d\varphi, d\psi, d\vartheta)$ unseres Massenpunktes wird daher

$$(12)\qquad dA = \Phi\, d\varphi + \Psi\, d\psi + \Theta\, d\vartheta = (\Phi\varphi' + \Psi\psi' + \Theta\vartheta')\, dt.$$

Unsere Definition der verallgemeinerten Kraftkoordinaten bringt es also mit sich, daſs der Ausdruck für die Arbeit bei Einführung allgemeiner Koordinaten genau die frühere Form (3) *beibehält.*

Wir können daraufhin leicht die $\Phi\Psi\Theta$ durch die XYZ ausdrücken. Ersetzen wir nämlich in (3) die x', y', z' vermöge der Gleichungen (10) durch ihre Werte in den φ', ψ', ϑ' und ordnen nach den letzteren Gröſsen, so werden die Φ, Ψ, Θ bez. gleich den Koeffizienten dieser Gröſsen. Wir erhalten also


Hosted by Google

$$(13) \qquad \begin{cases} \Phi = a_{11} X + a_{21} Y + a_{31} Z, \\ \Psi = a_{12} X + a_{22} Y + a_{32} Z, \\ \Theta = a_{13} X + a_{23} Y + a_{33} Z. \end{cases}$$

Die neuen Kraftkoordinaten drücken sich also durch die alten ganz ähnlich aus wie die alten Geschwindigkeitskoordinaten durch die neuen, nämlich so, dafs die Koeffizienten jener Substitution aus den Koeffizienten dieser durch Vertauschung von Horizontal- und Vertikalreihen hervorgehen. Wir sprechen dieses kurz so aus, dafs wir sagen:

Die Kraftkoordinaten verhalten sich zu den Geschwindigkeitskoordinaten kontragredient.

Ebenso wie die Koordinaten einer kontinuierlichen Kraft verhalten sich die Koordinaten des Impulses, welchen wir ja als Grenzfall einer kontinuierlichen Kraft auffassen können; ebenso ferner wie der Ausdruck für die unendlich kleine Arbeit transformiert sich der Ausdruck für die lebendige Kraft, welche wir als ein gewisses endliches Arbeitsquantum definiert haben.

Wir bekommen daher

$$(14) \qquad \begin{cases} [\Phi] = a_{11}[X] + a_{21}[Y] + a_{31}[Z], \\ [\Psi] = a_{12}[X] + a_{22}[Y] + a_{32}[Z], \\ [\Theta] = a_{13}[X] + a_{23}[Y] + a_{33}[Z] \end{cases}$$

und

$$(15) \qquad T = \frac{1}{2}([\Phi]\varphi' + [\Psi]\psi' + [\Theta]\vartheta').$$

Auf Grund der Gleichungen (14) werden wir ohne Schwierigkeit die folgenden Beziehungen verifizieren, in welche wir uns T als Funktion der Geschwindigkeitskoordinaten ausgedrückt denken:

$$(16) \qquad [\Phi] = \frac{\partial T}{\partial \varphi'}, \qquad [\Psi] = \frac{\partial T}{\partial \psi'}, \qquad [\Theta] = \frac{\partial T}{\partial \vartheta'}.$$

In der That folgt aus $T = \frac{m}{2}(x'^2 + y'^2 + z'^2)$ z. B.:

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi'} = mx' \frac{\partial x'}{\partial \varphi'} + my' \frac{\partial y'}{\partial \varphi'} + mz' \frac{\partial z'}{\partial \varphi'} = [X]a_{11} + [Y]a_{21} + [Z]a_{31} = [\Phi].$$

Die Gleichungen (16) sind unseren früheren Relationen (7) genau analog. *Die letzteren ändern ihre Form bei Einführung allgemeiner Koordinaten überhaupt nicht.*

Dasselbe gilt auch von den Gleichungen (7'); wir überzeugen uns davon in Kürze folgendermafsen.

Die Gleichungen (10) geben, nach den $\varphi', \ldots$ aufgelöst:



$$(10') \qquad \begin{cases} \varphi' = A_{11}x' + A_{21}y' + A_{31}z', \\ \psi' = A_{12}x' + A_{22}y' + A_{32}z', \\ \vartheta' = A_{13}x' + A_{23}y' + A_{33}z', \end{cases}$$

wo die A_{ik} allgemein die durch die Determinante der a_{ik} dividierten Unterdeterminanten dieser Determinante bedeuten. Ebenso ergiebt sich aus den Gleichungen (14):

$$(14') \qquad \begin{cases} [X] = A_{11}[\Phi] + A_{12}[\Psi] + A_{13}[\Theta], \\ [Y] = A_{21}[\Phi] + A_{22}[\Psi] + A_{23}[\Theta], \\ [Z] = A_{31}[\Phi] + A_{32}[\Psi] + A_{33}[\Theta]. \end{cases}$$

Denken wir uns nun T durch die $[\Phi]$, $[\Psi]$, $[\Theta]$ ausgedrückt, indem wir von der Gleichung (4′) ausgehend für $[X]$, $[Y]$, $[Z]$ die Werte aus (14′) eintragen und bilden wir, indem wir $[\Psi]$ und $[\Theta]$, sowie φ, ψ, ϑ festhalten, $\frac{\partial T}{\partial [\Phi]}$. Dann haben wir mit Rücksicht auf (7′) und (14′)

$$\frac{\partial T}{\partial [\Phi]} = \frac{\partial T}{\partial [X]} \cdot \frac{\partial [X]}{\partial [\Phi]} + \frac{\partial T}{\partial [Y]} \cdot \frac{\partial [Y]}{\partial [\Phi]} + \frac{\partial T}{\partial [Z]} \cdot \frac{\partial [Z]}{\partial [\Phi]} = A_{11}x' + A_{21}y' + A_{31}z'.$$

Hieraus folgt aber nach (10′), wenn wir sogleich die analogen Gleichungen hinzufügen:

$$(16') \qquad \varphi' = \frac{\partial T}{\partial [\Phi]}, \quad \psi' = \frac{\partial T}{\partial [\Psi]}, \quad \vartheta' = \frac{\partial T}{\partial [\Theta]}.$$

Wollen wir die Gleichungen (16) und (16′) als Satz formulieren, so können wir uns wörtlich der Ausdrucksweise von pag. 77 bedienen.

Sodann haben wir nach (12) als Analogon zu den Gleichungen (8):

$$(17) \qquad \Phi = \frac{\partial A}{\partial \varphi}, \quad \Psi = \frac{\partial A}{\partial \psi}, \quad \Theta = \frac{\partial A}{\partial \vartheta}.$$

Wegen der Bedeutung dieser Differentialzeichen vgl. die Anmerkung auf pag. 77.

Es wird gut sein, auch die Gleichungen (9) in allgemeine Koordinaten φ, ψ, ϑ umzuschreiben. Wir multiplizieren zu dem Zwecke diese Gleichungen der Reihe nach zunächst mit a_{11}, a_{21}, a_{31} und addieren sie. Dann entsteht auf der rechten Seite nach (13) die Komponente Φ der äufseren Kraft. Die linke Seite schreiben wir so:

$$\frac{d}{dt}(a_{11}[X] + a_{21}[Y] + a_{31}[Z]) - \left([X]\frac{da_{11}}{dt} + [Y]\frac{da_{21}}{dt} + [Z]\frac{da_{31}}{dt}\right).$$

Hier ist der erste Term einfach der Differentialquotient der Impulskomponente $[\Phi]$ nach der Zeit; der zweite Term wird mit Rücksicht auf (6) und (11) gleich

$$m\left(x'\frac{\partial x'}{\partial \varphi} + y'\frac{\partial y'}{\partial \varphi} + z'\frac{\partial z'}{\partial \varphi}\right);$$

Hosted by Google

dies ist aber nichts anderes als der nach φ genommene partielle Differentialquotient der lebendigen Kraft, falls wir letztere durch die Geschwindigkeitskoordinaten φ', ψ', ϑ' ausgedrückt denken. Hiernach kommen wir zu folgendem Gesetz für die Änderung der φ-Komponente des Impulses:

$$\frac{d[\Phi]}{dt} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = \Phi. \tag{18}$$

Genau ebenso ergiebt sich

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d[\Psi]}{dt} - \frac{\partial T}{\partial \psi} &= \Psi, \\ \frac{d[\Theta]}{dt} - \frac{\partial T}{\partial \vartheta} &= \Theta. \end{aligned}\right. \tag{18}$$

Die Gleichungen (18) sagen ihrer Ableitung nach nichts anderes aus, wie die Gleichungen (9); die Einfachheit des allgemeinen Gesetzes II ist hier nur durch die Einführung der Koordinaten φ, ψ, ϑ etwas verschleiert.

Die Gleichungen (7), (8) und (9) bez. die Gleichungen (16), (17) und (18) stellen zusammengenommen die Bewegungsgleichungen des einzelnen Massenpunktes dar. Man hat in der von uns gewählten Schreibweise den einfachsten Fall der sogenannten *Lagrangeschen Gleichungen zweiter Art* vor sich. Wir kommen auf diese Gleichungen mehrfach zurück und bemerken schon hier, dafs es uns mit Hülfe eines dem obigen analogen Impulsbegriffes gelingen wird, dieselben allemal in ähnlicher Weise zu interpretieren, wie die Bewegungsgleichungen des einzelnen Massenpunktes.

Die Bezeichnung „Impuls“ haben wir dem Werke von Thomson und Tait entnommen, in welchem unser Begriff eine wichtige Rolle spielt. Dieselbe Bezeichnung wendet Maxwell an bei dem Versuche, die allgemeinen Gleichungen der Mechanik energetisch zu begründen. Gewöhnlich wird in den englischen Büchern statt Impuls das etwas farblose Wort *momentum* benutzt; die Komponenten des Impulses heifsen dann „the moments of momentum“(!). Hertz andrerseits braucht das Wort *Moment* als synonym mit unserem Impuls. Die sonst wohl übliche Bezeichnung „Bewegungsgröfse“ (quantité de mouvement) bringt nur die Länge, aber nicht die Richtung des Impulsvektors zum Ausdrucke und scheint uns daher ungeeignet.

§ 2. Die elementare Statik des starren Körpers.

Bevor wir die Kinetik des Kreisels in Angriff nehmen können, müssen wir uns über die Zusammensetzung und Zerlegung eines an unserem Körper angreifenden Kraftsystems orientieren. Bekanntlich

Hosted by Google

faſst man alle diejenigen Untersuchungen, welche ohne Rücksicht auf die resultierenden Bewegungen lediglich von den Kräften handeln, unter dem ziemlich ungeeigneten Namen der *Statik* zusammen, indem man die Frage nach der Zusammensetzung eines gegebenen Kraftsystems zurückgeführt denkt auf die Aufsuchung solcher Kräfte, welche, dem Kraftsystem hinzugefügt, Gleichgewicht hervorrufen würden. Passender wäre das Wort *Dynamik*, welches man indessen gewöhnlich auf denjenigen Teil der Mechanik anwendet, den wir als Kinetik bezeichnen.

Die Behandlung der Statik für den hier vorliegenden Fall des starren Körpers kann nach zwei wesentlich verschiedenen Methoden geschehen, welche bez. durch die Namen von Poinsot und Lagrange charakterisiert werden. Wir wollen über beide Methoden in Kürze referieren.

Die Statik des starren Körpers in der geometrischen Behandlung Poinsots gründet sich auf eine Reihe von *Axiomen*, welche wir zum Teil schon vom einzelnen Massenpunkte her kennen. Wir sagten, daſs die Kraft beim einzelnen Massenpunkte den Charakter eines Vektors hat und daſs mehrere in demselben Punkte angreifende Kräfte sich wie Vektoren addieren. Hierzu kommt beim starren Körper noch das folgende Axiom hinzu: *Der Angriffspunkt der Kraft kann in Richtung der Kraft beliebig verschoben werden.* Dieses Axiom ist von den vorhergenannten offenbar unabhängig, da seine Gültigkeit wesentlich an die Beschaffenheit des starren Körpers gebunden ist; es kann geradezu als Definition des letzteren angesehen werden. Bei den wirklichen Körpern, welche stets in gewissem Grade elastisch sind, ist es natürlich nur angenähert erfüllt. Man interpretiert übrigens Newtons lex tertia, welche die Gleichheit von actio und reactio aussagt, so, daſs sie unser Axiom mit umfaſst, was allerdings einigermaſsen künstlich scheint.

Mit Hülfe dieser Axiome untersucht man nun die Zusammensetzung von Kräften, welche, irgendwie gegeben, im Körper verteilt sind. Zunächst sieht man ohne Weiteres, daſs zwei Kräfte, welche in parallelen Geraden wirken, stets durch eine Einzelkraft ersetzt werden können, deren Richtung den Richtungen der ursprünglichen Kräfte parallel ist. Die Bestimmung von Angriffspunkt und Gröſse dieser Einzelkraft bildet den Inhalt des sog. „Hebelgesetzes". Hierbei ergiebt sich, wenn die Kräfte entgegengesetzt gleich sind, eine bemerkenswerte Besonderheit. Es rückt nämlich der Angriffspunkt der Resultierenden ins Unendliche, während gleichzeitig ihre Gröſse unendlich klein wird. *Ein Kräftepaar* (d. h. ein Paar entgegengesetzt

Hosted by Google

gleicher und paralleler Kräfte) *ist also äquivalent einer unendlich kleinen Kraft, welche an einem unendlich langen Hebelarm wirkt.*

Nun geht man aber, um die Darstellung elementarer zu halten, der Betrachtung unendlich kleiner Kräfte und unendlich groſser Arme gemeinhin aus dem Wege. Infolgedessen ist man gezwungen, das Kräftepaar als ein nicht weiter reduzierbares Element der Statik des starren Körpers anzusehen. Ferner wird es nötig, die Zusammensetzung und Zerlegung der Kräftepaare in ähnlicher Weise zu diskutieren, wie die der Kräfte. Neuer Axiome bedarf man zu diesem Zwecke nicht, weil ja vermöge der Definition der Kräftepaare die Frage nach dem Gleichgewicht der Paare zurückgeführt werden kann auf die Frage nach dem Gleichgewicht der Kräfte.

Das Ergebnis dieser Untersuchung fassen wir folgendermaſsen zusammen: Wir repräsentieren das Paar durch einen *Vektor*, welchen wir senkrecht auf der durch die Kräfte des Paares gelegten Ebene nach derjenigen Seite hin abtragen, von der aus gesehen die Kräfte im Sinne des Uhrzeigers zu wirken scheinen. Die Länge des Vektors machen wir (in dem ein für allemal gewählten Centimetermaſsstabe) gleich dem „Moment des Paares" d. h. gleich dem Produkt aus der Gröſse der Kräfte in ihren kürzesten Abstand. Der Anfangspunkt unseres Vektors kann dabei beliebig in der Ebene des Paares oder auch beliebig im Raume angenommen werden. Alsdann gilt der Satz: *Zwei Kräftepaare setzen sich so zusammen, daſs sich die zugehörigen Vektoren geometrisch addieren. Durch Zusammensetzung mehrerer Paare entsteht immer wieder ein Paar.*

Kräftepaare haben also, ebenso wie Kräfte, Vektorcharakter. Dabei müssen wir indessen folgenden Unterschied betonen. Der Vektor einer am starren Körper angreifenden Kraft darf nur in seiner Richtung verschoben, der Vektor eines Paares dagegen beliebig parallel zu sich selbst im Raume transportiert werden. *Der Vektor einer Kraft ist* (in der Ausdrucksweise von Herrn Budde) *ein linienflüchtiger, der eines Paares ein freier Vektor, d. h. ein Vektor mit ganz willkürlichem Anheftungspunkte.*

Aus dem Vorstehenden ist ersichtlich, daſs ein bestimmtes Kräftepaar hinsichtlich seiner statischen Wirkung in sehr mannigfaltiger Weise durch andere Kräftepaare ersetzt werden kann. In der That sind zwei Kräftepaare, welche bei der angegebenen Konstruktion denselben Vektor ergeben, völlig äquivalent. Es ist daher geboten, die spezielle Vorstellung des Kräftepaares zurücktreten zu lassen und sich nur an den repräsentierenden Vektor zu halten. Wir wollen diesem Umstande auch in der Bezeichnung Rechnung tragen und wollen statt

Hosted by Google

von einem Kräftepaar lieber von einer *Drehkraft* (oder einem *Drehmoment*) reden. Die Richtung des der Drehkraft ihrer Definition nach zugehörenden Vektors bezeichnen wir auch als „Axe der Drehkraft“; den Sinn des Vektors markieren wir durch einen Pfeil, der die Axe in solchem Sinne umgiebt, als die Kräfte des Paares von der Axe aus gesehen zu wirken scheinen. Die Dimension der Drehkraft ist Kraft mal Hebelarm $\left(D = m\frac{l^2}{t^2}\right)$. Als Gegensatz zu dem Ausdrucke Drehkraft (Kräftepaar) gebrauchen wir vorübergehend das Wort *Schiebekraft* (Einzelkraft).

Wir müssen uns nur hüten, mit dem Ausdrucke Drehkraft die Vorstellung zu verbinden, als ob die Drehkraft bestrebt wäre, um eine bestimmte gerade Linie zu drehen. Die Einführung der Drehkraft geschah ja hier auf rein statischem Wege. Von ihrer kinetischen Wirkung kann erst später die Rede sein, wenn wir über die Massenverteilung des Körpers bestimmte Voraussetzungen gemacht haben werden, wo wir dann überhaupt von der kinetischen Wirkung der Kräfte handeln. Ebensowenig soll natürlich durch die Bezeichnung Schiebekraft die Vorstellung erweckt werden, als ob die kinetische Wirkung der Schiebekraft notwendig in einer Parallelverschiebung bestände.

Wir gehen nun auf das allgemeine Problem der Statik ein, setzen also voraus, daſs die Kräfte in beliebiger Weise räumlich durch den starren Körper verteilt sind. Wir verfahren dabei wie üblich folgendermaſsen: Wir nehmen einen beliebigen Punkt O als *Bezugspunkt* an und legen durch diesen zu jedem der gegebenen Kraftvektoren einen gleichsinnigen und einen entgegensinnigen Vektor hindurch. Die gegebenen Kräfte fassen wir mit den entgegengerichteten Kräften durch O je zu einem Kräftepaar zusammen und ersetzen letzteres nach der obigen Regel durch den Vektor einer Drehkraft, wobei wir als Anfangspunkt des Vektors passend den Bezugspunkt O wählen werden. Wir erhalten so ebensoviele Drehkräfte, als die Anzahl der ursprünglichen Kräfte betrug. Alle diese Drehkräfte setzen wir zu einer resultierenden Drehkraft D zusammen, deren Axe durch O gehen möge. Es bleiben dann noch die den gegebenen gleichgerichteten Kräfte (Schiebekräfte) durch O übrig. Auch diese setzen sich zu einer Resultierenden S zusammen. Daher der Satz:

Ein beliebiges an unserem starren Körper angreifendes Kraftsystem läſst sich ersetzen durch die Kombination einer von einem beliebigen Punkte O auslaufenden Schiebekraft S und einer Drehkraft D.

Wir erwähnen noch die allgemeine Regel zur Berechnung von S und D. Es sei P_i eine der an unserem Körper angreifenden Kräfte

und P_i^x, P_i^y, P_i^z die Projektionen des Vektors P_i auf die Axen eines rechtwinkligen Koordinatensystems, dessen Anfangspunkt mit dem Bezugspunkte zusammenfällt. Ferner mögen X_i, Y_i, Z_i die Koordinaten des Angriffspunktes von P_i und S^x, S^y, S^z bez. D^x, D^y, D^z die Komponenten von S und D sein. Dann haben wir

$$(1)\ \begin{cases} S^x = \Sigma P_i^x, & S^y = \Sigma P_i^y, & S^z = \Sigma P_i^z, \\ D^x = \Sigma(P_i^z Y_i - P_i^y Z_i), & D^y = \Sigma(P_i^x Z_i - P_i^z X_i), & D^z = \Sigma(P_i^y X_i - P_i^x Y_i). \end{cases}$$

Diese sehr bekannten Formeln sind der unmittelbare analytische Ausdruck für die oben geschilderte geometrische Konstruktion von S und D. Man nennt S^x, S^y, S^z, D^x, D^y, D^z *kurzweg die Koordinaten des* (am starren Körper angreifenden) *Kraftsystems.*

Im allgemeinen wird die Richtung von S mit der Axe von D einen Winkel bilden, welcher außer von der Beschaffenheit des gegebenen Kraftsystems auch von der Auswahl des Bezugspunktes abhängt. Wir können nun aber den Punkt O stets so annehmen, daß die Vektoren S und D ihrer Richtung nach gerade zusammenfallen, wobei O noch auf einer bestimmten Geraden nach Belieben gewählt werden kann. Das solcherweise entstehende einfachste Äquivalent eines allgemeinen Kraftsystems — eine Schiebekraft verbunden mit einer Drehkraft, welche die Richtung der Schiebekraft zur Axe hat — werden wir eine *Schraube* (oder genauer eine *Kraftschraube*) nennen. Wir können dann die Größen $S^x, \ldots, D^x, \ldots$ auch als *Koordinaten der Kraftschraube* bezeichnen und können den obigen Satz folgendermaßen präzisieren:

Ein beliebiges an unserem starren Körper angreifendes Kraftsystem läßt sich stets als eine Schraube auffassen, deren Koordinaten durch (1) *bestimmt sind.*

Legt man den Bezugspunkt speziell auf die Axe der Schraube, so werden die Komponenten von S denen von D proportional. Vielfach wird man indessen auf die zuletzt besprochene Vereinfachung in den Formeln verzichten und wird es vorziehen, diesem Punkt eine durch die Natur des Problems ausgezeichnete Lage zu geben, was uns natürlich nicht hindert, das Kraftsystem auch dann noch als eine (allerdings nicht durch O hindurchgehende) Schraube vorzustellen. So wählt man bei dem frei beweglichen starren Körper gerne den Schwerpunkt zum Bezugspunkt; dieselbe Wahl werden wir später treffen, wenn wir den auf einer Ebene beweglichen Kreisel behandeln werden. Andrerseits ist es geboten im Falle des (allgemeinen oder symmetrischen) Kreisels den Bezugspunkt durchgehends in den festen Unterstützungspunkt zu legen. Konstruieren wir uns alsdann im Punkte O die Dreh-


Hosted by Google

kraft und die Schiebekraft, so werden wir von diesen weiterhin nur die erstere zu berücksichtigen haben.

In der That, welches auch im Einzelnen die Umstände sein mögen, die die feste Lage des Unterstützungspunktes bewirken, jedenfalls müssen sie der im Punkte O angreifenden Schiebekraft eine gleich grofse Widerstandskraft entgegensetzen. Diese Widerstandskraft heifst die *Reaktionskraft des Unterstützungspunktes.* Der Gröfse nach ist sie gleich der oben gefundenen Resultierenden S, der Richtung nach ihr entgegengesetzt. Fügen wir diese Reaktionskraft unserem Kraftsystem hinzu, so wird die Schiebekraft S gerade aufgehoben, während die Drehkraft genau den früheren Betrag D behält. Wir werden also wirklich von dem Auftreten der Schiebekraft zunächst vollkommen absehen können und werden auf diese nur gelegentlich später zurückzukommen brauchen, wenn wir den Druck berechnen werden, welchen die Unterlage des Kreisels bei dessen Bewegung auszuhalten hat.

Gleichzeitig vereinfachen sich unsere obigen allgemeinen Sätze im vorliegenden Falle. Wir können sagen:

Das allgemeinste an unserem Kreisel angreifende Kraftsystem kann mit Rücksicht auf die feste Lage des Unterstützungspunktes ersetzt werden durch eine einzelne Drehkraft. —

Man beachte die schöne Analogie, welche zwischen unseren statischen Sätzen und den zu Beginn der Vorlesung entwickelten kinematischen Sätzen besteht. Die Analogie liegt so, dafs für den freien Körper Drehkräfte und (unendlich kleine) Parallelverschiebungen, andererseits Schiebekräfte und (unendlich kleine) Drehungen verglichen werden müssen. Dasselbe geometrische Gebilde, die Schraube, erscheint das eine Mal als Bewegungsschraube, das andere Mal als Kraftschraube. Beim Kreisel treten Drehkräfte und (unendlich kleine) Drehungen um O direkt in Parallele. Beide werden durch Vektoren repräsentiert.

Aufserdem bemerke man, dafs der Kreisel in statischer Hinsicht dem einzelnen Massenpunkte an Einfachheit nicht nachsteht. Die Möglichkeit der späteren elementargeometrischen Entwickelungen zur Kreiseltheorie beruht wesentlich auf diesem Umstande.

Als Beispiel besprechen wir den besonders einfachen Fall, in dem das ursprüngliche Kraftsystem durch die Schwerewirkung geliefert wird. Auf jedes Teilchen dm des Kreisels wirkt infolge der Gravitation die Kraft $g\,dm$ vertikal nach unten.

Wir nehmen ein X, Y, Z, Koordinatensystem mit dem Anfangspunkte in O und der Z-Axe vertikal nach oben. Aus den Gleichungen (1) ergiebt sich dann unmittelbar, unter m die Gesammtmasse des Kreisels, unter ξ, η, ζ die Koordinaten des Schwerpunktes verstanden:

Hosted by Google

$$S^x = 0, \quad S^y = 0, \quad S^z = -g\int dm = -mg,$$

$$D^x = -g\int Y dm = -mg\eta, \quad D^y = g\int X dm = mg\xi, \quad D^z = 0.$$

Wir kommen also zu der sehr bekannten Thatsache, daſs *die Schwerewirkung dieselbe ist, wie wenn eine Einzelkraft vom Betrage mg senkrecht nach unten im Schwerpunkte angriffe.*

Bei dem symmetrischen Kreisel liegt der Schwerpunkt offenbar entweder auf der Figurenaxe oder auf ihrer Verlängerung über O

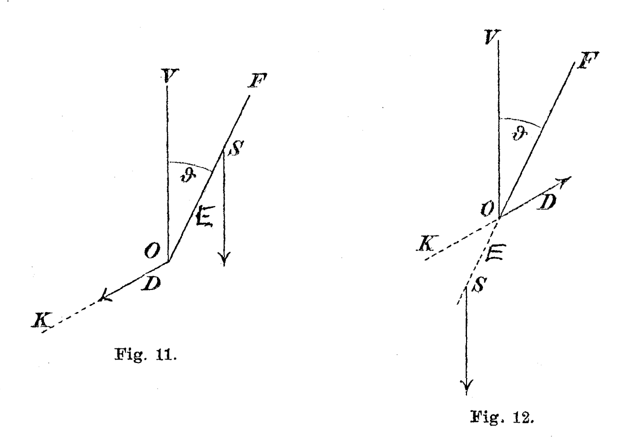


Fig. 11.

Fig. 12.

hinaus. Sei E die Entfernung des Schwerpunktes S von O, und ϑ wie früher der Winkel zwischen der Figurenaxe und der Vertikalen. Dann hat der Vektor D die Länge

$$mgE \sin \vartheta;$$

der Richtung nach steht er sowohl auf der Vertikalen wie auf der Figurenaxe senkrecht. Erinnern wir uns ferner der Definition der Knotenlinie von pag. 7, so können wir sagen: Der Vektor D fällt in die Knotenlinie oder in ihre Verlängerung über O hinaus, je nachdem S auf der Figurenaxe oder auf ihrer Verlängerung liegt. Statt dessen können wir uns auch so ausdrücken, daſs wir sagen: Der Vektor D fällt immer in die Knotenlinie und zwar beträgt seine Gröſse:

$$D = P \sin \vartheta, \quad P = \pm mgE,$$

wobei das obere oder untere Vorzeichen zu wählen ist, je nachdem der Schwerpunkt oberhalb oder unterhalb des Unterstützungspunktes (sc. bei vertikal aufgerichteter Figurenaxe) gelegen ist. Die letztere Ausdrucksweise, welche wir später acceptieren werden, hat den Vorteil, daſs wir die beiden unterschiedenen Fälle zuvörderst gleichmäſsig behandeln und

Hosted by Google

durch die einfachen Bedingungen $P > 0$ und $P < 0$ nachträglich von einander trennen können.

Ebenso, wie es in dem letzten Beispiele der Fall war, setzt man gewöhnlich stillschweigend voraus, daſs die Kräfte, um die es sich in der Statik handelt, kontinuierlich wirkende Kräfte sind. Man übersieht aber sofort, daſs alle unsere Ausführungen auch für Stoſskräfte gültig bleiben, sofern die sämmtlichen Stöſse nur gleichzeitig erfolgen. In der That überträgt sich jede Aussage über kontinuierliche Kräfte sofort auf Stoſskräfte, (vgl. die Definition der letzteren von pag. 70). Als Analogon zu dem Begriffe der Drehkraft werden wir dabei den Begriff des *Drehstoſses* einführen, d. h. den Inbegriff eines Paares gleich groſser entgegengesetzt gerichteter paralleler *Schiebestöſse.* Gröſse, Axe und Sinn des Drehstoſses bestimmen sich ebenso wie bei der Drehkraft aus dem Moment und der Lage der das Paar konstituierenden Einzelkräfte. Die Dimension des Drehstoſses ist $[D] = m\frac{l^2}{t}$. Wir sprechen daher die allgemeinen Sätze aus:

Das allgemeinste an einem frei beweglichen starren Körper angreifende System von Stoſskräften läſst sich stets ersetzen durch eine einzelne Schraube (genauer gesagt: eine Stoſsschraube).

und:

Das allgemeinste System von Stoſskräften, welches irgendwie in den Punkten unseres Kreisels angreift, läſst sich stets auffassen als ein einzelner Drehstoſs und läſst sich also darstellen durch einen einzelnen von O auslaufenden Vektor.

In der bisher auseinandergesetzten Form ist die Statik, wie erwähnt, von Poinsot begründet worden, (bei dem allerdings das Wort „Schraube" noch nicht vorkommt). Sein grundlegendes Werk *éléments de statique*, erschien zuerst im Jahre 1803; seitdem folgte eine auſserordentlich groſse Zahl von Auflagen. Man wolle dort die Beweise der vorstehend mitgeteilten Sätze nachlesen. Mit der projektiven Geometrie wurde die Statik von Moebius, speziell mit der Liniengeometrie von Plücker in Verbindung gesetzt. Von neueren Darstellungen nennen wir neben der schon früher zitierten Schraubentheorie von Ball insbesondere das zweibändige Lehrbuch von Routh*), *Analytical Statics*, welches sich durch Präzision und Reichhaltigkeit besonders empfehlen dürfte. —

Wir gehen nun noch auf die eingangs erwähnte andere Methode zur Begründung der Statik ein, welche im Wesentlichen von Lagrange herrührt. Sie besitzt gegenüber der bisher besprochenen Poinsotschen

*) Cambridge, 2te Auflage 1896.

Hosted by Google

Darstellung den Vorzug gröfserer Verallgemeinerungsfähigkeit, wofür sie auf der anderen Seite weniger elementar erscheinen dürfte als jene. Nach dieser Methode leiten wir die *Zusammensetzung der Kräfte* aus der *Zusammensetzung der Arbeitsgröfsen* ab, welche die Kräfte bei einer unendlich kleinen Verrückung des starren Körpers leisten.

Wir stellen uns wieder vor, dafs auf unseren Körper ein beliebiges System von Kräften P_i mit beliebigen Angriffspunkten wirkt. Die Gesamtarbeit dA unseres Kraftsystems setzen wir zusammen aus den sämtlichen Teilarbeiten dA_i der Einzelkräfte P_i. Dabei benutzen wir den allgemeinen Grundsatz: *Die Arbeit ist von der Wahl des Koordinatensystems unabhängig; sie ist eine skalare Gröfse; mehrere Arbeitsquanta setzen sich zusammen, wie skalare Gröfsen, sie addieren sich im algebraischen Sinne.*

Nach pag. 75 beträgt die Arbeit, welche die Kraft P_i bei einer unendlich kleinen Verrückung ihres Angriffspunktes leistet:

$$dA_i = (P_i^x x_i' + P_i^y y_i' + P_i^z z_i')\,dt,$$

unter P_i^x, P_i^y, P_i^z die Komponenten von P_i, unter x_i, y_i, z_i die Koordinaten ihres Angriffspunktes bezüglich eines im Raume festen Koordinatensystems (x, y, z) verstanden. Mithin ergiebt sich die Gesamtarbeit zu

$$dA = \Sigma dA_i = \Sigma(P_i^x x_i' + P_i^y y_i' + P_i^z z_i')\,dt.$$

Wir erinnern uns nun der Ergebnisse des ersten Kapitels, nach welchem jede unendlich kleine Verrückung eines starren Körpers aus einer Parallelverschiebung und einer Drehung besteht und durch die sechs Geschwindigkeitskoordinaten x', y', z', p, q, r analytisch dargestellt werden kann (vgl. pag. 47). Durch diese Koordinaten drücken wir zunächst die Geschwindigkeit (x_i', y_i', z_i') des Angriffspunktes von P_i aus. Infolge der Parallelverschiebung erhält der Angriffspunkt von P_i (ebenso wie jeder Punkt des Körpers) die Geschwindigkeit (x', y', z'); infolge der Drehung gewinnt er (s. Gl. (3') von pag. 41) die Geschwindigkeit

$$(-Y_i r + Z_i q,\ -Z_i p + X_i r,\ -X_i q + Y_i p).$$

Mithin beträgt die resultierende Geschwindigkeit des Angriffspunktes von P_i:

$$\begin{aligned} x_i' &= x' - Y_i r + Z_i q, \\ y_i' &= y' - Z_i p + X_i r, \\ z_i' &= z' - X_i q + Z_i p. \end{aligned}$$

Diese Werte tragen wir in unseren obigen Ausdruck für die Gesamtarbeit ein. Derselbe schreibt sich dann folgendermafsen:


Hosted by Google

(2) $$dA = (S^x x' + S^y y' + S^z z' + D^x p + D^y q + D^z r)\,dt,$$

wo

(3) $$\begin{cases} S^x = \Sigma P_i^x, \quad S^y = \Sigma P_i^y, \quad S^z = \Sigma P_i^z, \\ D^x = \Sigma(P_i^z Y_i - P_i^y Z_i), \quad D^y = \Sigma(P_i^x Z_i - P_i^z X_i), \\ D^z = \Sigma(P_i^y X_i - P_i^x Y_i). \end{cases}$$

Es sind dieses genau dieselben Gröſsen, welche oben in den Gleichungen (1) auftraten.

Wir wollen uns ihre Bedeutung unabhängig von dem früher gesagten klar machen, wobei wir zu einer neuen einfachen Definition dieser Gröſsen gelangen. Nach Gleichung (2) ist S^x das Verhältnis derjenigen Arbeit, welche unser Kraftsystem bei einer Verschiebung des Körpers in der Richtung der x-Axe leistet, zu der Gröſse dieser Verschiebung. Ebenso ist D^x gleich dem Verhältnis derjenigen Arbeit, welche unser Kraftsystem bei einer reinen Drehung des Körpers um die Axe X oder, was auf dasselbe herauskommt, um die Axe x leistet, zu der Gröſse des Drehungswinkels. Die Gröſsen $S^x, \ldots, D^x, \ldots$ haben also eine ganz analoge Bedeutung, wie die Komponenten $P^x, \ldots$ der an einem einzelnen Massenpunkte angreifenden Kraft P, welche ja ihrerseits ursprünglich als das Verhältnis eines gewissen Arbeitsquantums zu einer gewissen unendlich kleinen Bewegung definiert waren (vgl. pag. 70). Infolgedessen liegt es nahe, den Begriff der Kraft von dem einzelnen Massenpunkte auf unsern starren Körper zu erweitern. Wir werden kurz von einer *an dem starren Körper angreifenden Gesamtkraft* sprechen können, *welche dem gegebenen System der Einzelkräfte äquivalent ist. Dieselbe zerlegt sich in eine Schiebekraft S und eine Drehkraft D, welche letztere je in drei Komponenten nach den Koordinatenaxen aufgelöst werden können.* Die Gröſsen $S^x, S^y, S^z, D^x, D^y, D^z$ werden wir wieder als die Koordinaten unserer Gesamtkraft bezeichnen, ähnlich wie wir die Gröſsen x', y', z', p, q, r die Koordinaten der instantanen Geschwindigkeit genannt haben. Dann können wir kurz sagen:

Die Koordinaten der Kraft sind ihrer Definition nach nichts anderes als die Faktoren, welche in dem Ausdrucke für die Arbeit die Koordinaten der Geschwindigkeit multiplizieren.

Handelt es sich speziell um einen Körper mit festem Unterstützungspunkte, in welchem Falle wir wie oben diesen Punkt zum Bezugspunkte nehmen werden, so haben wir für die Schiebegeschwindigkeit $x' = y' = z' = 0$ und können von der Schiebekraft S^x, S^y, S^z abstrahieren. Die Drehkraft dagegen wird wieder genau durch die Glei-

Hosted by Google

chungen (3) definiert. Die Gesamtarbeit, welche diese Drehkraft bei der unendlich kleinen Verrückung $(p, q, r)\,dt$ leistet, ist alsdann

$$(2') \qquad dA = (D^x p + D^y q + D^z r)\,dt.$$

Die jetzige Definition der Dreh- und Schiebekraft ist in vieler Hinsicht der früheren vorzuziehen, da sie unmittelbar an den Begriff der Kraft beim einzelnen Massenpunkte anknüpft; insbesondere überhebt sie uns der Einführung des Begriffes der Kräftepaare, welchen wir früher vorübergehend nötig hatten. Dafs die neue und die alte Definition auf dasselbe hinauskommen, lehrt die Vergleichung der Ausdrücke (1) und (3).

Wir könnten jetzt von Neuem die sämtlichen Lehren der elementaren Statik entwickeln; insbesondere würde dabei die Thatsache, dafs Schiebekräfte und Drehkräfte sich wie linienflüchtige bez. freie Vektoren zusammensetzen, als unmittelbare Folge der entsprechenden Zusammensetzung von Geschwindigkeiten und unseres obigen Grundsatzes erscheinen, nach welchem Arbeitsquanten sich wie skalare Gröfsen addieren.

In solcher Weise ist die Statik, wie erwähnt, von Lagrange in seiner berühmten *mécanique analytique* begründet worden. Wenn wir oben die Zusammensetzung der Kräfte an den Ausdruck für die Arbeit anknüpften, so ist dieses im Wesentlichen dasselbe, wie wenn wir nach dem Vorgange von Lagrange das Gleichgewicht eines Systems auf Grund des *Prinzips der virtuellen Verrückungen* beurteilen. In der That sagt dieses Prinzip bekanntlich aus, dafs an einem beliebigen System gegebene Kräfte sich dann im Gleichgewicht befinden, wenn bei jeder möglichen unendlich kleinen Verrückung die von ihnen geleistete Arbeit verschwindet, oder etwas allgemeiner ausgedrückt, dafs zwei verschiedene Kraftsysteme einander dann äquivalent sind, wenn bei jeder möglichen Verrückung die von beiden geleistete Arbeit die gleiche ist. In Übereinstimmung mit diesem Prinzipe haben wir oben das gegebene Kraftsystem der P_i durch die Kombination einer Schiebekraft S und einer Drehkraft D ersetzt. Nur die Ausdrucksweise war etwas anders, wie bei Lagrange, zu dessen Zeit der Begriff und die Bezeichnung der Arbeit noch nicht geläufig waren. —

Wir wollen schliefslich den Ausdruck für die Arbeit benutzen, um, ebenso wie beim einzelnen Massenpunkte geschehen, eine Verabredung darüber zu treffen, was wir unter den *„verallgemeinerten Koordinaten eines Kraftsystems“* verstehen. Dabei gehen wir ganz analog vor, wie pag. 78 bei dem einzelnen Massenpunkt.

Offenbar können wir den instantanen Bewegungszustand des starren Körpers statt durch die Gröfsen x', y', z', p, q, r noch in äufserst

mannigfacher Weise durch sechs andere Parameter festlegen. Die nächstliegende Abänderung wäre die, dafs wir den Bezugspunkt anders wählen und aufserdem die Lage des xyz-Systems im Raume und die des XYZ-Systems im Körper variieren. Zerlegen wir nun nach der obigen Regel ein bestimmtes Kraftsystem in Schiebekraft und Drehkraft, so werden wir für die Komponenten dieser Kräfte andere Werte finden wie früher. Ebenso werden sich die Koordinaten einer bestimmten unendlich kleinen Verrückung ändern. Dagegen ist es klar, dafs die Arbeit, welche ein bestimmtes Kraftsystem bei einer bestimmten unendlich kleinen Verrückung leistet, genau den früheren Wert beibehalten muss. Die Arbeit hat bei fester Wahl der Einheiten von Länge, Zeit und Masse einen festen numerischen Wert, welcher von der Wahl des Koordinatensystems unabhängig ist; sie ist (gegenüber Veränderung der Koordinatensysteme) eine *absolute Invariante*, wie wir sagen können.

Wir werden aber darüber hinaus noch weit durchgreifendere Änderungen in der Koordinatenbestimmung des momentanen Bewegungszustandes vornehmen. Beispielsweise werden wir die instantane Drehung statt durch die Gröfsen p, q, r durch die Änderungen der Eulerschen Winkel $\varphi', \psi', \vartheta'$ festlegen, ferner könnten wir (etwa wie im vorigen Paragraphen geschehen) die Lage und Geschwindigkeit des Bezugspunktes durch die Gröfse und die Gröfsenänderung dreier krummliniger Koordinaten ξ, η, ζ bestimmen. Die allgemeinste Annahme wird die sein, dafs wir die x', y', z', p, q, r gleich beliebigen linearen Funktionen von beliebigen sechs Geschwindigkeitsparametern $\xi', \eta', \zeta', \varphi', \psi', \vartheta'$ setzen mit Koeffizienten, die noch von den Werten der $\xi, \eta, \zeta, \varphi, \psi, \vartheta$ selbst abhängen. Es fragt sich, wie die Koordinaten des Kraftsystems dabei geändert werden oder richtiger, was wir jetzt unter dem Worte „Koordinaten des Kraftsystems" verstehen wollen. Wir treffen diesbezüglich folgende Festsetzung:

Wir führen in den Ausdruck (2) für die Arbeit die Werte der $x', \ldots r$ in den $\xi', \ldots \vartheta'$ ein und ordnen den Ausdruck nach den letzteren Gröfsen. *Dann definieren wir als die zu den Geschwindigkeitskoordinaten ξ', η' $\zeta', \varphi', \psi', \vartheta'$ gehörigen Koordinaten des Kraftsystems diejenigen Gröfsen, welche bez. als Faktoren von $\xi', \eta', \zeta', \varphi', \psi', \vartheta'$ auftreten.* Diese Definition der Kraftkomponenten befindet sich in der That in genauer Analogie zu unserer Definition des Wortes beim einzelnen Massenpunkte. Beispielsweise bedeutet nämlich die zu ξ gehörige Kraftkoordinate das Verhältnis derjenigen Arbeit, welche unser Kraftsystem bei einer Verrückung $d\xi$ leistet, zu dieser Verrückung.

Offenbar werden die neuen Kraftkoordinaten lineare Funktionen der alten u. zw. sehen die Substitutionsgleichungen, welche von letzteren

Hosted by Google

zu ersteren führen, ganz ähnlich aus, wie die Substitutionsgleichungen welche die alten Geschwindigkeitskoordinaten durch die neuen ausdrücken; es sind nur die Koeffizienten der horizontalen und der vertikalen Reihen gegen einander vertauscht. Diese Thatsache drücken wir kurz so aus, dafs wir sagen:

Auf Grund unserer Definition der verallgemeinerten Kraftkoordinaten verhalten sich diese allemal zu den Geschwindigkeitskoordinaten kontragredient.

Den entsprechenden Satz oder richtiger die entsprechende Festsetzung haben wir schon pag. 79 für die Kraftkoordinaten am einzelnen Massenpunkte ausgesprochen.

§ 3. Der Impulsbegriff beim allgemeinen Kreisel. Zusammenhang zwischen Impuls- und Drehungsvektor. Beziehung zum Ausdrucke der lebendigen Kraft.

Wir machen nun den Übergang von der Statik zur Kinetik, fragen also nach dem Zusammenhange zwischen der Bewegung und den die Bewegung verursachenden Kräften. Hierbei wird die Massenverteilung des Körpers von entscheidender Wichtigkeit, so dafs wir weiterhin den allgemeinen und den symmetrischen Kreisel gesondert behandeln werden.

An die Spitze der Kinetik stellen wir wie beim einzelnen Massenpunkte den *Begriff des Impulses.* Wir erläutern diesen Begriff zunächst im Falle des frei beweglichen starren Körpers, um von hier aus sogleich zu dem in einem seiner Punkte befestigten Körper überzugehen.

Die Definition des Impulses ist folgende:

Wir betrachten den starren Körper in einem beliebigen Bewegungszustande und fragen nach irgend einem System von Stofskräften, welches im Stande ist, den Körper in seiner augenblicklichen Lage momentan aus der Ruhe in den fraglichen Bewegungszustand überzuführen. *Dieses oder irgend ein ihm äquivalentes System von Stofskräften heifst der Impuls des Körpers.*

Mit Rücksicht auf die Untersuchungen des vorigen Paragraphen können wir sofort folgende Sätze aussprechen:

Der Impuls des frei beweglichen starren Körpers besteht aus der Kombination eines Schiebestofses und eines Drehstofses; er kann kurzweg als eine Schraube aufgefafst werden.

Und:

Der Impuls eines starren Körpers mit festem Unterstützungspunkte O ist ein einzelner Drehstofs; wir können ihn unter dem einfachen Bilde eines von O auslaufenden Vektors sehen.



Indem wir bei dem letzteren Falle bleiben, ziehen wir neben dem statischen Vektor des Impulses den kinematischen der Drehgeschwindigkeit in Betracht.

Es wird eine erste Aufgabe der Kinetik des Kreisels sein, die gegenseitige Abhängigkeit dieser beiden Vektoren festzustellen.

Zu dem Zwecke operieren wir so, daſs wir einerseits die Geschwindigkeiten andererseits die Impulse aller einzelnen Massenteilchen betrachten, aus denen sich der Kreisel aufbaut.

Wir nehmen vorab die Axe der Drehgeschwindigkeit zur ersten Koordinatenaxe eines rechtwinkligen Koordinatensystems XYZ, welches eine unveränderliche Lage gegen den Körper hat, und dessen Anfangspunkt mit dem Unterstützungspunkte zusammenfällt. Die Komponenten des Impulsvektors nach den Koordinatenaxen bezeichnen wir mit L, M, N, die des Drehungsvektors wie früher mit p, q, r. Nach Voraussetzung hat von letzteren nur p einen von Null verschiedenen Wert.

Betrachten wir jetzt irgend ein Teilchen P des Körpers von der Masse dm. Vermöge der Drehung um die X-Axe besitzt unser Teilchen eine Lineargeschwindigkeit

$$v = p\sqrt{Y^2 + Z^2}.$$

Die Stosskraft, welche erforderlich ist, um diese Geschwindigkeit momentan zu erzeugen, hat die Gröſse $v\,dm$; ihre Komponenten nach den drei Koordinatenaxen betragen, wie man leicht erkennt, bez.

$$0, \quad -pZdm, \quad pYdm.$$

Solcher Stoſskräfte mögen nun auf unsern Körper so viele wirken, als wir Teilchen P unterscheiden mögen. Die Drehkraft, welche zu dem System dieser Stoſskräfte gehört, ist dann unser Impuls. Seine Komponenten berechnen sich nach der analytischen Regel von pag. 85 zu

$$(1) \quad L = p\int (Y^2 + Z^2)\,dm, \quad M = -p\int YX\,dm, \quad N = -p\int ZX\,dm,$$

wo die Integrale über die Gesamtmasse des Körpers zu erstrecken sind. Die vorstehenden Ausdrücke zeigen sofort, daſs der Vektor des Impulses im Allgemeinen von dem Vektor der Drehgeschwindigkeit der Richtung nach abweicht: während nach Annahme der Vektor der Drehgeschwindigkeit in die X-Axe fällt, besitzt der Vektor des Impulses auch Komponenten in Richtung der Y- und Z-Axe.

In ganz entsprechender Weise erhalten wir offenbar, wenn wir annehmen, daſs die instantane Drehung um die Y- oder Z-Axe erfolgt, durch cyklische Vertauschung die folgenden Werte für die Komponenten des zugehörigen Impulses:


Hosted by Google

$$(1')\quad L = -q\int XY\,dm,\quad M = q\int (Z^2+X^2)\,dm,\quad N = -q\int ZY\,dm$$

bez.

$$(1'')\quad L = -r\int XZ\,dm,\quad M = -r\int YZ\,dm,\qquad N = r\int (X^2+Y^2)\,dm.$$

Aus den vorstehenden Gleichungen ergiebt sich aber auch sofort der Impuls bei allgemeiner Lage des Drehungsvektors. Wie wir wissen, setzen sich sowohl Drehgeschwindigkeiten als Drehkräfte (Impulse) wie Vektoren zusammen, d. h. so dafs sich ihre Komponenten einfach addieren. Demnach entspricht einer Drehung (p, q, r) um die Axe $p:q:r$ ein Impuls, dessen Komponenten bez. gleich der Summe der in den Gleichungen (1), (1′) und (1″) berechneten Impulskomponenten sind. Der zugehörige Impuls lautet daher:

$$(2)\quad \begin{cases} L = \quad p\int (Y^2+Z^2)\,dm - q\int XY\,dm \qquad - r\int XZ\,dm, \\ M = -p\int YX\,dm \qquad + q\int (Z^2+X^2)\,dm - r\int YZ\,dm, \\ N = -p\int ZX\,dm \qquad - q\int ZY\,dm \qquad + r\int (X^2+Y^2)\,dm. \end{cases}$$

Die vorstehenden Gleichungen nehmen sofort eine sehr übersichtliche Form an, wenn wir die folgende quadratische Form der Geschwindigkeitskoordinaten

$$(3)\quad T = \frac{1}{2}\Big\{p^2\int (Y^2+Z^2)\,dm + q^2\int (Z^2+X^2)\,dm + r^2\int (X^2+Y^2)\,dm$$
$$- 2qr\int YZ\,dm - 2rp\int ZX\,dm - 2pq\int XY\,dm\Big\}$$

einführen. *Dann ergiebt sich nämlich einfach*

$$(4)\qquad L = \frac{\partial T}{\partial p},\quad M = \frac{\partial T}{\partial q},\quad N = \frac{\partial T}{\partial r}.$$

Wir fragen nach der mechanischen Bedeutung unserer quadratischen Form T. Es zeigt sich, dafs T die *lebendige Kraft des Kreisels*, d. h. *diejenige Arbeit ist, welche der Impuls bei der Erzeugung des instantanen Bewegungszustandes leistet.*

In der That, berechnen wir diese Arbeit, indem wir sie zunächst aus den Einzelarbeiten zusammensetzen, welche die an den Massenteilchen des Körpers angreifenden Einzelimpulse liefern. Nach pag. 75 beträgt die Arbeit, welche an dem Massenteilchen dm bei der Erzeugung der Geschwindigkeit (x', y', z') geleistet wird,

$$dA = \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2 + z'^2)\,dm.$$

Hosted by Google

Die Gesamtarbeit berechnet sich hieraus durch Integration über die ganze Masse des Körpers; sie wird

$$\frac{1}{2}\int(x'^2 + y'^2 + z'^2)\,dm.$$

Diesen Ausdruck formen wir um, indem wir die Drehgeschwindigkeit p, q, r einführen. Die hierzu erforderlichen Ausdrücke der x', y', z' haben wir pag. 41 hergestellt. Wir erhalten daraufhin:

$$\frac{1}{2}\int\{(-Zq + Yr)^2 + (-Xr + Zp)^2 + (-Yp + Xq)^2\}\,dm.$$

Die Ausrechnung dieses Ausdrucks liefert aber gerade die rechte Seite der Gleichung (3). Wir werden also sagen:

Die lebendige Kraft des Kreisels ist eine homogene quadratische Funktion der Komponenten des Drehungsvektors mit konstanten, d. h. nur von der Massenverteilung des Körpers abhängigen Koeffizienten.

Nachdem wir die Bedeutung von T erkannt haben, können wir die Gleichungen (4) als das genaue Analogon zu den pag. 76 für den einzelnen Massenpunkt angegebenen Gleichungen (7) aussprechen.

Wir werden den Ausdruck der lebendigen Kraft noch in eine Reihe anderer interessanter Formen schreiben. Zunächst bemerken wir, dafs nach einem bekannten Satz über homogene Funktionen

$$T = \frac{1}{2}\left(p\frac{\partial T}{\partial p} + q\frac{\partial T}{\partial q} + r\frac{\partial T}{\partial r}\right).$$

Mit Rücksicht auf die Gleichungen (4) können wir statt dessen schreiben

(5) $$T = \frac{1}{2}(pL + qM + rN).$$

Diese Formel drücken wir in Worten folgendermafsen aus:

Die lebendige Kraft ist gleich dem halben Produkt aus der Gröfse des Impulsvektors in die Projektion des Drehungsvektors auf jenen (oder auch gleich dem halben Produkt aus der Gröfse des Drehungsvektors in die Projektion des Impulsvektors auf diesen).

In der Sprache der Vektoranalysis (vgl. pag. 62) können wir hierfür auch kurz sagen:

Die lebendige Kraft ist gleich dem halben skalaren Produkt aus dem Vektor des Impulses und dem der Drehung.

Ohne auf den Aufbau des starren Körpers aus seinen einzelnen Massenteilchen, wie hier geschehen, einzugehen, hätten wir die letzte Formel auch direkt aus der Betrachtung des Gesamtsystems erschliefsen können, indem wir eine pag. 75 gegebene Betrachtung vom einzelnen Massenpunkte direkt auf unsern Fall übertragen.



Wir knüpfen an die Arbeit an, welche eine beliebige kontinuierliche Drehkraft (D^x, D^y, D^z) an unserem Kreisel bei der Verrückung pdt, qdt, rdt leistet. Diese beträgt nach Gleichung (2′) von pag. 91:

$$(6) \qquad dA = (D^x p + D^y q + D^z r)dt.$$

Hieraus leiten wir den Ausdruck für die endliche Arbeit, welche unser Drehstoſs L, M, N bei der *Erzeugung* der Drehung p, q, r leistet, d. h. eben den Ausdruck für die lebendige Kraft, durch Integration nach der Zeit folgendermaſsen ab.

Wir können unsern Drehstoſs L, M, N auffassen als eine kontinuierliche Drehkraft von konstantem sehr groſsen Betrage und sehr kleiner Wirkungsdauer Δt. Wir können also setzen:

$$(7) \quad L = \int_0^{\Delta t} D^x dt = D^x \Delta t, \quad M = \int_0^{\Delta t} D^y dt = D^y \Delta t, \quad N = \int_0^{\Delta t} D^z dt = D^z \Delta t.$$

Zu Beginn des Intervalles Δt ist die Drehgeschwindigkeit des Körpers gleich Null, am Ende von Δt gleich (p, q, r). Wir müssen nun annehmen, daſs in der Zwischenzeit die Geschwindigkeit *gleichmäſsig* anwächst, so daſs

$$(8) \qquad \int_0^{\Delta t} p\,dt = \tfrac{1}{2} p \Delta t, \quad \int_0^{\Delta t} q\,dt = \tfrac{1}{2} q \Delta t, \quad \int_0^{\Delta t} r \Delta t = \tfrac{1}{2} r \Delta t.$$

Integrieren wir darauf den Ausdruck (6) für die Arbeit zwischen $t = 0$ und $t = \Delta t$, so erhalten wir mit Rücksicht auf (7) und (8)

$$(9) \quad \begin{cases} T = \int_0^{\Delta t} dA = D^x \int_0^{\Delta t} p\,dt + D^y \int_0^{\Delta t} q\,dt + D^z \int_0^{\Delta t} r\,dt \\ \qquad = \frac{1}{2}(D^x p + D^y q + D^z r)\,\Delta t \\ \qquad = \frac{1}{2}(Lp + Mq + Nr). \end{cases}$$

Wir kommen also gerade zur Gleichung (5) zurück.

In den Gleichungen (4) haben wir T als Funktion der Geschwindigkeitskoordinaten p, q, r vorausgesetzt. Wir können aber T auch als Funktion der Impulskoordinaten berechnen. Es genügt zu dem Zwecke die Gleichungen (2) nach p, q, r aufzulösen und die so gefundenen Werte der letzteren Gröſsen in (5) einzutragen. Aus (2) ergiebt sich zunächst

$$(2') \qquad \begin{cases} p = A_{11} L + A_{21} M + A_{31} N, \\ q = A_{12} L + A_{22} M + A_{32} N, \\ r = A_{13} L + A_{23} M + A_{33} N, \end{cases}$$

Hosted by Google

wo die A_{ik} die durch den Wert der Determinante dividierten Unterdeterminanten des Koeffizientenschemas in (2) bedeuten und wo $A_{ik} = A_{ki}$ ist. Mit Rücksicht auf (5) bekommen wir nun für T folgenden Ausdruck:

$$(3') \qquad T = \frac{1}{2}(A_{11}L^2 + 2A_{12}LM + \cdots + A_{33}N^2).$$

Als Funktion der Impulskoordinaten aufgefasst wird T wiederum eine homogene quadratische Form mit konstanten Koeffizienten.

Wir wollen noch die partiellen Differentialquotienten dieser Funktion nach L, M, N bilden. Offenbar werden diese gleich den rechten Seiten der Gleichungen (2′), so dafs wir die Relationen finden:

$$(4') \qquad p = \frac{\partial T}{\partial L}, \quad q = \frac{\partial T}{\partial M}, \quad r = \frac{\partial T}{\partial N}.$$

Diese Gleichungen (4′) *stellen die Auflösung der Gleichungen* (4) *in einer eigentümlich symmetrischen Form geschrieben vor.* Wohlgemerkt ist dabei T oben als Funktion der p, q, r, jetzt als Funktion der L, M, N vorausgesetzt.

Die Gleichungen (4) oder die ihnen äquivalenten Gleichungen (4′) liefern die gesuchte Beziehung zwischen Impuls- und Drehungsvektor in der allgemeinsten Form. Sie stellen die ersten und wichtigsten Gleichungen der Kinetik des Kreisels vor. Übrigens haben sie genau dieselbe Form wie die analogen Gleichungen beim einzelnen Massenpunkte (vgl. pag. 76). Wir können, beide Gleichungstripel zusammenfassend, die Aussage von pag. 77 wiederholen:

Die Impuls-(Geschwindigkeits-)Komponenten sind die nach den Geschwindigkeits-(Impuls-)Komponenten genommenen partiellen Differentialquotienten der lebendigen Kraft, wobei wir uns die letztere als Funktion der Geschwindigkeits-(Impuls-)Komponenten ausgedrückt zu denken haben.

Sodann bringen wir den Ausdruck der lebendigen Kraft mit dem *Begriff der Trägheitsmomente* in Zusammenhang. Bekanntlich bezeichnet man die Koeffizienten von $\frac{1}{2}p^2$, $\frac{1}{2}q^2$, $\frac{1}{2}r^2$ in dem Ausdrucke (3) als die Trägheitsmomente des Körpers bez. um die Axen X, Y, Z. Andrerseits nennt man die Koeffizienten von $-pq$, $-qr$, $-rp$ in demselben Ausdrucke gelegentlich „Trägheitsprodukte“ (oder auch „Centrifugalmomente“). Ferner wird das Trägheitsmoment M des Körpers um eine beliebige Axe durch die Gleichung definiert

$$M = \int R^2 dm,$$

wo R den Abstand des Teilchens dm von der betr. Axe bedeutet, und wo das Integral über die ganze Masse des Körpers zu erstrecken ist. Zu demselben Integrale kommen wir aber auch von dem Ausdrucke



der lebendigen Kraft aus. Bemerken wir, daſs die Lineargeschwindigkeit eines Teilchens dm unseres Körpers gleich dem Produkt aus der Winkelgeschwindigkeit des Körpers um die instantane Drehungsaxe in den Abstand des Teilchens von dieser Axe ist; bezeichnen wir erstere mit Ω, letzteren mit R, so gilt demnach

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = \Omega^2 R^2.$$

Mithin wird

$$(10) \qquad T = \frac{1}{2}\int (x'^2 + y'^2 + z'^2)\,dm = \frac{\Omega^2}{2}\int R^2 dm = \frac{M}{2}\,\Omega^2.$$

Den Ausdruck $T = \frac{M}{2}\Omega^2$ für die lebendige Kraft des starren Körpers vergleichen wir mit der Formel $T = \frac{m}{2}v^2$ für die lebendige Kraft des einzelnen Massenpunktes. Wir werden dann sagen können:

Die lebendige Kraft des Kreisels berechnet sich genau ebenso aus der Winkelgeschwindigkeit und dem zur instantanen Drehaxe gehörigen Trägheitsmoment, wie die lebendige Kraft des einzelnen Punktes aus Geschwindigkeit und Masse.

Wir mögen die Gleichung (10) ferner dazu benutzen, um den allgemeinen Ausdruck für M aufzustellen. Bezeichnen wir die Richtungscosinus der instantanen Drehungsaxe $p:q:r$ gegen das Koordinatenkreuz XYZ mit α, β, γ, wobei

$$\alpha = \frac{p}{\Omega}, \quad \beta = \frac{q}{\Omega}, \quad \gamma = \frac{r}{\Omega},$$

so ergiebt sich aus (10) und (3):

$$(11) \begin{cases} M = \alpha^2\int (Y^2 + Z^2)\,dm + \beta^2\int (Z^2 + X^2)\,dm + \gamma^2\int (X^2 + Y^2)\,dm \\ \qquad\qquad - 2\beta\gamma\int YZ\,dm - 2\gamma\alpha\int ZX\,dm - 2\alpha\beta\int XY\,dm. \end{cases}$$

Das Trägheitsmoment um eine beliebige Axe (α, β, γ) ist also eine homogene quadratische Funktion der Richtungscosinus α, β, γ, und zwar hängt es von diesen Gröſsen in ganz derselben Weise ab, wie $2T$ von den Geschwindigkeitskomponenten p, q, r.

Wir führen sodann den seit Poinsot allgemein üblichen Begriff des *Trägheitsellipsoides* ein, indem wir zunächst auf der Axe (α, β, γ) die Strecke $\varrho = \sqrt{\frac{1}{M}}$ als Radiusvektor abtragen. Der Endpunkt dieser Strecke besitzt die Koordinaten

$$\xi = \alpha\varrho, \quad \eta = \beta\varrho, \quad \zeta = \gamma\varrho.$$

Machen wir die gleiche Konstruktion für alle möglichen Axen (α, β, γ),

Hosted by Google

so entsteht eine Fläche zweiten Grades u. zw. ein Ellipsoid, welches die Gleichung hat

$$1 = \xi^2 \int (Y^2 + Z^2)\, dm + \eta^2 \int (Z^2 + X^2)\, dm + \zeta^2 \int (X^2 + Y^2)\, dm$$
$$- 2\eta\zeta \int YZ\, dm - 2\zeta\xi \int ZX\, dm - 2\xi\eta \int XY\, dm.$$

Die drei Hauptaxen dieses Ellipsoides sind die sog. *Hauptträgheitsaxen.* Denken wir uns die Koordinatenaxen X, Y, Z in die Hauptträgheitsaxen verlegt, so müssen in der Gleichung des Trägheitsellipsoides die Produkte $\eta\zeta$, $\zeta\xi$, $\xi\eta$ verschwinden. *Die Hauptträgheitsaxen sind also dadurch ausgezeichnet, daſs in Bezug auf sie als Koordinatenaxen die Trägheitsprodukte gleich Null werden.* Die Gleichung des Trägheitsellipsoides nimmt in diesen Koordinaten die Form an

$$(12) \qquad 1 = A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2,$$

wo die Gröſsen

$$A = \int (Y^2 + Z^2)\, dm, \quad B = \int (Z^2 + X^2)\, dm, \quad C = \int (X^2 + Y^2)\, dm$$

die *Hauptträgheitsmomente* in Bezug auf den Unterstützungspunkt O heiſsen.

Übrigens kann nicht jedes Ellipsoid als Trägheitsellipsoid figurieren. Man erkennt nämlich aus den angegebenen Ausdrücken der A, B, C leicht, daſs diese Gröſsen gewissen Ungleichungen genügen:

$$A < B + C, \quad B < C + A, \quad C < A + B,$$

Ungleichungen, welche wir am einfachsten in die Aussage zusammenfassen: Die A, B, C sind Seiten eines möglichen geradlinigen Dreiecks. *Danach gehören also nur solche Ellipsoide zu wirklichen Körpern als Trägheitsellipsoide hinzu, aus deren reziproken Hauptaxenquadraten ein Dreieck konstruiert werden kann.*

Der Ausdruck (11) für das Trägheitsmoment um eine beliebige Axe geht bei unserer jetzigen Wahl der Coordinatenaxen über in

$$M = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2.$$

Ebenso wie dieser Ausdruck transformiert sich aber auch die lebendige Kraft des Körpers. Nach (10) erhalten wir für letztere

$$(13) \qquad T = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2).$$

Endlich vereinfachen sich auch die Gleichungen (2) erheblich, wenn wir das Koordinatenkreuz mit dem „Hauptträgheitskreuz“ zusammenfallen lassen. *Es wird nämlich der Impulsvector* (L, M, N),

Hosted by Google

welcher zu einem beliebigen Drehungsvector (p, q, r) *gehört, nunmehr durch die folgenden fundamentalen Gleichungen bestimmt:*

$$(14) \qquad L = Ap, \quad M = Bq, \quad N = Cr.$$

In Folge dessen ergiebt sich aus (13) noch folgender Ausdruck der lebendigen Kraft in den Impulskoordinaten:

$$(13') \qquad T = \frac{1}{2}\left(\frac{L^2}{A} + \frac{M^2}{B} + \frac{N^2}{C}\right).$$

Wir werden aus den Gleichungen (14) ebenso wie aus den früheren Gleichungen (1) schliefsen können, dafs Drehungsvektor und Impulsvektor im Allgemeinen einen von Null verschiedenen Winkel mit einander bilden. In der That ist, sofern die Hauptträgheitsmomente A, B, C sämtlich von einander verschieden sind, die Proportion

$$L : M : N = p : q : r$$

nur dann erfüllt, wenn zwei Komponenten des Drehungsvektors (Impulsvektors) verschwinden. *Drehungsvektor und Impulsvektor fallen also nur dann zusammen, wenn einer der beiden Vektoren (und also zugleich der andere) in einer der drei Hauptträgheitsaxen liegt.*

Der Zusammenhang zwischen unseren beiden Vektoren läfst sich endlich in geometrischer Form durch eine einfache Konstruktion beschreiben, welche im Wesentlichen schon von Poinsot angegeben ist.

Wir gehen von dem Trägheitsellipsoide

$$A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 = 1$$

aus und legen durch den Endpunkt des Drehungsvektors p, q, r das mit dem Trägheitsellipsoide ähnliche und ähnlich gelegene Ellipsoid hindurch. Dieses wird die Gleichung haben

$$A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = 2T.$$

Im Endpunkte des Drehungsvektors legen wir sodann die Tangentialebene an das letztgenannte Ellipsoid:

$$Ap\xi + Bq\eta + Cr\zeta = 2T.$$

Das Lot von O auf diese bekommt die Richtung

$$Ap : Bq : Cr = L : M : N,$$

d. h. die Richtung des Impulsvektors. Die Länge des Lotes beträgt

$$\frac{2T}{G},$$

wo

$$G^2 = L^2 + M^2 + N^2$$

die Länge des Impulsvektors bedeutet. Ist uns also der Drehungs-

Hosted by Google

vektor und mithin auch die Gröſse T der lebendigen Kraft gegeben, so bestimmt sich aus unserer Konstruktion die Richtung und auch die Gröſse des Impulses. Insbesondere können wir den Satz aussprechen:

Der Richtung nach liegt der Impulsvektor senkrecht zu derjenigen Ebene, welche dem Drehungsvektor bezüglich des Trägheitsellipsoides konjugiert ist.

Eine ganz analoge Konstruktion führt dazu, wenn der Impulsvektor gegeben ist, Gröſse und Richtung des Drehungsvektors zu bestimmen. Wir legen durch den Endpunkt des Impulsvektors die zu ihm normale Ebene. Ihre Gleichung wird:

$$Ap\xi + Bq\eta + Cr\zeta = G^2.$$

Unter den mit dem Trägheitsellipsoide ähnlichen und ähnlich gelegenen Flächen giebt es eine, welche unsere Ebene berührt. Es ist dieses das Ellipsoid:

$$A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 = \frac{G^4}{2T}.$$

Die Verbindungslinie des Berührungspunktes mit O liefert dann die Richtung des Drehungsvektors. Die Gröſse desselben erfahren wir, wenn wir irgend eine Lineardimension des letztgenannten Ellipsoides mit der entsprechenden Lineardimension des Trägheitsellipsoides vergleichen. Zwei solche Längen stehen in dem Verhältnisse $G^2 : \sqrt{2T}$. Da nun G gegeben, so ist hiernach die Gröſse von T und mithin auch die Länge des Drehungsvektors bekannt. —

Es wäre nicht schwer gewesen, die entsprechenden Entwickelungen gleich allgemeiner für den Fall des frei beweglichen starren Körpers zu geben. Wir können uns darauf beschränken, die Resultate für diesen Fall direkt hinzuschreiben, weil ihre Ableitung von den obigen Entwickelungen nur wenig verschieden ist.

Wir bezeichnen die Koordinaten der Impulsschraube mit X, Y, Z L, M, N, die der Bewegungsschraube, wie früher, mit x', y', z', p, q, r Am einfachsten bestimmen sich die ersteren Gröſsen durch die letzteren vermittelst der Gleichungen:

$$(16) \qquad \begin{cases} X = \dfrac{\partial T}{\partial x'}, \quad Y = \dfrac{\partial T}{\partial y'}, \quad Z = \dfrac{\partial T}{\partial z'}, \\ L = \dfrac{\partial T}{\partial p}, \quad M = \dfrac{\partial T}{\partial q}, \quad N = \dfrac{\partial T}{\partial r}. \end{cases}$$

T ist hierin der Ausdruck der lebendigen Kraft, als Funktion der Geschwindigkeitskoordinaten geschrieben. Um diesen Ausdruck möglichst bequem zu gestalten, legt man den Bezugspunkt in den Schwerpunkt und lässt das im Körper feste Koordinatensystem mit den durch den


Hosted by Google

Schwerpunkt gehenden Hauptaxen zusammenfallen. Dann wird nämlich einfach

$$T = \frac{m}{2}(x'^2 + y'^2 + z'^2) + \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2).$$

In den Impulskoordinaten geschrieben nimmt T die Form an:

$$T = \frac{1}{2m}(X^2 + Y^2 + Z^2) + \frac{1}{2}\left(\frac{L^2}{A} + \frac{M^2}{B} + \frac{N^2}{C}\right).$$

Hieraus erkennt man, daſs die Umkehrung der Gleichungen (16) lautet

$$(16') \quad \begin{cases} x' = \dfrac{\partial T}{\partial X}, & y' = \dfrac{\partial T}{\partial Y}, & z' = \dfrac{\partial T}{\partial Z}, \\ p = \dfrac{\partial T}{\partial L}, & q = \dfrac{\partial T}{\partial M}, & r = \dfrac{\partial T}{\partial N}, \end{cases}$$

wo bei den Differentiationen der zuletzt angegebene Ausdruck von T zu benutzen ist. Diese Gleichungen sind hier allerdings der Einfachheit wegen nur für eine spezielle Lage des Bezugspunktes und bei spezieller Wahl der Koordinatenaxen XYZ abgeleitet. Sie sind indessen hiervon unabhängig und gelten ebenso allgemein wie die Gleichungen (16).

Die Gleichungen (16) und (16′) sind in ihrem ersten auf die Bewegung des Schwerpunkts bezüglichen Teile mit den Gleichungen (7) und (7′) des ersten Paragraphen, in ihrem zweiten auf die Bewegung um den Schwerpunkt bezüglichen Teile mit den Gleichungen (4) und (4′) dieses Paragraphen genau identisch. Sie stellen die ersten und wichtigsten Bestimmungsgleichungen der Kinetik des freien starren Körpers dar.

Aus den oben angegebenen Ausdrücken für die lebendige Kraft ergiebt sich unmittelbar die folgende Gleichung

$$T = \frac{1}{2}(x'X + y'Y + z'Z + pL + qM + rN),$$

welche natürlich wieder direkt aus dem Ausdrucke (2) von pag. 90 für die bei einer unendlich kleinen Verrückung geleistete Arbeit abgeleitet werden kann. Die Klammer auf der rechten Seite dieser Gleichung hat natürlich eine einfache geometrische Bedeutung, welche nur von der Beschaffenheit der beiden Schrauben und ihrer gegenseitigen Lage, nicht von ihrer absoluten Stellung im Raume abhängt, und wird das *Moment der beiden Schrauben auf einander* genannt. Das Moment drückt sich in folgender Weise durch die Ganghöhen h und h' der beiden Schrauben, den kürzesten Abstand Δ, den Neigungswinkel φ der beiden Schraubenaxen und die Gröſse der Drehgeschwindigkeit Ω sowie die Gröſse des Schiebeimpulses S aus*):

$$\Omega S\{2\pi\Delta \sin\varphi + (h + h')\cos\varphi\}.$$

*) Vgl. F. Klein, Math. Ann. Bd. II, pg. 368. Ball bezeichnet l. c. den fraglichen Ausdruck als den „virtuellen Koeffizienten“ der Schrauben.


Hosted by Google

Der Begriff des Impulses beim allgemeinen Kreisel ist von Poinsot in den mehrfach zitierten Arbeiten vollständig entwickelt worden. Die Bezeichnung Poinsot's lautet etwas umständlich *couple d'impulsion* (in der deutschen Bearbeitung von Schellbach als „das die Bewegung anregende Kräftepaar“(!) übersetzt).

§ 4. Übertragung der vorhergehenden Resultate auf den Spezialfall des symmetrischen Kreisels.

Wir gehen jetzt speziell auf den symmetrischen Kreisel ein, nehmen also an, daſs unser Körper Rotationssymmetrie um die Figurenaxe besitzt. Es wird die Frage sein, welche Vereinfachungen sich in den vorangehenden kinetischen Betrachtungen aus dieser Annahme ergeben. Ebenso wie die Massenverteilung des Körpers besitzt natürlich auch das Trägheitsellipsoid Rotationssymmetrie um die Figurenaxe. Das Trägheitsellipsoid wird also eine Rotationsfläche. Auſser der Figurenaxe werden alle Axen der Äquatorebene des Kreisels Hauptaxen des Ellipsoids und Hauptträgheitsaxen des Körpers. Alle diese Hauptaxen und alle zugehörigen Hauptträgheitsmomente sind überdies einander gleich.

Wollen wir den Kreisel auf ein Hauptträgheitskreuz als Koordinatenkreuz beziehen, so brauchen wir nur etwa die Z-Axe in die Figurenaxe zu legen; dann fallen die Axen X und Y in die Äquatorebene und werden von selbst Hauptträgheitsaxen von gleichem Hauptträgheitsmoment. Bezeichnen wir die Hauptträgheitsmomente um die X-, Y- und Z-Axe wie früher mit A, B und C, so haben wir hiernach *die für den symmetrischen Kreisel charakteristische Beziehung*

$$A = B.$$

Die Gleichung des Trägheitsellipsoids lautet daher bei der jetzigen Wahl des Koordinatensystems

$$A(\xi^2 + \eta^2) + C\zeta^2 = 1;$$

der Ausdruck der lebendigen Kraft wird

$$T = \frac{1}{2}\left(A(p^2 + q^2) + Cr^2\right),$$

und die Relationen zwischen den Komponenten des Impulses und des Drehungsvektors schreiben sich in ihrer einfachsten Form:

$$L = Ap, \quad M = Aq, \quad N = Cr.$$

Wir wollen hier zunächst eine schon in der Einleitung in Aussicht gestellte Verallgemeinerung der Begriffsbestimmung des symmetrischen Kreisels anknüpfen. *Wir wollen einen starren Körper mit*

Hosted by Google

festem Unterstützungspunkte O immer dann einen symmetrischen Kreisel (oder Kreisel schlechtweg) nennen, wenn von den drei Hauptträgheitsmomenten durch O zwei einander gleich werden und überdies der Schwerpunkt auf der Axe des dritten Hauptträgheitsmomentes gelegen ist. Ein solcher Körper wird sich hinsichtlich aller Fragen, die die Rotation um den Punkt O unter dem Einflusse der Schwere betreffen, genau so verhalten, wie ein Körper, der die früher vorausgesetzte *geometrische* Rotationssymmetrie um die Figurenaxe besitzt. Desgleichen werden wir die Bezeichnung „Figurenaxe und Äquatorebene des Kreisels" auf die Figurenaxe und die Äquatorebene des Trägheitsellipsoides unseres allgemeineren Körpers übertragen. Die Äquatorebene ist alsdann dadurch ausgezeichnet, daſs ihre sämmtlichen Axen Hauptträgheitsaxen von dem gleichen Hauptträgheitsmomente A sind. Wir können von einem solchen Körper sagen, daſs er zwar keine *geometrische*, aber eine *mechanische Rotationssymmetrie um die Figurenaxe* besitzt.

Im Übrigen werden wir drei Unterarten von symmetrischen Kreiseln unterscheiden, je nachdem das Trägheitsellipsoid ein verlängertes, ein abgeplattetes Rotationsellipsoid oder im Speziellen eine Kugel ist. Wir sprechen demnach von einem *verlängerten*, einem *abgeplatteten Kreisel* oder einem *Kugelkreisel.* Der Kugelkreisel ist speziell dadurch ausgezeichnet, daſs jede durch O verlaufende Axe eine Hauptträgheitsaxe des Körpers darstellt. Da die Hauptaxen des Trägheitsellipsoides die reziproken Werte von $\sqrt{A}$ und $\sqrt{C}$ sind, so wird das Trägheitsellipsoid ein verlängertes, wenn $A > C$, ein abgeplattetes, wenn $A < C$. Im Grenzfalle $A = C$ geht das Trägheitsellipsoid in eine Kugel über. Demnach lautet die Bedingung für

einen verlängerten Kreisel:		$A > C$,
„ *abgeplatteten* „	:	$A < C$,
„ *Kugelkreisel* „	:	$A = C$.

Als Beispiel der drei Arten von Kreiseln mit *geometrischer* Rotationssymmetrie können wir allemal ein mit homogener Masse erfülltes Rotationsellipsoid nehmen, welches je nachdem verlängert, abgeplattet oder eine Kugel ist. Es ist aber auch leicht Beispiele von Kreiseln mit nur *mechanischer* Rotationssymmetrie zu konstruieren. In der That stellen vier Massenpunkte von gleicher Masse, welche die Ecken eines Quadrates bilden und mit einander durch starre massenlose Stäbe verbunden gedacht werden, einen *symmetrischen Kreisel mit abgeplattetem Trägheitsellipsoid* dar, welcher nur *mechanische* Rotationssymmetrie besitzt. Befestigen wir auf der Figurenaxe dieses Kreisels, d. h. auf der im Mittelpunkte O des Quadrates errichteten Normalen einen fünften

Hosted by Google

Massenpunkt, so erhalten wir je nach dem Abstande dieses Punktes von O und je nach seiner Masse einen verlängerten, einen abgeplatteten Kreisel oder einen Kugelkreisel von gleichfalls nur *mechanischer* Rotationssymmetrie. Insbesondere betonen wir des Späteren wegen, daſs wir auf die angegebene Weise immer einen *Kugelkreisel* herstellen können, *welcher ein beliebig vorgegebenes (positives oder negatives) Drehmoment der Schwere P besitzt, dessen Schwerpunkt also nicht mit O zusammenfällt.* Wir können zu dem Zwecke die Massen der zuerst genannten vier Punkte etwa gleich 1 gr und die Seiten des Quadrates, in deren Ecken sie befestigt sind, gleich 1 cm wählen. Über den fünften Punkt haben wir dann so zu verfügen, daſs (unter g die Beschleunigung der Schwere verstanden) seine Masse m und sein Abstand E von O bez. werden

$$m = \left(\frac{P}{g}\right)^2, \qquad E = \frac{g}{P}.$$

Wir führen nun die *Poinsotsche Konstruktion*, durch welche wir uns den Zusammenhang zwischen Impuls- und Drehungsaxe veranschaulichten, für den symmetrischen Kreisel durch. Die Vereinfachung, welche sich gegen früher ergiebt, besteht darin, daſs wir die Konstruktion in der Ebene ausführen können, nämlich in der durch die instantane Drehungsaxe gehenden Meridianebene. Dabei macht sich ein charakteristischer Unterschied zwischen unseren drei Kreiselarten bemerklich.

Wir denken uns etwa den Drehungsvektor gegeben. Durch die Axe OR desselben legen wir die Meridianebene FOR, welche wir im Folgenden als Zeichenebene benutzen werden. Die Figurenaxe zeichnen wir vertikal nach oben. Die Tangentialebene in dem Punkte R', dem Schnittpunkte der Drehungsaxe mit dem Trägheitsellipsoid oder einem der pag. 101 benutzten ähnlichen und ähnlich gelegenen Ellipsoide, steht senkrecht auf der Zeichenebene, mithin fällt das Lot von O auf diese Ebene in die Zeichenebene hinein. Statt der Tangentialebene genügt es daher die in unserer Meridianebene gelegene Tangente an das Trägheitsellipsoid zu betrachten. Im Einzelnen stellt sich die Sache so:

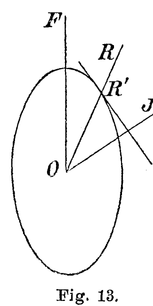


Fig. 13.

1. *Der verlängerte Kreisel*, $A > C$. Das Lot von O auf die Tangente in R' fällt auf die entgegengesetzte Seite der Rotationsaxe wie die Figurenaxe (vgl. Figur 13). *Bei dem verlängerten Kreisel liegt also die Rotationsaxe zwischen der Impuls- und der Figurenaxe.*

2. *Der abgeplattete Kreisel*, $A < C$. Das Lot von O auf die Tangente in R' findet sich in dem spitzen Winkel zwischen Figurenaxe

Hosted by Google

und Rotationsaxe (vgl. Fig. 14.) vor. *Beim abgeplatteten Kreisel liegt also die Impulsaxe zwischen der Rotations- und der Figurenaxe.*

3. *Der Kugelkreisel*, $A = C$. Da der Meridianschnitt des Trägheitsellipsoides in einen Kreis ausartet, geht das Lot von O auf die Tangente

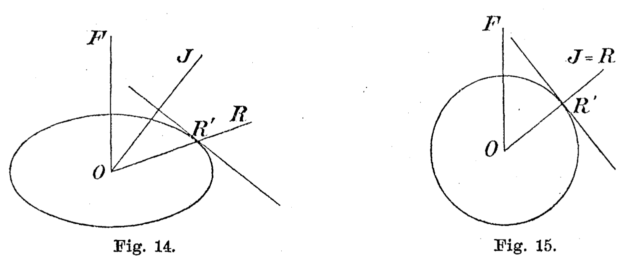


Fig. 14. Fig. 15.

durch den Berührungspunkt R' derselben hindurch (vgl. Fig. 15). *Beim Kugelkreisel fallen somit Impuls- und Rotationsaxe notwendig zusammen.*

Es verhält sich also nur der Kugelkreisel sozusagen „*isotrop*", d. h. in der Weise, dafs die Axe der Drehbewegung mit der Axe der die Bewegung erzeugenden Drehkraft zusammenfällt. Der abgeplattete und der verlängerte Kreisel zeigen das entsprechende Verhalten nur dann, wenn die Drehung um die Figurenaxe oder um eine Axe der Äquatorebene erfolgt, wie unmittelbar aus unserer Konstruktion ersichtlich ist. Alle diese Fälle sind übrigens in unserer obigen allgemeinen Regel enthalten, wonach der Drehungsvektor und der Impulsvektor dann und nur dann ihrer Richtung nach zusammenfallen, wenn einer der beiden Vektoren in einer Hauptträgheitsaxe des Körpers liegt. —

Während wir bisher den Bewegungszustand durch die Komponenten p, q, r ausgedrückt und entsprechend den Impuls durch die Komponenten L, M, N dargestellt haben, wollen wir uns nun die instantane Drehung des symmetrischen Kreisels durch die Anderung der Eulerschen Winkel φ, ψ, ϑ gegeben denken und nach den „zugehörigen Komponenten des Impulses" fragen. Übrigens gelten die folgenden Überlegungen auch für den allgemeinen Kreisel. Wir geben diese Entwickelungen erst hier beim symmetrischen Kreisel nur deshalb, weil die Formeln für jenen etwas lang werden.

Wie wir allgemein die zu einer Geschwindigkeitskoordinate hinzugehörige Kraftkoordinate definieren wollen, haben wir für den starren Körper pag. 92 bereits festgesetzt. (Wir verweisen auch auf die ganz ähnliche Betrachtung von pag. 78 beim einzelnen Massenpunkte). Was von den Kraftkoordinaten gesagt ist, gilt natürlich ebenso für die Impulskoordinaten; was über den frei beweglichen starren Körper entwickelt wurde, überträgt sich in unmittelbar verständlicher Weise auf den Kreisel.

Nach den angezogenen Regeln haben wir von den Gleichungen auszugehen, welche die alten Geschwindigkeitskoordinaten p, q, r durch die neuen $\varphi', \psi', \vartheta'$ ausdrücken. Es sind dieses die „kinematischen“ Gleichungen von pag. 45:

$$(1)\qquad \begin{cases} p = \psi' \sin\vartheta \sin\varphi + \vartheta' \cos\varphi, \\ q = \psi' \sin\vartheta \cos\varphi - \vartheta' \sin\varphi, \\ r = \varphi' + \psi' \cos\vartheta. \end{cases}$$

In Folge dessen hängen die neuen Impulskomponenten, die wir mit $[\Phi]$, $[\Psi]$, $[\Theta]$ bezeichnen, mit den alten folgendermafsen zusammen:

$$\begin{aligned} [\Phi] &= N, \\ [\Psi] &= L \sin\vartheta \sin\varphi + M \sin\vartheta \cos\varphi + N \cos\vartheta, \\ [\Theta] &= L \cos\varphi - M \sin\varphi. \end{aligned}$$

Hier ersetzen wir noch L, M, N durch ihre Ausdrücke in den $\varphi', \psi', \vartheta'$, die sich aus den Gleichungen (1) ergeben, indem wir diese bez. mit A, A und C multiplizieren. Dann bekommen wir:

$$(2)\qquad \begin{cases} [\Phi] = C(\varphi' + \psi' \cos\vartheta), \\ [\Psi] = C \cos\vartheta\, \varphi' + (C \cos^2\vartheta + A \sin^2\vartheta)\, \psi', \\ [\Theta] = A\vartheta'. \end{cases}$$

Wir weisen abermals auf den Zusammenhang hin, welcher zwischen den Impuls- und Geschwindigkeitskoordinaten und den partiellen Differentialquotienten der lebendigen Kraft besteht. Dafs dieser Zusammenhang, welchen wir von den Geschwindigkeitskoordinaten p, q, r her kennen, bestehen bleibt, wenn wir die neuen Koordinaten $\varphi', \psi', \vartheta'$ einführen, welche mit den alten linear zusammenhängen, ist bei unserer Definition der Impulskoordinaten an sich selbstverständlich. Wir mögen uns davon aber immerhin wie folgt überzeugen. Der Ausdruck der lebendigen Kraft

$$T = \frac{1}{2}\left(A(p^2 + q^2) + Cr^2\right)$$

lautet den Gleichungen (1) zufolge in den Koordinaten $\varphi', \psi', \vartheta'$ geschrieben:

$$(3)\qquad T = \frac{1}{2}\left(A(\vartheta'^2 + \sin^2\vartheta \,.\, \psi'^2) + C(\varphi' + \cos\vartheta \,.\, \psi')^2\right).$$

Hieraus ergiebt sich aber unmittelbar als Analogon zu den Gleichungen (4) des vorigen Paragraphen

$$(4)\qquad [\Phi] = \frac{\partial T}{\partial \varphi'}, \qquad [\Psi] = \frac{\partial T}{\partial \psi'}, \qquad [\Theta] = \frac{\partial T}{\partial \vartheta'}.$$

Ebenso verifiziert man leicht, dafs die zu den Gleichungen (4′) analogen Beziehungen statthaben.

Hosted by Google

Schliefslich fragen wir nach der *geometrischen Bedeutung unserer Impulskoordinaten* $[\Phi]$, $[\Psi]$, $[\Theta]$; wir folgern diese aus der geometrischen Bedeutung, welche der Ausdruck (2′) von pag. 91 für die Arbeit einer unendlich kleinen Verrückung unseres Kreisels besitzt.

Ebenso, wie wir pag. 96 den Ausdruck der lebendigen Kraft auffassen konnten als das halbe Produkt aus der Länge des Drehungsvektors in die Projektion des Impulsvektors auf diesen, so werden wir jetzt sagen: *Der Ausdruck*

$$dA = (D^x p + D^y q + D^z r)\, dt$$

für die Arbeit, welche eine beliebige an unserm Kreisel angreifende Drehkraft D bei der unendlich kleinen Verrückung $(p, q, r)\, dt$ leisten würde, ist bis auf den Faktor dt gleich dem Produkt aus der Gröfse der Drehgeschwindigkeit in die Projektion der Drehkraft auf die Axe der letzteren. Führen wir nun unsere Geschwindigkeitskoordinaten φ', ψ', ϑ' statt der p, q, r ein, so behält der Arbeitsausdruck, wie wir wissen, seine frühere Form. Die vorstehende Gleichung geht daher, wenn wir die den φ', ψ', ϑ' zugehörigen Koordinaten von D bez. mit Φ, Ψ, Θ bezeichnen, in die folgende über:

$$dA = (\Phi\varphi' + \Psi\psi' + \Theta\vartheta')\, dt.$$

Wir betrachten nun speziell eine unendlich kleine Drehung, für welche $\psi' = \vartheta' = 0$ ist, so dafs die entsprechende Arbeit gleich $\Phi\varphi' dt$ wird. In diesem Falle liegt, da φ' eine Drehung um die Figurenaxe bedeutet, der Drehungsvektor in der Figurenaxe. Aus der geometrischen Bedeutung von dA folgt dann sofort, *dafs Φ die senkrechte Projektion des Vektors D auf die Figurenaxe bedeutet.* Ferner fallen die Drehungsvektoren ψ' und ϑ' bez. in die Richtung der Vertikalen und der Knotenlinie. Hieraus folgt in gleicher Weise, *dafs Ψ und Θ die senkrechten Projektionen des Vektors D auf die Vertikale und die Knotenlinie darstellen.* Genau dieselbe geometrische Bedeutung kommt natürlich im Speziellen unseren Impulskoordinaten $[\Phi]$, $[\Psi]$, $[\Theta]$ zu. *Diese Gröfsen sind bez. gleich den senkrechten Projektionen des Impulsvektors auf die Figurenaxe, die Vertikale und die Knotenlinie.*

Wir können ohne weiteres das Resultat der letzten Betrachtung dahin verallgemeinern, dafs wir sagen: *Wenn wir unter Zugrundelegung von irgend drei schiefwinkligen Axen den Drehungsvektor in Komponenten parallel diesen Axen zerlegen, erhalten wir die zugehörige Zerlegung des Kraft- oder Impulsvektors, indem wir diesen senkrecht auf jene Axe projizieren.*



§ 5. Die beiden fundamentalen Sätze über das Verhalten des Impulsvektors beim Ablauf der Bewegung.

Während wir uns bisher über den Impuls orientierten, welcher einem instantanen Bewegungszustande des Körpers entspricht oder, was dasselbe ist, über den instantanen Bewegungszustand, welcher aus einem gegebenen Impulse resultiert, wird es unsere nächste Aufgabe sein, den Ablauf der Bewegung in der Zeit zu untersuchen. Die bisher erörterte Beziehung zwischen den Vektoren des Impulses und der instantanen Drehung war ganz unabhängig von den äufseren Umständen, unter denen die Bewegung vor sich geht, d. h. von den kontinuierlichen Kräften, die auf den starren Körper wirken. Die weiteren Betrachtungen aber werden wesentlich hierdurch bestimmt. Wir machen in dieser Hinsicht einerseits die Annahme, dafs unser Körper überhaupt keinen äufseren Kräften, insbesondere auch nicht der Schwerewirkung ausgesetzt ist. Andrerseits werden wir beliebige kontinuierliche Kräfte zulassen. Wir argumentieren zunächst auf den frei beweglichen starren Körper. Dabei stellen wir der *Betrachtung des Bewegungszustandes* die *Untersuchung des Impulses* voran. Wir fragen also in erster Linie: *wie ändert sich der Impuls unseres Körpers bei der kräftefreien Bewegung?* Die Änderung des Bewegungszustandes leiten wir erst später aus dem Verhalten des Impulses her. Die Antwort auf unsere Frage lautet einfach folgendermafsen:

Der Impuls ändert sich überhaupt nicht; er bleibt während der Bewegung im Raume konstant.

Wir begründen diesen fundamentalen Satz von der Kinetik des einzelnen Massenpunktes aus möglichst elementar in folgender Weise.

Wir gehen von einem einzelnen Massenteilchen P aus, welches frei beweglich und keinen Kräften unterworfen ist. Der Impuls eines solchen Teilchens bleibt, wie wir wissen, nach Richtung und Gröfse im Raume konstant. (Galileisches Trägheitsgesetz.)

Betrachten wir nun zwei Massenteilchen P und P', welche starr verbunden und übrigens keinen äufseren Kräften ausgesetzt sind. Die Wirkung der starren Verbindung ersetzen wir dynamisch durch Kräfte u. zw. haben wir im Punkte P eine nach P' und in P' eine gleich grofse nach P gerichtete Kraft. (Newtons lex tertia.) Die gemeinsame Gröfse dieser beiden Kräfte hängt von der Inanspruchnahme der starren Verbindung ab und bemifst sich nach Gröfse und Richtung der gerade geltenden Einzelimpulse von P und P'. Fügen wir diese Kräfte — wir können sie Reaktionskräfte nennen — hinzu, so dürfen wir unsere beiden Massenpunkte weiterhin wie frei bewegliche Punkte

behandeln. Nun ändern sich in Folge des Hinzutretens der Reaktionskräfte die Einzelimpulse von P und P' kontinuierlich, indem sie sich mit den zu den Reaktionskräften gehörigen unendlich kleinen Stöfsen geometrisch addieren (Newtons lex secunda). Anders ist es mit dem Gesamtimpulse des von den beiden Massenpunkten gebildeten Systems. Wir konstruieren denselben, indem wir die Einzelimpulse der beiden Punkte nach den Regeln der elementaren Statik zusammensetzen. Bei dieser Konstruktion heben sich aber offenbar die beiden entgegengesetzt gleichen Reaktionskräfte in jedem Momente gegenseitig auf. Die resultierende Stofsschraube verhält sich also geradeso, als ob unsere Reaktionskräfte nicht vorhanden und unsere Massenpunkte frei wären. *Sie bleibt mithin für die ganze Dauer der Bewegung konstant.*

Nicht anders verhält sich ein System von drei starr mit einander verbundenen Massenpunkten, welche keinen äufseren Kräften unterworfen sind. Hier haben wir nicht ein, sondern drei Paare entgegengesetzt gleicher Reaktionskräfte zu betrachten, welche in den Seiten des von unsern Punkten gebildeten Dreiecks wirken. Wiederum werden durch diese die zu den Systempunkten gehörigen Einzelimpulse successive abgeändert. Für die Konstruktion der zum Gesamtsystem gehörigen Stofsschraube aber kommen die Reaktionskräfte nicht in Betracht; diese Schraube verhält sich genau so, wie wenn unsere drei Massenpunkte sich nach dem Galileischen Trägheitsgesetz frei im Raume bewegten.

Dieselbe Überlegung überträgt sich unmittelbar auf den Fall beliebig vieler irgendwie verbundener Massenpunkte und weiterhin auf ein den Raum kontinuierlich erfüllendes Massensystem, welches von keinen äufseren Kräften angegriffen wird. Sie gilt sogar für den allgemeineren Fall eines nicht starren Systems, zwischen dessen Punkten lediglich innere Kräfte wirken, die dem Prinzip der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung genügen, also z. B. für einen elastischen Körper, für das Planetensystem oder für ein Flüssigkeitsquantum.

Im Falle des frei beweglichen starren Körpers sprechen wir das Resultat hier ausdrücklich als den ersten der den Ablauf der Bewegung regelnden Sätze aus:

Satz I: *Die Impulsschraube des starren Körpers bleibt bei der kräftefreien Bewegung im Raume konstant.*

Es wird nützlich sein, diesen Satz in die Sprache der gewöhnlichen analytischen Mechanik zu übertragen. Wir berechnen zu dem Zwecke die Komponenten der genannten Schraube nach der Regel von pag. 85; für P_i^x, P_i^y, P_i^z haben wir dort die Komponenten der Einzelimpulse aller Massenpunkte zu nehmen, welche den Körper konstituieren, haben also zu setzen:

Hosted by Google

$$P_i^x = x_i' \Delta m_i, \quad P_i^y = y_i' \Delta m_i, \quad P_i^z = z_i' \Delta m_i$$

und haben schliefslich von der Summation zur Integration überzugehen. So erhalten wir zunächst:

$$S^x = \int x' \, dm = c',$$

$$S^y = \int y' \, dm = c'',$$

$$S^z = \int z' \, dm = c'''.$$

Die hier auftretenden Integrale sind nichts anderes wie die (mit m multiplizierten) Schwerpunktsgeschwindigkeiten. *Unser Satz besagt insoweit, dafs die Geschwindigkeit des Schwerpunktes eine Konstante ist; er ist identisch mit dem einfachsten Falle des sog. Schwerpunktsatzes.*

Wir berechnen in gleicher Weise die Drehmomente D^x, D^y, D^z unserer Schraube um O. Nach denselben Regeln wie oben ergiebt sich:

$$D^x = \int (z' y - y' z) \, dm = c^{IV},$$

$$D^y = \int (x' z - z' x) \, dm = c^{V},$$

$$D^z = \int (y' x - x' y) \, dm = c^{VI}.$$

Auch diese Gleichungen sind uns aus der gewöhnlichen Mechanik wohlbekannt; es sind dieses einfach die sog. Flächensätze. *Unser Satz ist also in seinem zweiten auf die Drehkomponenten bezüglichen Teile identisch mit den Flächensätzen*, welche, wie bekannt, bei der freien Bewegung des starren Körpers in Kraft treten.

Man bemerke noch insbesondere, dafs unsere geometrische Betrachtung gewisse einfache Integrationen impliziert, welche man bei der analytischen Ableitung auszuführen gezwungen ist. Das Äquivalent derselben bestand in der Erkenntnis, dafs die unendlich kleinen Zusatzstöfse, welche von den Reaktionskräften herrühren, sich bei der Bildung des Gesamtimpulses gegenseitig zerstören.

Wir hätten hiernach den Impuls des Körpers geradezu durch die Konstanten der Schwerpunkt- und der Flächensätze definieren können; indessen scheint uns der hier befolgte umgekehrte Weg bei weitem instruktiver. Unsere Ableitung zwang uns, bis auf die eigentliche Wurzel der Sätze, die mechanischen Prinzipien, zurückzugehen, welche sich sonst leicht hinter den Formeln verbergen, und liefs, wie wir glauben, an Durchsichtigkeit nichts zu wünschen übrig. Sie entspricht übrigens durchaus den Tendenzen Poinsots, welcher seinerseits einen

Hosted by Google

viel weniger einfachen Beweis*) mitteilt. Dagegen findet sich eine der obigen ganz ähnliche Betrachtung in einer schönen Arbeit von R. B. Hayward**), auf welche wir noch wiederholt Bezug nehmen werden.

Die Übertragung unseres Satzes auf den Körper mit festem Unterstützungspunkte ist nun unmittelbar gegeben. Wir müssen unsere Impulsschraube jetzt von dem festgehaltenen Punkte O aus in einen Schiebestoſs S und einen Drehstoſs D zerlegen. Ersterer wird durch die Befestigung des Körpers d. h. die Reaktionskraft des Unterstützungspunktes aufgehoben. So bleibt nur der Drehstoſs übrig, und dieser ist es, den wir beim Kreisel den Impuls nannten. Mithin gilt wieder der dem obigen analoge

Satz Ia: *Der Impulsvektor des in einem seiner Punkte unterstützten Körpers bleibt während der kräftefreien Bewegung nach Richtung und Gröſse im Raume konstant.*

Dieser Satz deckt sich mit der Aussage, daſs die *Flächensätze* im vorliegenden Falle in Gültigkeit bleiben, während die *Schwerpunktsätze* selbstverständlich auſser Kraft treten. Zugleich erscheint er als genaues Analogon zu dem Galilei'schen Trägheitsgesetze, wenn wir dem letzteren die Form des Satzes I von pag. 74 geben. —

Es möge jetzt zweitens vorausgesetzt werden, daſs *beliebige kontinuierlich wirkende äuſsere Kräfte* in den Punkten unseres Körpers wirken, wobei dieser zunächst wiederum als frei beweglich angenommen werden möge. Sein Impuls wird dann nicht mehr konstant bleiben, und es wird die Frage sein, in welcher Weise er sich verändert.

Wir stellen dieselbe Betrachtung an wie oben. Bestände der Körper aus einem einzelnen Punkte, so würde sich sein Impuls mit dem den äuſseren Kräften in jedem Momente entsprechenden unendlich kleinen Stoſse successive nach der Regel vom Parallelogramm zusammensetzen (Newtons lex secunda). Besteht er aus zwei Punkten von unveränderlichem Abstande, so werden die Einzelimpulse dieser beiden Punkte sowohl durch die zwischen ihnen wirkenden Reaktionskräfte, welche uns die starre Verbindung ersetzen, als durch die äuſseren Kräfte abgeändert. Achten wir aber auf den Gesamtimpuls des von den beiden Punkten gebildeten Systems, so heben sich bei der Konstruktion die Reaktionskräfte heraus. Die betreffende Stoſsschraube besteht also aus einem konstanten Teile, welcher den

*) Théorie nouvelle . . ., Kap. II, § 5.

**) On a direct method of estimating velocities with respect to axes moveable in space. Cambridge Phil. Transact. Vol. X, 1854.

Hosted by Google

ursprünglichen Impulsen unserer beiden Punkte entspricht, und einem veränderlichen Teile, welcher lediglich von den zu den äufseren Kräften in dem betreffenden Zeitintervalle gehörigen Zusatzstöfsen herrührt. Wir können so verfahren, dafs wir zuvörderst diese letzteren hinsichtlich eines Bezugspunktes O zu einem unendlich kleinen Schiebestofs dS und einem Drehstofse dD in jedem Momente zusammensetzen, und dafs wir dann dS und dD mit den entsprechenden Komponenten S und D der jeweiligen Impulsschraube durch die Parallelogrammkonstruktion kombinieren. Dies Verfahren bringt den folgenden Satz in Evidenz, den wir sogleich auf ein starres System von beliebig vielen Punkten und weiterhin auf einen starren Körper von kontinuierlicher Massenverteilung verallgemeinern (von allgemeineren Systemen mit nur inneren Kräften gar nicht zu reden):

Satz II: *Die Impulsschraube eines frei beweglichen starren Körpers, auf welchen beliebige äufsere Kräfte einwirken, ändert sich während der Bewegung so, dafs sie sich in jedem Momente mit der von den äufseren Kräften herrührenden unendlich kleinen Stofsschraube nach den Regeln der Statik zusammensetzt.*

Diesem Satz entspricht, dafs die einfachen Schwerpunkt- und Flächensätze bei der von äufseren Kräften beeinflufsten Bewegung im allgemeinen zu gelten aufhören. Das System der äufseren Kräfte mufs eine besondere Bedingung erfüllen, es mufs, wie man nach dem Vorgange von Lie sagt, eine gewisse infinitesimale Transformation, u. zw. eine infinitesimale Rotation oder Translation zulassen, damit einer der einfachen Flächen- oder Schwerpunktsätze zu Recht besteht. In diesem Falle würde eine Dreh- oder Schiebekomponente der den äufseren Kräften entsprechenden Kraftschraube verschwinden; gleichzeitig würde unsere geometrische Konstruktion sofort ergeben, dafs eine Komponente der Impulsschraube während der Bewegung konstant bleibt.

Man beachte noch die eigentümlich ungeeignete und unsymmetrische Bezeichnungsweise, deren man sich in der analytischen Mechanik hinsichtlich der Schwerpunkt- und Flächensätze bedient. Man spricht von dem Bestehen eines Flächensatzes nur dann, wenn das Drehmoment der äufseren Kräfte um eine Axe gleich Null ist, d. h. nur dann, wenn der Drehbestandteil des Impulses eine in der Zeit unveränderliche Komponente besitzt. Dagegen spricht man von den Schwerpunktsätzen auch dann, wenn äufsere Kräfte wirksam sind, wenn also der Schiebebestandteil des Impulses beim Ablauf der Bewegung beliebig geändert wird. Diese Diskrepanz ist wesentlich dadurch bedingt, dafs man in den gewöhnlichen Darstellungen den Begriff des Impulses, der die Flächen- und Schwerpunktsätze organisch verbindet, nicht be-

Hosted by Google

rücksichtigt. Der naturgemäſse Sprachgebrauch wäre offenbar der, daſs man das Wort Flächensatz ebenso allgemein faſst, wie das Wort Schwerpunktsatz, daſs man also unter den Flächensätzen die Thatsache versteht, daſs der Drehstoſs des Impulses sich mit dem Drehstoſs der äusseren Kräfte successive geometrisch addiert. Im Fall des konstanten Dreh- und Schiebestoſses wird man dann, wie oben geschehen, von den „einfachen“ Flächen- und Schwerpunktsätzen sprechen.

Wir machen abermals den Übergang zu dem Körper mit festem Unterstützungspunkte, bei welchem der Bestandteil S des Impulses durch die Reaktionskraft in O aufgehoben wird. Unsere obige Überlegung führt dann zu dem

Satze IIa: *Der Impulsvektor des Kreisels, auf welchen beliebige äuſsere Kräfte kontinuierlich einwirken, ändert sich in jedem Momente so, daſs seine Änderung nach Richtung und Gröſse dem von den äuſseren Kräften verursachten unendlich kleinen Drehstoſse gleichkommt.*

Dieser Satz*) stimmt der Form nach genau mit dem zweiten Newtonschen Axiom überein, sofern wir letzteres wie in Satz II pag. 74 geschehen, aussprechen.

§ 6. Der Satz von der lebendigen Kraft.

Die vorangehenden Impulssätze bestimmen zusammen mit unserer früheren Relation zwischen Impuls- und Drehungsvektor die Bewegung des Kreisels ebenso vollständig, wie die Newtonschen Axiome, denen sie nach Form und Inhalt genau entsprechen, die Mechanik des einzelnen Massenpunktes regeln. In der That sind die successiven Änderungen des Impulses im Raume durch unsere letzten Betrachtungen festgelegt. Aus diesen folgt aber die Lage des Drehungsvektors im Körper und also auch die jeweilige Bewegung vermöge der Ergebnisse des § 3.

Es wird daher weiterhin nicht nötig sein, auf den Aufbau des Körpers aus seinen einzelnen Massenteilchen zurückzukommen und die Bewegung der letzteren vom Standpunkte der Punktmechanik (mittelst der Newtonschen Axiome) zu verfolgen. Wenn wir dies später doch gelegentlich z. B. gleich am Ende dieses Paragraphen thun werden, so geschieht es nur sekundär aus didaktischen Gründen, weil uns die Punktmechanik durch allgemeine Gewöhnung besonders geläufig ist.

*) In einer Monographie über den Kreisel: *A. de Saint-Germain, Résumé de la théorie du mouvement d'un solide autour d'un point fixe,* Paris 1887, wird dieser Satz mit Unrecht Résal zugesprochen. Der erste Band des *Traité de Mécanique générale* von Résal, in welchem pag. 247 der fragliche Satz vorkommt, ist erst 1873 erschienen, während doch unser Satz (man vgl. z. B. die Jahreszahl der Haywardschen Abhandlung) viel älter ist.

Hosted by Google

In den vorangehenden Impulssätzen mufs insbesondere auch, soweit es sich um den Kreisel handelt, der Satz von der lebendigen Kraft enthalten sein. In der That bildet dieser, wie wir sogleich zeigen werden, nur ein Korollar unserer Impulssätze.

Wir setzen zunächst voraus, dafs keine äufseren Kräfte auf unsern Kreisel wirken, abgesehen natürlich von der Reaktionskraft im Unterstützungspunkte und solchen Kräften, welche durch diese aufgehoben werden.

Der Ausdruck der doppelten lebendigen Kraft

$$Lp + Mq + Nr \tag{1}$$

bedeutet, wie pag. 96 erwähnt, geometrisch das skalare Produkt aus Impuls- und Drehungsvektor und hat als solches einen Wert, welcher nur von der Gröfse und gegenseitigen Lage der beiden Vektoren, nicht von ihrer Stellung im Raume abhängt.

Wir betrachten vorübergehend eine gleichförmige Drehung des Körpers um die Axe $p:q:r$, welche letztere wir uns im Körper und also auch im Raume festgehalten denken, während gleichzeitig der Vektor (L, M, N) im Raume fest gedacht wird. Die Änderung des obigen skalaren Produktes bei dieser Bewegung, d. h. die Gröfse

$$p\,dL + q\,dM + r\,dN$$

ist gleich Null, weil die Gröfse und relative Lage unserer beiden Vektoren nicht geändert wird.

Die wirklich stattfindende kräftefreie Bewegung kann aber, was das Verhalten des Impulsvektors sowie die Bewegung des Körpers betrifft, in jedem Momente mit einer Bewegung der hier vorausgesetzten Beschaffenheit in erster Annäherung identifiziert werden. Es gilt daher auch für die wirkliche Bewegung die Gleichung

$$p\,dL + q\,dM + r\,dN = 0. \tag{2}$$

Wir bemerken sodann, dafs nach den Gleichungen (4′) des § 3 für die wirklich stattfindende Bewegung wird

$$p = \frac{\partial T}{\partial L}, \quad q = \frac{\partial T}{\partial M}, \quad r = \frac{\partial T}{\partial N},$$

unter T den in den Impulskoordinaten geschriebenen Ausdruck der lebendigen Kraft verstanden. Daraufhin geht die linke Seite der Gleichung (2) über in das vollständige Differential der lebendigen Kraft. Wir erhalten daher die Gleichung $dT = 0$ oder integriert $T = h$, welche den Satz liefert:

Bei der kräftefreien Bewegung des Kreisels ändert sich die lebendige Kraft des Körpers nicht.



Die *Erhaltung der lebendigen Kraft* folgt hiernach, wie wir sehen, in der That unmittelbar aus der *Erhaltung des Impulses*.

Mögen nun andrerseits beliebige äufsere Kräfte auf unsern Kreisel wirken. Wir setzen diese hinsichtlich des Unterstützungspunktes O zu einer Schiebekraft und einer Drehkraft zusammen. Von der ersteren können wir absehen, die Komponenten der letzteren in demjenigen Koordinatensystem, auf welches sich auch die L, M, N beziehen, bezeichnen wir mit $\mathsf{\Lambda}, \mathsf{M}, \mathsf{N}$. Der Impulsvektor im Raume erfährt jetzt in dem Zeitteilchen dt die Verrückungen $\mathsf{\Lambda}\,dt$, $\mathsf{M}\,dt$, $\mathsf{N}\,dt$ (Satz IIa des vorigen §). Derselbe behält also seine Gröfse und Lage im Raume nicht bei. Wir müssen in jedem Momente die durch die äufseren Kräfte hervorgerufene Verschiebung des Impuls-Endpunktes rückgängig machen, um einen im Raume festen Punkt zu erhalten. Die Verrückung dieses Punktes relativ gegen den Körper beträgt, in Komponenten aufgelöst,

$$dL - \mathsf{\Lambda}\,dt, \quad dM - \mathsf{M}\,dt, \quad dN - \mathsf{N}\,dt.$$

Seine Verbindungsstrecke mit O liefert einen Vektor, welcher am Ende des Zeitteilchens dt dieselbe Gröfse und relative Lage gegen den Drehungsvektor besitzt, wie der Vektor des Impulses zu Beginn des Zeitteilchens.

Von diesem Vektor wird hiernach dasselbe gelten, wie bei der kräftefreien Bewegung von dem Vektor des Impulses selbst. Die Gleichung (2) ist daher jetzt zu ersetzen durch die Gleichung

$$(3) \qquad p\,dL + q\,dM + r\,dN = (\mathsf{\Lambda} p + \mathsf{M} q + \mathsf{N} r)\,dt.$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist wieder das vollständige Differential der lebendigen Kraft (dT); die rechte Seite stellt (nach Gl. (2′) von pag. 91) die während der Zeit dt von den äufseren Kräften geleistete Arbeit (dA) dar. Wir haben also den Satz:

Bei der durch äufsere Kräfte beeinflufsten Bewegung des Kreisels ändert sich die lebendige Kraft in jedem Momente so, dafs ihre Änderung gleich der von den äufseren Kräften geleisteten unendlich kleinen Arbeit ist, ($dT = dA$).

Es kann insbesondere vorkommen, dafs die endliche Arbeit, welche die äufseren Kräfte an unserem Körper leisten, während wir diesen von einer festen Anfangslage in irgend eine neue Lage bringen, nur von dieser Endlage, nicht von den durchlaufenen Zwischenlagen der Bewegung abhängt. Den negativen Wert dieser Arbeit nennt man bekanntlich die *potentielle Energie* U und bezeichnet entsprechend T als die kinetische Energie, $T + U$ als die Gesamtenergie des Körpers. Alsdann ist dA das vollständige Differential der Funktion $-U$. Der


Hosted by Google

vorstehende Satz nimmt in Folge dessen die einfachere Form an $dT = -dU$, oder $T + U = h$ und kann folgendermaſsen ausgesprochen werden:

Wenn die die Bewegung beeinflussenden äuſseren Kräfte ein „Potential" haben, ändert sich die Gesamtenergie des Körpers bei der Bewegung nicht.

Auch dieser *Satz von der Änderung der kinetischen oder der Erhaltung der Gesamtenergie* ist also, wie wir sehen, eine einfache Folge unseres *Satzes von der Änderung des Impulses.*

Entsprechend beweisen wir den Satz von der lebendigen Kraft für die Bewegung des freien starren Körpers.

Wir haben dabei den Ausdruck (1) durch den folgenden Ausdruck

(4) $$Xx' + Yy' + Zz' + Lp + Mq + Nr$$

zu ersetzen, in welchem x', y', z', p, q, r die Koordinaten der instantanen Bewegungsschraube, X, Y, Z, L, M, N die der Impulsschraube bedeuten. Dieser Ausdruck hat, wie pag. 103 hervorgehoben, eine geometrische Bedeutung, welche von der Stellung der beiden Schrauben im Raume unabhängig ist und nur von ihren Ganghöhen sowie von ihrer relativen Lage abhängt.

Es handle sich zunächst um die kräftefreie Bewegung. Wir führen die unendlich kleine Schraubung $(x', y', z', p, q, r)\,dt$ aus und betrachten die relative Bewegung der Impulsschraube gegen den Körper. Die Bewegungsschraube denken wir uns im Körper und also auch im Raume fest; die Impulsschraube, welche nach dem vorigen Paragraphen im Raume fest ist, wird dabei um die Bewegungsschraube herumgeschraubt, wobei sie ihre relative Lage gegen diese und ihre Ganghöhe nicht verändert. Bezeichnen dX, dY, dZ, dL, dM, dN die relativen Koordinatenänderungen des Impulses, so gilt mithin für die hier betrachtete und also auch für die wirkliche Bewegung:

(5) $$x'dX + y'dY + z'dZ + p\,dL + q\,dM + r\,dN = 0.$$

Die linke Seite ist aber den Gleichungen (16') von pag. 103 zufolge das vollständige Differential dT der lebendigen Kraft; wir haben also $dT = 0$ oder $T = h$.

Wiederum bleibt also bei der kräftefreien Bewegung des starren Körpers die lebendige Kraft ungeändert.

Auf den Fall, daſs beliebige äuſsere Kräfte die Bewegung des starren Körpers beeinflussen, verallgemeinert sich die Betrachtung in unmittelbar ersichtlicher Weise.

Wir setzen die äuſseren Kräfte zunächst hinsichtlich des Bezugspunktes zu einer Schiebekraft $(\Xi, \mathsf{H}, \mathsf{Z})$ und einer Drehkraft $(\Lambda, \mathsf{M}, \mathsf{N})$ zusammen. Die Anderungen der Impulskoordinaten relativ gegen



den Raum während des Zeitteilchens dt sind nach dem Satze II des vorigen Paragraphen bez. gleich $\Xi\,dt$, $\mathsf{H}\,dt$, $\mathsf{Z}\,dt$, $\Lambda\,dt$, $\mathsf{M}\,dt$, $\mathsf{N}\,dt$. Die Änderungen dX, dY, dZ, dL, dM, dN der Impulskoordinaten relativ gegen den Körper kommen daher nur zum Teil auf die unendlich kleine Schraubung $(x', y', z', p, q, r)\,dt$; zum anderen Teile werden sie durch die äufseren Kräfte bewirkt. Wir müssen die den letzteren entsprechenden Änderungen rückgängig machen, um eine Schraube zu erhalten, welche relativ zu der Bewegungsschraube am Ende des Zeitteilchens dt ebenso liegt, wie die Impulsschraube zu Beginn der unendlich kleinen Bewegung. Mit anderen Worten wir müssen in Gleichung (5) die Gröfsen $dX, \ldots, dN$ bez. ersetzen durch

$$dX - \Xi\,dt,\quad dY - \mathsf{H}\,dt,\quad dZ - \mathsf{Z}\,dt,\quad dL - \Lambda\,dt,\quad dM - \mathsf{M}\,dt,\quad dN - \mathsf{N}\,dt.$$

So ergiebt sich

$$(6)\qquad \begin{aligned} &x'dX + y'dY + z'dZ + p\,dL + q\,dM + r\,dN \\ &= (\Xi x' + \mathsf{H} y' + \mathsf{Z} z' + \Lambda p + \mathsf{M} q + \mathsf{N} r)\,dt. \end{aligned}$$

Die linke Seite ist aber das vollständige Differential der lebendigen Kraft, die rechte Seite bedeutet nach Gleichung (2) von pag. 90 die von den äufseren Kräften geleistete Arbeit. Wir haben also $dT = dA$:

Die Änderung der lebendigen Kraft ist in jedem Momente gleich der von den äufseren Kräften geleisteten Arbeit.

Es ist vielleicht nützlich, den Beweis dieses Satzes nachträglich noch einmal nach der Methode des vorigen Paragraphen zu führen, indem wir uns den starren Körper in seine einzelnen Massenteilchen aufgelöst denken. Dabei genügt es, ein System von zwei starr verbundenen Massenteilchen zu betrachten.

Wir bemerken vorab, dafs die Änderung der lebendigen Kraft des einzelnen Massenpunktes auf Grund der Formel

$$dT = x'\,d[X] + y'\,d[Y] + z'\,d[Z]$$

gleich ist dem skalaren Produkt aus dem Geschwindigkeitsvektor (x', y', z') in die Änderung des Impulsvektors $([X], [Y], [Z])$.

In jedem unserer beiden starr verbundenen Punkte 1 und 2 denken wir uns den Vektor des Einzelimpulses 1 und 2 konstruiert, welcher mit dem Geschwindigkeitsvektor 1 und 2 der Richtung nach zusammenfällt, sowie die Reaktionskräfte 1 und 2, welche uns die starre Verbindung der Punkte ersetzen und in der Verbindungslinie der Punkte wirken. Äufsere Kräfte mögen nicht vorhanden sein.

Eine augenfällige Folge der starren Verbindung ist diese, dafs die Projektion des Geschwindigkeitsvektors 1 auf die Verbindungslinie gleich der des Geschwindigkeitsvektors 2 ist. Statt dessen können wir auch auf Grund der Newtonschen lex tertia sagen:

Hosted by Google

Die Summe der skalaren Produkte aus den Geschwindigkeitsvektoren in die zugehörigen Reaktionskräfte ist gleich Null.

In der That verwandelt sich die Gleichheit der genannten Projektionen wegen des entgegengesetzten Sinnes der beiden Reaktionskräfte in die entgegengesetzte Gleichheit der genannten skalaren Produkte. Nun sind aber die Reaktionskräfte nach Richtung und Gröfse proportional mit den Änderungen der Einzelimpulse (Newtons lex secunda). *Also wird auch die Summe der skalaren Produkte aus den Änderungen der Einzelimpulse in die einzelnen Geschwindigkeitsvektoren gleich Null.*

Nach der vorangestellten Bemerkung sind aber die beiden Terme dieser Summe bez. gleich den Änderungen der lebendigen Kräfte unserer beiden Massenpunkte. Die Summe selbst ist also gleich der Änderung der lebendigen Kraft des Systems.

Mithin bleibt die lebendige Kraft unseres Systems ebenso wie beim einzelnen Massenpunkt, der sich nach dem Galileischen Trägheitsgesetz bewegt, konstant.

Die Verallgemeinerung unserer Überlegung auf den Fall, dafs äufsere Kräfte wirksam sind, oder dafs beliebig viele Punkte zu einem starren System verbunden sind, sowie die Spezialisierung auf den Fall des Kreisels ist so einfach, dafs wir sie übergehen können.

Bemerken wir noch, dafs der analytische Beweis, welchen man gewöhnlich vom Satze der lebendigen Kraft giebt, den vorstehenden geometrischen Beweisen genau parallel läuft. Und zwar entspricht der letzten Betrachtung, in welcher wir auf die einzelnen Massenteilchen des starren Körpers zurückgingen, in der analytischen Mechanik, dafs man die Differentialgleichungen in der Form der sog. *Lagrange'schen Gleichungen erster Art* zu Grunde legt, während die vorherige Betrachtung des Gesamtsystemes dem Standpunkte der sog. *allgemeinen Lagrange'schen Gleichungen (der Gleichungen zweiter Art)* entspricht. Wir werden auf beide Gleichungssysteme im folgenden Kapitel (vgl. § 3) näher eingehen.

§ 7. Die kräftefreie Bewegung des Kreisels in geometrischer Behandlung.

Wir wollen jetzt die vorangehenden allgemeinen Sätze dazu benutzen, um uns von der Bewegung des Kreisels in dem denkbar einfachsten Falle ein deutliches geometrisches Bild zu verschaffen. Wir nehmen an, dafs auf den Kreisel keine äufseren Kräfte wirken. Um insbesondere auch die Schwerewirkung auszuschalten, denken wir uns den Körper in seinem Schwerpunkte unterstützt.

Hosted by Google

Die geometrische Theorie dieser Bewegung, welche zuerst von Poinsot gegeben ist, können wir jetzt unmittelbar hinschreiben.

Wir berücksichtigen in erster Linie, dafs bei der kräftefreien Bewegung des Kreisels der Impulsvektor im Raume konstant bleibt. Diesen Vektor denken wir uns ein- für allemal von O aus etwa vertikal nach oben abgetragen. Gröfse und Richtung des Vektors sind natürlich durch den Anfangsstofs gegeben, durch den wir unsern Körper in Bewegung gesetzt haben.

In zweiter Linie berücksichtigen wir, dafs bei der kräftefreien Bewegung auch die lebendige Kraft des Körpers konstant bleibt. Dieser Thatsache geben wir einen doppelten geometrischen Ausdruck.

Die lebendige Kraft bedeutet einerseits das halbe Produkt aus der Gröfse des Impulsvektors in die Projektion des Drehungsvektors auf diesen. Aus der Konstanz des Impulses und der Konstanz der lebendigen Kraft folgt also zusammengenommen, dafs die Projektion des Drehungsvektors auf den Impulsvektor eine unveränderliche Länge hat. Die Gröfse dieser Projektion hängt wiederum von der Beschaffenheit des ursprünglichen Anstofses ab. *Wir haben also senkrecht zur Impulsaxe eine im Raum feste Ebene e, welche uns einen geometrischen Ort für den Endpunkt des Drehungsvektors hinsichtlich seiner Lage im Raume liefert.*

Eine weitere geometrische Bedeutung des Satzes von der lebendigen Kraft ergiebt sich aus dem Ausdrucke

$$T = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2).$$

Der Endpunkt (p, q, r) des Drehungsvektors liegt hiernach auf einem mit dem Kreisel festverbundenen Ellipsoide, welches mit dem Trägheitsellipsoid ähnlich und ähnlich gelegen ist. Die Konstanz der lebendigen Kraft bedeutet nun, dafs dieses Ellipsoid während der Bewegung seine Dimensionen dauernd beibehält. *Wir haben also ferner ein im Körper festes Ellipsoid E, welches uns einen geometrischen Ort für den Endpunkt des Drehungsvektors hinsichtlich seiner Lage im Körper liefert.*

Wir berücksichtigen schliefslich die Relation zwischen Impuls- und Drehungsvektor. Diese Beziehung konnte mittelst der Poinsotschen Konstruktion von pag. 101 dahin ausgedrückt werden, dafs die Tangentialebene an das Ellipsoid E im Endpunkte des Drehungsvektors senkrecht auf der Axe des Impulses steht. Die genannte Tangentialebene ist hiernach zunächst dauernd unserer Ebene e parallel; da die Ebene e überdies beständig durch den Endpunkt des Drehungsvektors hindurchgeht, fällt sie direkt mit jener zusammen. Mit anderen Worten:

Unser Ellipsoid E berührt während der Bewegung dauernd unsere Ebene e.


Hosted by Google

Nun verläuft auf dem Ellipsoide E die Polhodie- und in der Ebene e irgendwie die Herpolhodiekurve. Da beide Kurven bei der Bewegung sich auf einander abwickeln, so rollt auch unser Ellipsoid E auf unserer Ebene e während der Bewegung ohne zu gleiten ab. *Hiernach können wir die ganze kinetisch bestimmte Bewegung auf rein kinematischem Wege dadurch nachahmen, daſs wir ein im Körper festes Ellipsoid, welches um den Punkt O als Mittelpunkt beschrieben ist, auf einer im Raume festen Ebene ohne Gleitung abrollen lassen.*

Dieses schöne und übersichtliche Bild der Bewegung des kräftefreien Kreisels verdanken wir, wie bekannt, den Untersuchungen Poinsots. Die fragliche Bewegung wird deshalb auch kurz als *Poinsot-Bewegung* bezeichnet. Wenn wir so, dem Vorgange Poinsots folgend, die Bewegung durch das Abrollen eines Ellipsoides auf einer Ebene veranschaulichen, setzen wir uns merkwürdiger Weise in einen gewissen Widerspruch mit der allgemeinen Poinsotschen Theorie der Drehung. Nach dieser sollen wir uns in erster Linie die Gestalt der abrollenden Polkegel klarmachen und daraus eine Vorstellung von der Bewegung zu gewinnen suchen. Es zeigt sich aber schon in dem vorliegenden einfachen Falle, daſs die Gestalt dieser Kegel, wenigstens die des Herpolhodiekegels, wie wir unten weiter ausführen werden, ziemlich kompliziert ist, und daſs die oben angegebene abweichende Konstruktion viel übersichtlicher wird. Um so weniger werden wir erwarten können, in schwierigeren Fällen (beim Hinzutreten der Schwerewirkung) allein mit der Diskussion der abrollenden Kegel durchzukommen.

Handelt es sich nur um die successiven Lagen des Körpers im Raume, so ist unser obiges Bild der Bewegung völlig zureichend. Wollen wir aber auch die Geschwindigkeit der wirklichen Bewegung in unserem kinematischen Bilde zum Ausdruck bringen, so müssen wir über die Art des Abrollens die weitere Bestimmung hinzufügen:

Die Geschwindigkeit des Abrollens soll so bemessen werden, daſs die Drehung des Ellipsoides, welche natürlich um den von O nach dem jeweiligen Berührungspunkt von E und e gezogenen Radius stattfindet, ihrer Geschwindigkeit nach diesem Radius gleich ist.

Wie auch diese Bedingung rein kinematisch zu realisieren ist, hat zuerst Sylvester*) gezeigt. Wir können hierauf indessen nicht eingehen.

Wir vervollständigen nun noch unsere Vorstellung von der

*) Vgl. Sylvester: On the motion of a rigid body etc., London R. S. Phil. Transactions 1866.

Hosted by Google

Poinsot-Bewegung, indem wir im Einzelnen das Verhalten der verschiedenen geometrischen Elemente der Bewegung studieren.

Es handle sich zunächst um den Ablauf der Bewegung im Körper. Wir werden in dieser Hinsicht vor allen Dingen die *Kurve* zu kennen wünschen, *welche der Endpunkt des Impulsvektors relativ gegen den Körper beschreibt.* Diese Kurve werden wir in Ermangelung eines besseren Ausdrucks gelegentlich die „Impulskurve" nennen.

Jedenfalls wandert der Endpunkt des Impulses im einzelnen Zeitelemente bei der in Rede stehenden Relativbewegung auf einem Kreisbogenstückchen um die jeweilige Drehungsaxe herum. Seine relative Verschiebung gegen den Körper steht also senkrecht auf der instantanen Drehungsaxe. Die Richtung der genannten Verschiebung gegen das XYZ-System wird aber durch die Verhältnisse der Koordinatenänderungen $dL:dM:dN$, die Richtung des Drehungsvektors durch die Verhältnisse $p:q:r$ bestimmt. Mithin gilt die Gleichung:

$$p\,dL + q\,dM + r\,dN = 0.$$

Auf Grund der allgemeinen Relation zwischen Impuls- und Drehungsvektor können wir unsere Gleichung auch so schreiben:

$$\frac{L\,dL}{A} + \frac{M\,dM}{B} + \frac{N\,dN}{C} = 0.$$

Durch Integration ergiebt sich:

$$(1) \qquad \frac{1}{2}\left(\frac{L^2}{A} + \frac{M^2}{B} + \frac{N^2}{C}\right) = h.$$

Die Gleichung (1) ist natürlich das Aquivalent für die Gleichung der lebendigen Kraft, wie denn auch unsere vorstehende Überlegung den im vorigen Paragraphen gegebenen Beweis des Satzes von der lebendigen Kraft nur in etwas speziellerer Fassung wiederholt.

Ferner ist klar, dafs der Endpunkt des Impulses, wegen der konstanten Länge G desselben, sich dauernd auf einer Kugel vom Radius G befinden mufs. Wir haben also

$$(2) \qquad L^2 + M^2 + N^2 = G^2.$$

Durch die Gleichungen (1) und (2) ist die gesuchte Kurve bestimmt. Wir können sagen:

Die Bahn, welche der Impuls-Endpunkt im Körper beschreibt, ist eine sphärische Kurve; sie ergiebt sich als Schnitt des Ellipsoides (1) *mit der Kugel* (2).

Die Gestalt der Kurve ist in den Figuren 18, 19 und 20 (s. den folgenden Paragraphen) für einige charakteristische Fälle verzeichnet.

Gleichzeitig ist auch die Kurve, welche der Endpunkt des Drehungsvektors im Körper beschreibt, d. h. die Polhodiekurve bestimmt. Wir

Hosted by Google

erhalten sie aus der soeben gefundenen Kurve des Impulses durch eine einfache Deformation nach den Hauptaxen des Körpers. Auch sie liegt auf zwei sogleich zu nennenden Flächen zweiten Grades, von denen uns die erste als unser Ellipsoid E bereits bekannt ist. Es ergiebt sich nämlich aus (1) und (2) mit Rücksicht auf die Beziehung zwischen Impuls- und Drehungsvektor:

$$\frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) = h \tag{3}$$

und

$$A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = G^2. \tag{4}$$

Die Polhodiekurve erscheint also als Schnitt der beiden konzentrischen Ellipsoide (3) *und* (4).

In entsprechender Weise behandeln wir die Kurven, welche der Endpunkt von Impuls- und Drehungsvektor relativ gegen den festen Raum beschreiben. Erstere Kurve reduziert sich natürlich auf einen Punkt; betrachten wir daher die letztere, d. h. unsere *Herpolhodiekurve.* Zunächst wissen wir aus dem Satz von der lebendigen Kraft, dafs diese Kurve in der festen Ebene e verläuft.

Die Herpolhodiekurve ist also eine ebene Kurve. Der Abstand ihrer Ebene von O, d. h. die Projektion des Drehungsvektors auf die vertikale Impulsaxe, welche wir in Übereinstimmung mit früherem durch ϱ bezeichnen, ergiebt sich aus dem Satz von der lebendigen Kraft zu

$$\varrho = \frac{2h}{G}. \tag{5}$$

Die genauere Gestalt der Herpolhodiekurve läfst sich nicht, wie bei der Polhodiekurve durch eine elementar-geometrische Konstruktion definieren, da sie im allgemeinen transcendenter Natur ist. Wohl aber gelingt es, sie aus unserem kinematischen Bilde der Bewegung zu ermitteln.

Wir beschreiben mit dem gröfsten und dem kleinsten Abstande der Polhodiekurve von O je eine Kugel um O, welche in unserer Ebene e zwei Kreise bestimmt. Der gemeinsame Mittelpunkt dieser Kreise ist der Durchstofsungspunkt der Impulsaxe mit e. Zwischen diesen beiden Kreisen mufs die Herpolhodiekurve ersichtlich in regelmäfsigen Windungen hin- und herlaufen, indem sie dieselben abwechselnd berührt oder sich in besonderen Fällen auf einen derselben mit Spitzen aufsetzt. Sie besteht aus einer unendlichen Serie unter sich kongruenter Bögen, welche gegen einander je um dasselbe Stück verdreht sind. Jeder einzelne Bogen entspricht einer einmaligen Abwickelung der Polhodiekurve. Im allgemeinen wird sich die Kurve nicht schliefsen, sondern um den Mittelpunkt der Figur, den Durchstofsungspunkt der

Hosted by Google

Impulsaxe mit ihrer Ebene, unendlich oft herumlaufen. Hieraus folgt bereits, daſs die Gleichung der Kurve eine transcendente Gleichung sein wird. Entsprechendes gilt natürlich von dem Herpolhodiekegel, welcher diese Kurve von O aus projiziert. Die Gestalt der Herpolhodie wird durch die nebenstehende Figur*) für den speziellen Fall

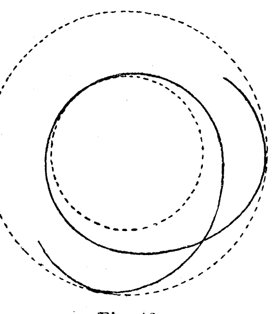


Fig. 16.

$$A = \frac{1}{36}, \quad B = \frac{1}{25}, \quad C = \frac{1}{16},$$
$$h = 50, \quad G^2 = 5$$

dargestellt.

Nun wollen wir sehen, wie sich diese Dinge im Falle des *symmetrischen Kreisels* modifizieren. Hier hat das Trägheitsellipsoid sowie die sämtlichen vorher benutzten Ellipsoide (1), (3) und (4) Rotationssymmetrie um die Figurenaxe. Bringen wir aber ein Rotationsellipsoid mit einer Kugel (wie bei der Konstruktion der Impulskurve), oder bringen wir zwei Rotationsellipsoide von zusammenfallenden Figurenaxen (wie bei der Konstruktion der Polhodie) mit einander zum Schnitt, so entsteht allemal als Schnittkurve ein Paar diametral gelegener Kreise in parallelen Ebenen.

Mithin geht sowohl die Polhodiekurve, wie die Kurve, welche der Impuls im Körper beschreibt, je in einen Kreis über.

Lassen wir ferner ein Rotationsellipsoid mit festem Mittelpunkte O auf einer Ebene abrollen, so entsteht in dieser Ebene als Ort der Berührungspunkte offenbar gleichfalls ein Kreis. Dies ergiebt sich z. B. daraus, daſs sämtliche Punkte der Polhodiekurve von O den konstanten Abstand (Ω) haben; also müssen auch sämtliche Punkte der Herpolhodiekurve von O den Abstand Ω besitzen. Die letztere Kurve ist also der Schnitt einer Ebene mit einer Kugel vom Radius Ω.

Mithin geht auch die Herpolhodiekurve beim symmetrischen Kreisel in einen Kreis über.

Der Charakter der eintretenden Bewegung läſst sich nun mit einem Worte dahin angeben:

Die allgemeinste Bewegung des kräftefreien symmetrischen Kreisels ist die reguläre Präcession.

---

*) Die Figur ist der Dissertation von Hrn. W. Hess: „Das Rollen einer Fläche zweiten Grades auf einer invariabeln Ebene, München 1880", entnommen. Hr. Hess zeigt, daſs die Herpolhodiekurve wegen der Ungleichungen, die zwischen den Hauptträgheitsmomenten A, B, C bestehen, keine (reellen) Wendepunkte besitzen kann; die ursprüngliche von Poinsot gegebene Figur, Liouville's Journal sér. I, t. 16 war in dieser Hinsicht fehlerhaft.

Hosted by Google

In der That konnten wir in § 6 des vorigen Kapitels die reguläre Präcessionsbewegung dadurch charakterisieren, daſs die Kurven bez. die Kegel der Polhodie und Herpolhodie Kreise bez. Kreiskegel waren. Die Axe der Präcession ist die Impulsaxe. Die genauere Klassifizierung dieser Präcessionsbewegung im Sinne der Unterscheidungen von pag. 51 wollen wir uns für später aufsparen.

In dem Spezialfalle des symmetrischen Kreisels führt auch folgende Überlegung zum Ziele, welche vielleicht noch einfacher und näherliegend als die frühere ist. Wir nehmen die Impulsaxe wieder vertikal nach oben gerichtet an und zeichnen die Figurenaxe in der Anfangslage unter einem beliebigen Winkel ϑ gegen diese geneigt. Aus der Lage von Impuls- und Figurenaxe folgt die Lage der instantanen Drehungsaxe. Diese liegt nach der pag. 106 mitgeteilten Konstruktion stets in derselben Ebene mit der Impuls- und Figurenaxe und teilt den Winkel ϑ, wie wir kurz sagen können, in einem festen (nur von der Massenverteilung des Kreisels, d. h. von den Werten A und C abhängigen) Verhältnisse u. zw. innen oder auſsen, je nachdem der Kreisel ein verlängerter oder abgeplatteter ist. Der gröſseren Deutlichkeit wegen legen wir um O die Einheitskugel und markieren ihre Durchstoſsungspunkte mit der Impuls-, der Rotations- und der Figurenaxe, welche wir bez. mit J, R und F bezeichnen. Der Punkt J ist nach unserem fundamentalen Prinzip ein fester Punkt, der „Nordpol" der Kugel. Die Punkte R und F dagegen sind beweglich; *wir behaupten, daſs sie je einen Parallelkreis um den Nordpol beschreiben.*

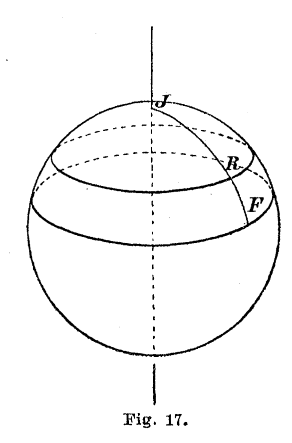


Fig. 17.

In der That (vgl. Fig. 17), die instantane Bewegung des Kreisels besteht in einer Drehung um OR. Der Punkt F wandert dabei, weil F und R auf demselben Meridiane der Kugel liegen, im ersten Augenblicke in Richtung des durch F gehenden Parallelkreises, so daſs der Winkel ϑ zunächst nicht geändert wird. In Folge dessen muſs jetzt eine andere Gerade des Körpers, welche in der Meridianebene JOF enthalten ist, die Rolle der Drehungsaxe übernehmen. Bezeichnen wir ihren Schnittpunkt mit der Einheitskugel wieder durch R, so liegt R auf dem Meridiane JF. Da nun dieser Punkt den Bogen JF in einem festen Verhältnisse teilt und da der Bogen JF seine anfängliche Länge behalten hat, muſs auch der Bogen JR die ursprüngliche Gröſse haben. R wandert also im ersten Augenblicke gleichfalls auf dem

durch R hindurchgehenden Parallelkreise und zwar, wie wir sagten, soweit, dafs J, R und F Punkte eines und desselben Meridianes werden. Wir sind damit genau auf die Anfangsbedingungen der Bewegung zurückgeführt. In Folge dessen gilt unsere Überlegung auch für jede folgende Zeit.

Die Figurenaxe und die Drehungsaxe beschreiben also bei der kräftefreien Bewegung des symmetrischen Kreisels je einen Kreiskegel um die Impulsaxe.

Aus unserer früheren Konstruktion des Drehungsvektors folgt ferner, dafs die Länge desselben bei konstanter Länge des Impulsvektors und konstantem Neigungswinkel ϑ gleichfalls konstant ist. Nun ist aber die Fortschreitungsgeschwindigkeit der Figurenaxe auf ihrem Kreiskegel der Gröfse des Drehungsvektors proportional. *Also durchläuft die Figurenaxe ihren Kreiskegel mit konstanter Geschwindigkeit.* Ferner ist die Drehgeschwindigkeit des Kreisels um die Figurenaxe gleich der Projektion des Drehungsvektors auf die letztere. *Also dreht sich der Kreisel relativ gegen die Figurenaxe mit konstanter Winkelgeschwindigkeit.*

Durch diese Bemerkungen ist aber die Bewegung wiederum als *reguläre Präcession* charakterisiert. —

Zum Schlusse bemerken wir, dafs unsere Behandlung des kräftefreien Kreisels auch auf die Bewegung eines im Raume freien starren Körpers Anwendung findet, welcher überhaupt keinen oder doch nur solchen äufseren Kräften unterworfen ist, die sich bei geeigneter Wahl des Bezugspunktes zu einer blofsen Schiebekraft zusammensetzen lassen, wie z. B. die Schwerkraft in dem Falle, wo wir den Schwerpunkt zum Bezugspunkte wählen. Dann können wir nämlich nach den allgemeinen Impulssätzen des fünften Paragraphen die Translation des Bezugspunktes einerseits und die Rotation des Körpers um den Bezugspunkt andrerseits für sich behandeln, letztere nach der vorangehenden Theorie des kräftefreien allgemeinen Kreisels, erstere nach den Gesetzen der Mechanik des einzelnen Massenpunktes. Da insbesondere für den Fall der Schwerewirkung die Bahnkurve des einzelnen Massenpunktes (die Parabel) genugsam bekannt ist, so beherrschen wir jetzt mit Zuhilfenahme der vorangehenden Resultate bereits *die Bewegung des im Raume frei beweglichen schweren starren Körpers.*

Hosted by Google

§ 8. Die Rotation des Kreisels um eine permanente Drehungsaxe und die sog. Stabilität der Rotationsaxe eines schnell rotierenden Kreisels.

Wir haben bereits mehrfach die Analogie zwischen der Bewegung des einzelnen Massenpunktes und der Rotation des Kreisels betont. Nicht nur, daſs (in kinematischer Hinsicht) beides Probleme von drei Graden der Freiheit sind und daſs (in statischer Hinsicht) der Impuls in beiden Fällen als ein Vektor aufgefasst werden kann; auch in kinetischer Hinsicht besteht eine durchgreifende Analogie, wofern wir (vgl. § 5) unser Augenmerk auf das Verhalten des Impulsvektors richten. Anders stellt sich die Sache, wenn wir das Verhalten des Geschwindigkeitsvektors in beiden Fällen vergleichen. Während beim einzelnen kräftefreien Massenpunkte der Geschwindigkeitsvektor (ebenso wie der Impulsvektor) Richtung und Gröſse im Raume beibehält, ändert der Vektor der Drehgeschwindigkeit bei der kräftefreien Kreiselbewegung seine Gröſse und seine Lage sowohl im Raume wie im Körper kontinuierlich ab. Wir werden uns die Frage vorlegen, unter welchen Umständen auch beim Kreisel der Geschwindigkeitsvektor nach Richtung und Gröſse im Raume konstant bleibt oder mit anderen Worten, *unter welchen Umständen eine gleichförmige Rotation des Kreisels um eine im Raume feste Axe eintritt.*

Wir wissen, daſs bei der *Poinsot-Bewegung* der Rotationsvektor im Raume einen Kegelmantel beschreibt, der den Impulsvektor in seinem Innern hat. Soll nun die Rotationsaxe im Raume stille stehen, der Herpolhodiekegel sich also auf eine einzelne Gerade reduzieren, so muſs diese mit der Richtung des Impulses zusammenfallen. Nach pag. 101 fällt aber die Rotationsaxe mit der Impulsaxe nur dann zusammen, wenn ihre gemeinsame Richtung eine Hauptaxe des Körpers ist. Umgekehrt ergiebt sich aus der Konstruktion von pag. 102, daſs dann in der That die Rotationsaxe eine feste Lage im Raume und auch im Körper beibehält, und daſs die Rotationsgeschwindigkeit eine gleichförmige ist. Bezeichnen wir eine Axe, um welche eine fortgesetzte gleichförmige Drehung möglich ist, wie üblich, als „permanente Axe“, so können wir sagen:

Bei dem allgemeinen Kreisel giebt es nur drei permanente Axen, die Hauptaxen des Körpers.

Wenn der Kreisel um eine dieser drei Hauptaxen rotiert, reduziert sich offenbar die Polhodie, die Herpolhodie, sowie die Kurve, welche der Impuls im Körper beschreibt, je auf einen einzelnen Punkt.

Die drei Hauptaxen bieten einen interessanten Unterschied hin-

sichtlich der *Stabilität* der betr. gleichförmigen Rotation dar, wie schon Poinsot bemerkt hat.

Der Begriff der Stabilität einer Bewegung, welcher uns hier zum ersten Male begegnet, spielt eine wichtige Rolle in der neueren Mechanik und will mit einer gewissen Vorsicht behandelt sein. Um zu entscheiden, ob wir eine Bewegungsform unseres Kreisels stabil oder labil nennen, werden wir folgendermaſsen verfahren (wobei der genaue Sinn der von uns gewählten Worte vielleicht erst im Laufe der weiteren Entwickelung völlig deutlich wird): Wir erteilen dem Kreisel, während er die fragliche Bewegung ausführt, einen kleinen Stoſs von beliebiger Beschaffenheit. Werden hierbei sämtliche Elemente der Bewegung, z. B. die successiven Lagen des Kreisels im Raume, die Lagen des Drehungsvektors und des Impulsvektors im Kreisel und im Raum um so weniger geändert, je kleiner der Anstoſs gemacht wird, so werden wir die Bewegung stabil nennen; in jedem anderen Falle wird sie labil heiſsen.

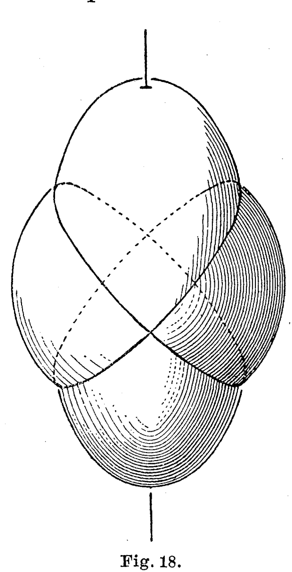
Wir untersuchen in diesem Sinne zunächst die *Rotation des Kreisels um die Axe des gröſsten oder kleinsten Hauptträgheitsmomentes* und betrachten vor allem die *Kurve, welche der Endpunkt des Impulses im Körper beschreibt.* Das Ellipsoid 1) und die Kugel 2) von pag. 123, deren gemeinsame Punkte unsere Impulskurve lieferten, müssen sich jetzt offenbar in zwei Punkten berühren, welche bez. auf der längsten oder kürzesten Hauptträgheitsaxe liegen. Im ersteren Falle wird das Ellipsoid von der Kugel, im letzteren Falle die Kugel von dem Ellipsoid ganz umschlossen. Erteilen wir nun dem Kreisel einen kleinen Stoſs, so ändern wir dadurch die Konstanten h und G, d. h. die Gröſse unseres Ellipsoides und unserer Kugel, ein wenig ab. Der Berührungspunkt löst sich dann beidemal in eine kleine in sich zurücklaufende Kurve auf, welche dem früheren Berührungspunkt in ihrer ganzen Erstreckung um so näher liegt, je kleiner die Änderung von h und G war. (Allerdings kann sich der Berührungspunkt bei willkürlicher Änderung von h und G auch in eine imaginäre Kurve auflösen; die hierfür notwendigen Werte unserer Konstanten sind aber mit der mechanischen Bedeutung dieser Gröſsen unvereinbar, so daſs wir hiervon absehen können).

Ganz ähnlich, wie die Impulskurve, verhält sich die Kurve der *Polhodie,* welche ja aus jener durch eine einfache Deformation nach den Hauptaxen des Körpers abgeleitet werden kann. Auch diese Kurve, welche bei der gleichförmigen Rotation aus einem einzelnen Punkte besteht, verwandelt sich bei Hinzufügung eines kleinen äuſseren Anstoſses in ein kleines Oval, welches jenem Punkte dauernd sehr nahe liegt. Hieraus schlieſsen wir, daſs beim Abrollen der Polhodie in

unserer festen Ebene von pag. 121 eine *Herpolhodiekurve* entsteht, deren Dimensionen gleichfalls um so kleiner sind, je kleiner der störende Stoſs gewählt wird. Aus alledem folgt:

Die gleichförmige Rotation des Kreisels um die gröſste oder kleinste Hauptaxe des Trägheitsellipsoides ist eine stabile Bewegungsform.

Nehmen wir zweitens an, daſs die Rotation um die *mittlere Hauptaxe des Trägheitsellipsoides* erfolgt. Wir betrachten zunächst wieder die Impulskurve. In unserem Falle reduziert sich diese auf einen der Durchstoſsungspunkte der mittleren Hauptträgheitsaxe mit der Kugel vom Radius G. In diesem sowie in dem diametralen Punkte wird unsere Kugel 2) von dem Ellipsoide 1) berührt. Man erkennt aber aus der nebenstehenden Figur sofort, daſs es noch unendlich viele andere Punkte giebt, welche beiden Flächen gemeinsam sind. Beide Flächen müssen sich nämlich notwendiger Weise durchsetzen; die Enden der gröſsten Hauptaxe des Ellipsoids beispielsweise ragen aus der Kugel hervor; die kleinste Hauptaxe liegt ganz im Innern der Kugel. Die vollständige Schnittkurve besteht aus zwei Kreisen, nämlich denjenigen Kreisschnitten des Ellipsoids, welche sich in den Endpunkten der mittleren Hauptaxe kreuzen. Es ist leicht, die analytische Bedingung anzugeben, welche für das Eintreten des vorliegenden Falles erforderlich ist. Ist B das auf die mittlere Hauptaxe bezügliche Trägheitsmoment, so haben wir die Konstanten h und G so zu bemessen, daſs sich für $L = N = 0$ aus den Gleichungen (1) und (2) von pag. 123 derselbe Wert von M^2 ergiebt; unsere Bedingung lautet also


Fig. 18.

$$G^2 = 2hB.$$

Ändern wir jetzt durch Hinzufügung eines äuſseren Anstoſses die Dimensionen von Kugel und Ellipsoid ein wenig ab, so entsteht allemal eine Kurve, welche sich von dem ursprünglichen Berührungspunkte um ein endliches Stück entfernt. Die beiden Berührungspunkte (zusammen mit den hindurchgehenden Kreisen) lösen sich je in zwei Ovale auf, welche auf dem abgeänderten Ellipsoide die Endpunkte der gröſsten oder die der kleinsten Hauptaxe umgeben. Man vergleiche hierzu die Figuren 19 und 20. In diesen ist die äuſsere Störung speziell derart vorausgesetzt, daſs das Ellipsoid seine Gröſse behält und nur die Kugel

Hosted by Google

verändert wird; u. zw. ist in Figur 19 die Kugel gegen früher vergröfsert ($G^2 > 2hB$), in Fig. 20 verkleinert ($G^2 < 2hB$).

Auf Grund des hiermit geschilderten Verhaltens der Impulskurve können wir bereits den interessanten Satz aussprechen:

Die gleichförmige Rotation des allgemeinen Kreisels um die Axe des mittleren Hauptträgheitsmomentes ist eine instabile Bewegungsform.

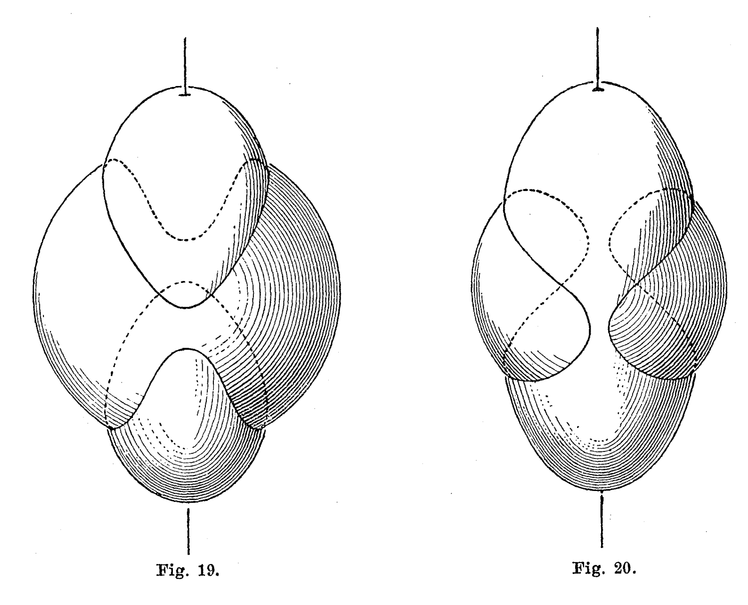


Fig. 19. Fig. 20.

Wir wollen auch noch das Verhalten der Polhodie- und der Herpolhodiekurve kurz betrachten. Die Gestalt der Polhodiekurve ist natürlich der unserer Impulskurve ganz analog. Im Falle $G^2 = 2hB$ besteht die Polhodiekurve aus einem Punkte, während der Schnitt der Ellipsoide 3) und 4) von pag. 124, auf welchen die Polhodie verläuft, zwei kongruente Ellipsen ergiebt. (Sie entstehen aus den oben genannten Kreisschnitten des Ellipsoides 1) durch die Deformation $p = L/A,\ q = M/B,\ r = N/C$). Machen wir nun durch einen äufseren Anstofs $G^2 \gtrless 2hB$, so lösen sich die beiden Ellipsen in zwei Ovale auf, welche sich von der punktförmigen Polhodie des Falles $G^2 = 2hB$ um endliche Stücke entfernen, wie klein auch der störende Anstofs war.

Aus diesem Verhalten der Polhodiekurve schliefsen wir sofort, dafs auch die Herpolhodiekurve, welche wir ja durch Abwickelung der Polhodiekurve erhalten haben, ihre Gestalt unstetig verändern wird. Während diese Kurve im Falle $G^2 = 2hB$ aus einem einzelnen Punkte besteht, erhält sie im Falle $G^2 \gtrless 2hB$ sogleich endliche Dimensionen,

Hosted by Google

welche durch Verkleinerung der Differenz $G^2 - 2hB$ nicht beliebig klein gemacht werden können. Auf die hierbei auftretenden interessanten Einzelheiten*) können wir an dieser Stelle nicht näher eingehen.

Wir gehen nun zu dem *symmetrischen Kreisel* über. *Bei dem symmetrischen Kreisel giebt es ersichtlich unendlich viele permanente Drehungsaxen; es sind dieses aufser der Figurenaxe die sämtlichen Axen der Äquatorebene.* Wir stellen auch hier die Frage nach der *Stabilität* der betr. Bewegungsformen.

Bei der *Rotation um die Figurenaxe* erledigt sich die Frage dadurch, dafs wir den symmetrischen Kreisel als Grenzfall des allgemeinen Kreisels auffassen. Der Figurenaxe entspricht beim allgemeinen Kreisel jedenfalls die Axe des gröfsten oder kleinsten Hauptträgheitsmomentes (je nachdem der symmetrische Kreisel ein verlängerter oder abgeplatteter ist). Daher werden wir sagen können:

Die Rotation um die Figurenaxe ist eine stabile Bewegungsform des symmetrischen Kreisels.

Bei der *Rotation um eine Axe der Äquatorebene* dagegen läfst uns der Vergleich mit dem allgemeinen Kreisel im Stich. Eine solche Axe kann nämlich ebensowohl als Grenzfall der mittleren wie als Grenzfall einer der beiden extremen Hauptträgheitsaxen des allgemeinen Kreisels angesehen werden. Dementsprechend zeigt die folgende spezielle Untersuchung, dafs die Stabilitätsverhältnisse des symmetrischen Kreisels bei der gedachten Rotation in gewisser Weise die Mitte halten zwischen der vollständigen Stabilität oder Instabilität des um eine Axe von extremem oder mittlerem Hauptträgheitsmomente rotierenden allgemeinen Kreisels.

Betrachten wir hier zunächst die *Herpolhodiekurve.* Wir stützen uns dabei auf unseren früheren Satz, dafs die allgemeinste Bewegung des symmetrischen Kreisels eine reguläre Präcessionsbewegung um die Axe des Impulses ist. Zuvörderst falle der Impuls genau in eine Äquatoraxe. Die Herpolhodiekurve besteht dann aus einem Punkt, welcher auf derselben Axe liegt. Darauf fügen wir einen kleinen Zusatzimpuls hinzu, wodurch die Lage des Impulses im Raum und im Körper momentan ein wenig abgeändert wird. Die Lage des Drehungsvektors ergiebt sich durch die uns geläufige Konstruktion. Jedenfalls

*) Die Herpolhodiekurve nimmt unter Umständen eine Spiralenform an. Dies tritt ein, wenn der Anstofs speziell so abgepafst wird, dafs die oben genannte Schnittkurve der Ellipsoide 3) und 4) (bestehend aus unseren beiden kongruenten Ellipsen) als solche nicht geändert wird und dafs nur der Drehpol im Körper von dem Doppelpunkt der Schnittkurve aus auf der einen oder der anderen Ellipse ein wenig verschoben wird.


Hosted by Google

ist der abgeänderte Drehungsvektor nach Gröfse und Richtung von dem ursprünglichen sehr wenig verschieden. Die Gestalt der Herpolhodiekurve erhalten wir nun, indem wir den Endpunkt des so konstruierten Drehungsvektors auf einem Kreise um die abgeänderte Axe des Impulses herumführen. Dieser Kreis wird um so kleiner, je kleiner der störende Anstofs war. Also verändert die Herpolhodiekurve ihre Gestalt beliebig wenig — im Gegensatz zu der Herpolhodiekurve bei der entsprechenden Bewegung des allgemeinen Kreisels.

Trotzdem müssen wir aber die fragliche Bewegung des symmetrischen Kreisels nach unserer obigen Stabilitätsdefinition als labil bezeichnen. Betrachten wir nämlich die *Polhodiekurve.* Bei der ursprünglichen Lage des Impulses besteht die Polhodiekurve aus einem einzelnen Punkt. Diese Angabe scheint im Widerspruch zu stehen mit dem früher gefundenen Resultate, dafs die Polhodiekurve allemal ein Kreis um die Figurenaxe ist. Der Widerspruch löst sich dadurch auf, dafs wir uns vorstellen: Auch bei der gleichförmigen Rotation um eine Äquatoraxe hat der Endpunkt des Drehungsvektors die Tendenz, auf einem Kreise um die Figurenaxe fortzuwandern; hierbei kommt er aber nicht von der Stelle, weil die Herpolhodiekurve aus einem einzelnen Punkte besteht. Die durch unsern Anstofs abgeänderte Gestalt der Polhodiekurve erhalten wir jetzt, indem wir den abgeänderten Endpunkt des Drehungsvektors auf einem Kreise um die Figurenaxe herumwandern lassen. Die Polhodiekurve verändert also bei Hinzufügung unseres kleinen Anstofses ihre Gestalt in unstetiger Weise — in Übereinstimmung mit der Polhodiekurve bei der entsprechenden Bewegung des allgemeinen Kreisels. Das Gleiche gilt von der Kurve, welche der Impuls im Körper beschreibt.

Jedenfalls müssen wir nach dem Vorangehenden sagen:

Die gleichförmige Rotation des Kreisels um eine Axe seiner Äquatorebene ist eine labile Bewegungsform.

Schliefslich betrachten wir den *Kugelkreisel.* Bei diesem ist jede Axe Hauptaxe des Trägheitsellipsoides, woraus zu folgern ist:

Bei dem Kugelkreisel ist jede Axe durch O eine permanente Drehungsaxe.

Die allgemeinste Bewegung des Kugelkreisels besteht in einer gleichförmigen Rotation um eine im Raume feste Axe.

Man überzeugt sich überdies leicht, dafs jede solche Rotationsbewegung einen *stabilen* Charakter besitzt.

Nehmen wir den zu Anfang dieses Paragraphen angestellten Vergleich zwischen der Kinetik des Kreisels und der des einzelnen Massenpunktes noch einmal auf, so können wir sagen:

Hosted by Google

Der Kugelkreisel bildet nicht nur in Bezug auf das Verhalten des Impulsvektors sondern auch hinsichtlich des Geschwindigkeitsvektors das genaue Analogon zu dem einzelnen Massenpunkte; es bleibt nämlich auch dieser Vektor bei der kräftefreien Bewegung des Kugelkreisels nach Richtung und Gröſse im Raume konstant. —

Häufig gebraucht man das Wort „Stabilität“ nach dem Vorgange von Foucault noch in einem anderen Sinne als oben geschehen. Man versteht darunter nämlich die scheinbare Tendenz gleichförmig rotierender Körper, gegenüber äuſseren Störungen die Richtung ihrer Rotationsaxe im Raume beizubehalten. Die Erscheinungen, um welche es sich bei diesen Versuchen handelt, sind bekannt genug. Wir denken etwa an unser in der Einleitung geschildertes Demonstrationsmodell eines Kreisels, welches wir durch Übergewichte so ausbalancieren mögen, daſs der Schwerpunkt in den Unterstützungspunkt zu liegen kommt. Indem wir den Kreisel durch Abwickelung einer Schnur in Bewegung setzen, erteilen wir ihm eine ziemlich starke Rotation, welche die Figurenaxe zur Rotationsaxe hat. Ohne groſse Anstrengung wird man es erreichen, daſs der Kreisel 20 Umdrehungen in der Sekunde macht. Wenn wir jetzt die Neigung der Figurenaxe erkennbar abändern wollen, so müssen wir eine erhebliche Kraft aufwenden. Kleinere Störungen, z. B. eine Erschütterung des Gestelles, ein leichter Schlag auf die Oberfläche des Kreisels, bringen kaum eine merkliche Änderung des Bewegungszustandes hervor. Hiermit vergleichen wir die Thatsache, daſs der nicht rotierende Kreisel auf jeden beliebigen Anstoſs offenbar mit einer deutlichen Bewegung reagiert. Wir werden dann in der That geneigt sein, an eine gewisse Widerstandsfähigkeit zu glauben, welche der Kreisel vermöge der Rotation gewinnt.

Analoge Verhältnisse beobachtet man sehr häufig bei frei beweglichen Körpern*). Wenn man ein Ziel mit einem geworfenen Körper treffen will, so erteilt man letzterem beim Abschleudern stets eine möglichst starke Rotation. Dadurch allein kann man einen regelmäſsigen und im Voraus bestimmbaren Gang des Körpers bewirken. Im anderen Falle würden allerlei Nebenumstände, die Wirkung des Luftwiderstandes, zufällige Strömungen in der Luft etc. die Bahn erheblich stören. Dies kommt z. B. für das Diskuswerfen der Alten oder für das heute übliche Reifenspiel in Betracht. Im Groſsen findet

*) Zahlreiche Beispiele dieser Art finden sich in der populär gehaltenen Schrift von Perry: Spinning tops, London 1890; wir möchten dieses anregende und durch seine amüsante Darstellung ausgezeichnete Büchlein angelegentlichst empfehlen.

Hosted by Google

die Sache Anwendung bei der Einrichtung der modernen Artillerie- und Infanteriewaffen, nämlich bei der Benutzung *gezogener* Läufe, worauf wir später zurückkommen.

Die Erklärung aller dieser Erscheinungen ist für uns, die wir den Begriff des Impulses beherrschen, äufserst einfach. Wir sprechen dabei von unserem Kreisel, können aber ebenso gut auch an irgend eins der zuletzt genannten Beispiele denken. Durch den ursprünglichen Antrieb haben wir einen Impulsvektor geschaffen, welcher nahezu in die Richtung der Figurenaxe fällt und eine erhebliche Länge hat. Mit diesem Impuls setzt sich der Impuls der äufseren Störung nach dem Parallelogramm der Kräfte zusammen. Ist letzterer erheblich kleiner, als ersterer, so wird der ursprüngliche Impuls nach Lage und Gröfse nur wenig abgeändert. Mithin ist auch der abgeänderte Bewegungszustand von dem ursprünglichen nur wenig verschieden; die Rotationsaxe behält ihre Lage im Raume nahezu bei und auch die Figurenaxe bleibt in der Nähe ihrer früheren Lage.

Um ein numerisches Beispiel zu geben, mögen wir etwa die oben genannte Zahl von 20 Umdrehungen in der Sekunde zu Grunde legen. Die Winkelgeschwindigkeit beträgt dann $2\pi \cdot 20$ ($\sec^{-1}$). Ihr entspricht nach unseren Festsetzungen ein Drehungsvektor von $2\pi \cdot 20$ cm Länge. Um den zugehörigen Impulsvektor zu berechnen, müssen wir uns ein Urteil über die Gröfse des Trägheitsmomentes um die Figurenaxe bilden. Wir denken uns zu dem Zwecke den glockenförmigen Hauptteil unseres Modelles etwa durch eine Kreisscheibe von 1 cm Dicke und 10 cm Radius ersetzt. Die Dichte des Materiales beträgt ca 8 (gr. cm^{-3}), (nämlich 7,6 für Eisen, 8,5 für Kupfer). Für das Trägheitsmoment findet man daraufhin leicht den Wert $4\pi . 10^4$ (gr. cm^2); der Impulsvektor bekommt daher nach unseren früheren Verabredungen die Länge von $(4\pi)^2\, 10^5$ gleich ca $15 \cdot 10^6$ cm. Der Impulsvektor ist also etwa 150 Kilometer oder 20 deutsche Meilen lang! Sodann berechnen wir die Gröfse des Zusatzimpulses in einem konkreten Beispiel. Wir wollen etwa von der Höhe eines halben Meters einen Körper von der Masse eines Grammes auf den Rand der Kreiselscheibe herabfallen lassen. Die Geschwindigkeit, mit welcher unser Körper unten ankommt, ist nach den Fallgesetzen gleich $\sqrt{2gh}$ d. h. für $h = 50$ cm, $g =$ ca. 900 (cm $\sec^{-2}$) gleich 300. Der ausgeübte Stofs beträgt also 300 (gr. cm $\sec^{-1}$). Das Drehmoment desselben ist, da der Radius der Kreiselscheibe zu 10 cm angenommen wurde, gleich 3000. Unser Zusatzimpuls hat hiernach die Länge von 30 m und ist, wenn die Figurenaxe vertikal steht, horizontal gerichtet. Es ist klar, dafs dieser Zusatzimpuls gegenüber der stattlichen Länge des ursprünglichen

Impulses nur eine relativ geringe Änderung bedeutet. Die zugehörige Änderung des Bewegungszustandes wird daher kaum beobachtet werden können. Zusammenfassend können wir sagen:

Die fraglichen Erscheinungen sind an sich nicht merkwürdiger als die durchaus selbstverständliche Thatsache, dafs ein in schneller Vorwärtsbewegung begriffener Körper durch einen seitlichen Anstofs um so weniger aus seiner Richtung abgelenkt wird, je gröfser sein ursprünglicher Translationsimpuls oder, was dasselbe ist, seine Translationsgeschwindigkeit war. —

Etwas anders stellt sich die Sache, wenn wir statt einer einmaligen oder kurzen Störung eine kontinuierliche Einwirkung haben. Offenbar kann eine ganz kleine aber anhaltende Abänderung des Impulses selbst gegenüber einem sehr grofsen Anfangsbetrage eine erhebliche Wirkung erzielen, falls wir nur die Beobachtung über ein genügend grofses Zeitintervall ausdehnen. Dieses ist auch in der That der Fall, wie das im Folgenden zu besprechende Beispiel der Schwerewirkung zeigt.

Nachdem wir die Erscheinungen selbst vollständig verstanden haben, wollen wir schliefslich noch die *Ausdrucksweise von der Stabilität der Rotationsaxe* kritisieren, durch welche man diese Erscheinungen häufig beschreibt.

Zunächst werden wir dem Worte „Stabilität" seinen spezifischen Sinn reservieren wollen, in dem es zu Anfang dieses Paragraphen vorkam und in dem es den Gegensatz zu dem Worte „Labilität" bildet. Wir werden daher statt Stabilität der Rotationsaxe lieber *„Erhaltung der Rotationsaxe"* sagen. Sodann möchten wir hier überhaupt nicht von der Rotationsaxe, sondern von der Impulsaxe sprechen. *Nicht der Drehungsvektor, sondern der Impulsvektor ist es, auf den es dynamisch in erster Linie ankommt.* Haben wir die Lage des Impulsvektors ermittelt, so folgt die Lage des Drehungsvektors unmittelbar, z. B. auf Grund der Konstruktion von pag. 101. Es ist durchaus falsch, dafs zur Verlegung des Drehungsvektors eine äufsere Ursache, eine Kraft, erfordert wird. *Die Kraft wird nicht zur Verlegung des Drehungsvektors sondern zur Verlegung des Impulsvektors gebraucht.* Denken wir z. B. an die allgemeine Bewegung des kräftefreien Kreisels. Hier ändert die Drehungsaxe fortgesetzt ihre Richtung, indem sie auf dem Herpolhodiekegel entlang wandert, ohne dafs eine äufsere Kraft wirkt, während andrerseits der Impulsvektor fest bleibt. Die Änderung der Drehungsaxe findet eben deshalb und in solcher Weise statt, dafs die Impulsaxe ungeändert bleiben kann.

Und nun gilt (wie wir wissen) das „Gesetz von der Erhaltung der Impulsaxe" gegenüber äufseren Störungen nicht genau. Wie klein auch der hinzukommende Impuls gegen den ursprünglichen sein mag,

Hosted by Google

immer bringt er eine endliche Änderung hervor. Diese genügt, um die anfangs etwa zusammenfallenden Axen der Rotation und des Impulses zu trennen. Infolgedessen steht die Drehungsaxe fortan im Raume nicht mehr still, sondern beschreibt (bei dem symmetrischen Kreisel) einen dünnen Kreiskegel um die Impulsaxe. Das Gleiche gilt von der Bewegung der Figurenaxe.

Hiernach werden wir das vermeintliche Gesetz von der Stabilität der Rotationsaxe dahin korrigieren müssen, daſs wir sagen:

Der Impulsvektor wird unter gewissen, in der Praxis häufig vorliegenden Verhältnissen durch äuſsere Störungen relativ wenig geändert. Infolgedessen werden, wenn die Bewegung anfangs um die Figurenaxe stattfand, der Herpolhodiekegel und der von der Figurenaxe bei der abgeänderten Bewegung beschriebene Kegel auch nach der Störung eine sehr kleine Öffnung behalten.

Kapitel III.

Die Eulerschen Gleichungen nebst weiteren Ausführungen zur Kinetik des Kreisels.

§ 1. Ableitung der Eulerschen Gleichungen.

Nachdem wir in den vorigen Kapiteln die geometrischen und mechanischen Grundlagen der Kreiseltheorie kennen gelernt haben, wollen wir in diesem zunächst die analytische Behandlung des Problems vorbereiten. In erster Linie gilt es, die berühmten *Eulerschen Gleichungen* abzuleiten.

Wir beginnen mit einer kinematischen Betrachtung, indem wir an unsere früheren Resultate über die unendlich kleinen Drehungen anknüpfen.

Es handle sich um einen beliebigen Vektor, den wir einerseits auf ein festes, andrerseits auf ein um O bewegliches System beziehen. Im ersteren Falle nennen wir ihn i, im letzteren J. Die Koordinaten des Endpunktes seien bez. l, m, n und L, M, N. Die Bezeichnungen sind mit Rücksicht darauf gewählt, daſs wir unseren Vektor sogleich mit dem Impulsvektor identifizieren werden. Richtung und Gröſse des Vektors seien beliebig variabel. Die Veränderung, welche er in der Zeit dt erleidet, werde mit di bez. mit dJ bezeichnet, je nachdem wir sie im festen oder im beweglichen System messen. Die Komponenten von di nach den festen Koordinatenaxen sind dl, dm, dn, die Komponenten von dJ nach den beweglichen dL, dM, dN. Schlieſslich wollen wir mit $d\lambda, d\mu, d\nu$ die Komponenten von di nach den beweglichen Koordinatenaxen bezeichnen. Das bewegliche System erfahre in jedem Momente die unendlich kleine Rotation R, deren Komponenten im beweglichen System wie früher mit p, q, r bezeichnet werden mögen.

Wir ziehen nun das Schema (3) von pag. 41 heran. Dieses Schema können wir so auffassen, daſs es die Koordinaten eines im Raume festen Punktes P in Bezug auf zwei successive Lagen des beweglichen Koordinatensystems mit einander in Verbindung setzt. Als Punkt P betrachten wir den Endpunkt des Vektors i zur Zeit t. Dieser Punkt hat im beweglichen System zur Zeit t die Koordinaten L, M, N; es

Hosted by Google

fragt sich, welche Koordinaten demselben Raumpunkte zur Zeit $t + dt$ zukommen.

Es sind dieses nicht etwa die Koordinaten $L + dL$, $M + dM$, $N + dN$. Diese kommen vielmehr dem Endpunkte P' des während der Zeit dt abgeänderten Vektors i zu. Wir kommen aber von dem Punkte P' zu P zurück, wenn wir die Änderung di unseres Vektors wieder rückgängig machen. Da nun die Komponenten von di im beweglichen System mit $d\lambda$, $d\mu$, $d\nu$ bezeichnet wurden, so werden die Koordinaten von P im beweglichen System zur Zeit $t + dt$ die folgenden werden:

$$L + dL - d\lambda, \quad M + dM - d\mu, \quad N + dN - d\nu.$$

Unser Schema (3) liefert nun, von oben nach unten gelesen, für die Koordinaten des Punktes P folgende Relationen:

$$\begin{aligned} L + dL - d\lambda &= \phantom{-rLdt +{}} L + rMdt - qNdt, \\ M + dM - d\mu &= -rLdt + M + pNdt, \\ N + dN - d\nu &= \phantom{-{}} qLdt - pMdt + N \end{aligned}$$

Hierfür können wir auch schreiben:

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{dL}{dt} - \dfrac{d\lambda}{dt} = + rM - qN, \\ \dfrac{dM}{dt} - \dfrac{d\mu}{dt} = - rL + pN, \\ \dfrac{dN}{dt} - \dfrac{d\nu}{dt} = \phantom{-{}} qL - pM \end{cases}$$

Der Sinn dieser Gleichungen wird sehr viel deutlicher, wenn wir uns der Schreibweise der Vektoranalysis bedienen. Benutzen wir nämlich den pag. 61 erklärten Begriff des vektoriellen Produktes, so können wir die vorstehenden Gleichungen folgendermaſsen zusammenfassen:

$$(1') \qquad \frac{dJ}{dt} - \frac{di}{dt} = V(J, R),$$

wobei wir auf der rechten Seite statt $V(J, R)$ natürlich auch $V(i, R)$ schreiben dürfen.

Die geometrische Differenz der Änderungsgeschwindigkeiten unseres Vektors gegen das feste und gegen das bewegliche System ist also nach Richtung und Gröſse gleich dem vektoriellen Produkt unseres Vektors **J** *und des Drehungsvektors* **R**.

Verbinden wir diesen fundamentalen und sehr allgemeinen kinematischen Satz mit den kinetischen Prinzipien des vorigen Kapitels, so ergeben sich die Eulerschen Gleichungen mit einem Schlage.

Es handle sich erstens um die kräftefreie Bewegung. Der Vektor

Hosted by Google

des vorigen Satzes sei der Impuls des Kreisels; das Koordinatensystem XYZ kann zunächst eine beliebige Lage gegen den Kreisel haben.

Bei der kräftefreien Bewegung ist der Impuls im Raume konstant. Wir haben also

$$i = \text{const.} \quad \text{oder} \quad \frac{di}{dt} = 0.$$

Die Gleichung (1) ergiebt nun

$$\frac{dJ}{dt} = V(J, R). \tag{2}$$

Wir haben damit *eine erste vektorielle Form der Eulerschen Gleichungen des kräftefreien Kreisels* abgeleitet.

Zu einer zweiten Form derselben Gleichungen gelangen wir, wenn wir von der Vektorgleichung (2) zu ihren Komponentengleichungen nach den Koordinatenaxen zurückgehen. Es ist dieses derselbe Übergang im umgekehrten Sinne, der uns oben von (1) zu (1′) führte. Unsere *zweite Form der Eulerschen Gleichungen des kräftefreien Kreisels* ist daher die folgende:

$$\tag{2'} \begin{cases} \dfrac{dL}{dt} = rM - qN, \\ \dfrac{dM}{dt} = -rL + pN, \\ \dfrac{dN}{dt} = qL - pM \end{cases}$$

Wir kommen schliesslich zu einer dritten Form derselben Gleichungen, wenn wir einen der beiden Vektoren J und R vermöge der zwischen ihnen bestehenden Relation eliminieren. Die Elimination wird besonders einfach, wenn wir das XYZ-System speziell mit dem Hauptträgheitskreuz zusammenfallen lassen. Dann können wir nämlich die Komponenten von J einfach durch die Werte ersetzen:

$$L = Ap, \quad M = Bq, \quad N = Cr$$

und erhalten für die Komponenten von R die Differentialgleichungen:

$$\tag{2''} \begin{cases} A\dfrac{dp}{dt} = (B - C)\,qr, \\ B\dfrac{dq}{dt} = (C - A)\,rp, \\ C\dfrac{dr}{dt} = (A - B)\,pq. \end{cases}$$

Dies sind die *Eulerschen Gleichungen der kräftefreien Bewegung in der gewöhnlich benutzten Form.*

Die letzte Formulierung der Eulerschen Gleichungen ist ersichtlich

Hosted by Google

weniger allgemein, wie die vorangehenden, weil sie eine spezielle Lage des Koordinatensystems voraussetzt. Die Gleichungen (2′) gelten für eine ganz beliebige Lage des im Kreisel festen Systems und ändern ihre Form überhaupt nicht, wenn wir das Koordinatensystem drehen. Die Gleichung (2) ist in gewisser Weise der vollkommenste Ausdruck der Eulerschen Gleichungen, weil sie überhaupt keine Beziehung auf ein Koordinatensystem enthält. Diese Gleichung setzt am unmittelbarsten die folgende Thatsache in Evidenz:

Die Eulerschen Gleichungen der kräftefreien Bewegung sind nichts anderes als der analytische Ausdruck dafür, daſs der Impuls im Raume konstant ist.

Ebenso ergeben sich die Eulerschen Gleichungen beim Hinzutreten beliebiger äuſserer Kräfte. Die letzteren setzen wir zunächst hinsichtlich des Bezugspunktes O zu einer einzelnen Drehkraft zusammen, welche wir mit Δ bezeichnen und welche in dem (beliebig gelegenen) XYZ-System die Komponenten Λ, M, N besitzen möge. Die Änderung di, welche der Impuls im Raume beim Hinzutreten der äuſseren Kräfte während der unendlich kleinen Zeit dt erfährt, wird alsdann nach dem Fundamentalsatze IIa von pag. 115 gleich dem unendlich kleinen Stoſse $\Delta\, dt$. Wir haben also die Gleichung:

$$\frac{di}{dt} = \Delta.$$

Mit Rücksicht darauf ergeben sich die Eulerschen Gleichungen beim Vorhandensein äuſserer Kräfte wieder direkt aus der kinematischen Gleichung (1′).

Als *eine erste Form dieser Gleichungen* erhalten wir

$$(3) \qquad \frac{dJ}{dt} = V(J, R) + \Delta.$$

Gehen wir wie oben zu den Komponentengleichungen über, so entsteht *eine zweite Form dieser Gleichungen*, welche bei beliebiger Lage des Koordinatensystems XYZ gilt, nämlich

$$(3') \qquad \begin{cases} \dfrac{dL}{dt} = rM - qN + \Lambda, \\ \dfrac{dM}{dt} = -rL + pN + \mathsf{M}, \\ \dfrac{dN}{dt} = qL - pM + \mathsf{N}. \end{cases}$$

Wollen wir einen der beiden Vektoren J oder R eliminieren, so ist es wieder bequem das XYZ-System mit dem Trägheitskreuz zusammenfallen zu lassen. Dann kommen wir auf die *gewöhnliche Form der Eulerschen Gleichungen beim Vorhandensein äuſserer Kräfte:*

Hosted by Google

$$(3'')\qquad \begin{cases} A\,\dfrac{dp}{dt} = (B-C)\,qr + \mathsf{\Lambda}, \\ B\,\dfrac{dq}{dt} = (C-A)\,rp + \mathsf{M}, \\ C\,\dfrac{dr}{dt} = (A-B)\,pq + \mathsf{N}. \end{cases}$$

Die Formen (3) und (3′) der Eulerschen Gleichungen verdienen wieder vor (3″) den Vorzug, weil sie unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems sind. Die Gleichungen (3) zeigen besonders deutlich:

Beim Vorhandensein äufserer Kräfte sind die Eulerschen Gleichungen der analytische Ausdruck für die Thatsache, dafs die Änderungsgeschwindigkeit des Impulses im Raum nach Richtung und Gröfse gleich ist der den äufseren Kräften entsprechenden Drehkraft.

Bei Euler treten die nach ihm benannten Gleichungen zum ersten Male in der Abhandlung auf: „Mouvement de rotation des corps solides autour d'un point fixe“*). Die vektorielle Schreibweise kommt bei Hrn. Tait in seiner Arbeit**): „On the rotation of a body about a fixed point“ vor. Die hier vorgetragene Auffassung der Eulerschen Gleichungen ist wohl zuerst (1854) von Hayward***) in der früher citierten Abhandlung gegeben worden. Sie operiert mit dem mechanischen Systeme als mit einem Ganzen und läfst an Einfachheit nichts zu wünschen übrig. Die Poinsotsche Ableitung derselben Gleichungen†), welche wir sofort näher kritisieren werden, ist viel weniger durchsichtig.

Wir wollen die diesbezüglichen Poinsotschen Betrachtungen hier nur soweit reproduzieren, als sie uns mit einer *neuen Auffassung des in den Eulerschen Gleichungen auftretenden vektoriellen Produktes aus Impuls- und Drehungsvektor* ausstattet. Dieser bei unserer Ableitung *kinematisch* definierte Term besitzt, wie wir zeigen wollen, eine einfache *kinetische* Bedeutung.

Wir wollen uns zu dem Zwecke einmal vorstellen, dafs die Drehungsaxe im Körper fest sei, und dafs der Kreisel um diese mit konstanter Geschwindigkeit rotiere. Alsdann würde in jedem Massenpunkte des Kreisels eine Centrifugalkraft angreifen, deren Gröfse und Richtung

---

*) Abhandlungen der Berliner Akademie vom Jahre 1758.

**) Vgl. Transactions of the R. Soc. of Edinburgh, Vol. 25, 1869, pag. 279, 280. Der Vektor $\varphi(R)$, welcher bei Tait sowie früher bei Hamilton (Elemente der Quaternionenrechnung, Band 2, pag. 350 der deutschen Ausgabe) durch eine ziemlich komplizierte Vektorgleichung mittelst des Rotationsvektors R definiert wird, ist unser Impuls.

***) Vgl. oben pag. 113.

†) Vgl. Théorie nouvelle . . ., Nr. 53 u. ff.

Hosted by Google

sich nach den Regeln der elementaren Punktmechanik bestimmt. Wir werden darauf alle diese Centrifugalkräfte hinsichtlich des festen Punktes O als Bezugspunkt zu einer resultierenden *„centrifugalen Drehkraft“* C zusammensetzen. *Diese Drehkraft*, behaupten wir, *ist gerade gleich dem in Rede stehenden vektoriellen Produkt:*

$$C = V(J, R). \tag{4}$$

Beim Beweise wollen wir ähnlich verfahren, wie pag. 94 geschehen, als wir aus dem System der zu den einzelnen Massenteilchen gehörigen Einzelimpulse den Gesamtimpuls des Kreisels zusammensetzten. Wir wollen nämlich die (als fest gedachte) Drehungsaxe zur X-Axe nehmen, so daſs wir die (als konstant vorausgesetzte) Rotationsgeschwindigkeit mit p bezeichnen können. Jedes Massenteilchen dm des Kreisels wird alsdann auf einem Kreise um die X-Axe mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit p herumgeführt. Der Radius des Kreises wird, wenn die Koordinaten von dm XYZ sind, $\sqrt{Y^2 + Z^2}$.

Bei dieser Bewegung wird das einzelne Massenteilchen von einer Centrifugalkraft angegriffen, deren Vektor wir mit K bezeichnen wollen. Wir werden den Begriff der Centrifugalkraft im fünften Paragraphen vom Standpunkte der Impulstheorie aus entwickeln. Hier entnehmen wir den dortigen Ausführungen die wohlbekannte Thatsache, daſs der Vektor der Centrifugalkraft nach Richtung und Sinn radial vom Mittelpunkte des Kreises nach auſsen gerichtet ist und daſs der Gröſse nach in unserem Falle

$$|K| = dm \cdot p^2 \sqrt{Y^2 + Z^2} \text{*)}$$

ist. Die Komponenten von K nach den Koordinatenaxen werden daher, wie man leicht erkennt, bez.:

$$K^X = 0, \quad K^Y = p^2 Y dm, \quad K^Z = p^2 Z dm.$$

Aus dem System der Einzelkräfte K berechnet sich die centrifugale Drehkraft C nach den Regeln der Statik. Aus den Gleichungen (1) von pag. 85 ergeben sich die Komponenten von C folgendermaſsen:

$$C^X = 0, \quad C^Y = -p^2 \int ZX dm, \quad C^Z = p^2 \int XY dm. \tag{5}$$

*) Die Bezeichnung $|K|$ für die Gröſse des Vektors K entnehmen wir der in der Funktionentheorie üblichen Schreibweise (vermöge deren man ja den absoluten Betrag der komplexen Zahl $z = x + iy$, d. h. die Länge des zweigliedrigen Vektors $x + iy$ mit $|z|$ bezeichnet). Die Einführung dieses Zeichens wird uns im Folgenden häufig bequem sein, weil sie uns der Mühe überhebt, in jedem Falle Richtung und Sinn der betr. Vektoren in unsern Formeln zum Ausdruck zu bringen.


Hosted by Google

Erinnern wir uns andrerseits der Ausdrücke, welche pag. 94 bei gleicher Lage des Koordinatensystems für den resultierenden Impuls abgeleitet wurden. Wir fanden für die Komponenten desselben:

$$(5') \quad L = p\int(Y^2 + Z^2)\,dm, \quad M = -p\int XY\,dm, \quad N = -p\int ZX\,dm.$$

Mit Rücksicht auf diese Gleichungen können wir die Gleichungen (5) folgendermaſsen schreiben:

$$C^X = 0, \quad C^Y = pN, \quad C^Z = -pM.$$

Die rechterhand stehenden Gröſsen sind aber nach der analytischen Definition des vektoriellen Produktes von pag. 62 direkt mit den Komponenten von $V(J, R)$ identisch, da bei unserer Wahl des Koordinatensystems zwei Komponenten des Vektors R verschwinden ($q = r = 0$). Unsere obige Behauptung ist mithin erwiesen.

Auf Grund der l. c. erwähnten geometrischen Bedeutung des vektoriellen Produktes können wir sodann folgenden Satz aussprechen, welcher natürlich richtig bleibt, auch wenn wir die oben der Bequemlichkeit halber getroffene spezielle Wahl des Koordinatensystems fallen lassen:

Die resultierende centrifugale Drehkraft wird durch einen Vektor dargestellt, welcher, gleichzeitig auf dem Drehungsvektor und dem Impulsvektor senkrecht, nach derjenigen Seite hin errichtet ist, von der aus der letztere in den ersteren durch eine positive Drehung auf kürzestem Wege übergeführt wird. Der Gröſse nach ist unsere Drehkraft bei durchgehender Zugrundelegung des absoluten Maſssystems gleich dem Inhalt des aus Impuls- und Drehungsvektor zu konstruierenden Parallelogrammes.

An diese kinetische Auffassung des in den Eulerschen Gleichungen auftretenden Termes $V(J, R)$ schlieſst sich eine *neue Interpretation der Eulerschen Gleichungen* an. Wir betonen aber ausdrücklich, daſs wir dieser neuen Interpretation gegenüber unserer ursprünglichen, nach welcher die Eulerschen Gleichungen die Konstanz des Impulses im Raume aussagten, nur ein sekundäres Interesse beimessen.

Bemerken wir zunächst, daſs wir die Eulerschen Gleichungen der kräftefreien bez. der von der äuſseren Drehkraft Δ beeinfluſsten Bewegung mit Rücksicht auf (4) folgendermaſsen schreiben können:

$$\frac{dJ}{dt} = C \quad \text{bez.} \quad \frac{dJ}{dt} = C + \Delta.$$

Daraufhin können wir als Ergänzung zu den Impulssätzen Ia und IIa von pag. 112 und pag. 115 zwei neue Sätze aussprechen, welche sich auf die Änderung des Impulses relativ zu dem Kreisel beziehen:


Hosted by Google

Satz Ib. *Bei der kräftefreien Bewegung ändert sich der Impuls relativ zu dem Körper in jedem Momente so, dafs er sich mit dem von den soeben betrachteten Centrifugalkräften herrührenden unendlich kleinen Drehstofs zusammensetzt.*

Satz IIb. *Bei der unter dem Einflufs äufserer Kräfte stehenden Bewegung wird die Änderung des Impulses relativ zum Körper in jedem Momente gleich dem von unseren Centrifugalkräften herrührenden Drehstofs vermehrt um den den äufseren Kräften entsprechenden Drehstofs.*

Diese Impulssätze zeigen, dafs man die umgekehrte Bewegung, welche durch den Impuls J und seine Änderung $\frac{dJ}{dt}$ bestimmt ist, in derselben Weise behandeln kann wie die direkte Bewegung, falls man nur die bei der direkten Bewegung in Frage kommenden äufseren Kräfte um die Centrifugalkräfte vermehrt, welche bei konstant gedachter Drehung in den einzelnen Massenteilchen angreifen würden.

Besonders plausibel wird der Inhalt unserer Impulssätze in dem speziellen Falle $\frac{dJ}{dt} = 0$, *wo der Impuls im Körper fest ist.* Die entsprechende Bewegung besteht offenbar aus einer gleichförmigen Drehung um eine (im Körper und im Raume) feste Axe. Hier ist es ganz klar, dafs wir — in Übereinstimmung mit dem Impulssatze IIb — von aufsen her eine Drehkraft $\Delta = -C$ aufwenden müssen, welche der centrifugalen Drehkraft entgegengesetzt gleich ist.

Die in Aussicht gestellte neue Interpretation der Eulerschen Gleichungen besteht nun einfach darin, dafs wir die Reihenfolge der letzten Betrachtungen umkehren und sagen: *Die Eulerschen Gleichungen sind der direkte analytische Ausdruck unserer Impulssätze Ib und IIb.*

Bei Poinsot steht die zuletzt genannte Auffassung der Eulerschen Gleichungen im Vordergrunde. Seine Behandlung der kräftefreien Kreiselbewegung beruht geradezu auf dem axiomatisch hingestellten und nicht ganz klar formulierten Impulssatze Ib. Offenbar ist aber dieser Impulssatz viel weniger leicht verständlich, wie unsere früheren Sätze, welche sich auf die Änderung des Impulses im Raume bezogen. Man bemerke vor allen Dingen, dafs die Centrifugalkräfte, von denen unsere jetzigen Impulssätze handeln, nur dann zur Wirkung kommen, wenn man die Drehungsaxe im Körper festgehalten denkt, dafs sie also bei der wirklichen Bewegung des Kreisels, (bei welcher die Drehungsaxe fortwährend wechselt), überhaupt nicht auftreten. Es scheint uns daher nicht richtig, mit Poinsot diese neuen Impulssätze als selbstverständliche Axiome vorauszusetzen und die Ableitung der Eulerschen Gleichungen darauf zu basieren. Dement-

Hosted by Google

sprechend sehen auch die meisten Lehrbücher*) von der Poinsotschen Ableitung der Eulerschen Gleichungen ab und geben eine Betrachtung, welche dem Sinne nach mit unserer ursprünglichen Ableitung identisch ist und nur deshalb weniger einfach erscheint, weil die prinzipielle Bedeutung des Impulsbegriffes von vornherein nicht genügend klargestellt wird.

Zum Schlusse mögen noch einige kleinere Bemerkungen Platz finden, welche mit dem Begriffe der centrifugalen Drehkraft C in Zusammenhang stehen.

Es handle sich zunächst um die Rechtfertigung des Wortes „Centrifugalmoment", mit welchem wir pag. 98 die Integrale

$$\int YZ\,dm, \quad \int ZX\,dm, \quad \int XY\,dm$$

belegten. Die oben gegebene Berechnung von C zeigt, daſs diese Gröſsen direkt oder bis auf das Vorzeichen den Komponenten der aus den einzelnen Centrifugalkräften entspringenden Drehkraft gleich sind, falls wir den Körper mit der Winkelgeschwindigkeit 1 um eine der Koordinatenaxen drehen. *Die als Centrifugalmomente bezeichneten Gröſsen treten also unter gewissen Verhältnissen wirklich als Drehmomente der Centrifugalkräfte auf.*

Wenn die etwa mit der X-Axe zusammenfallende Drehungsaxe eine Hauptaxe des Körpers ist, so werden nach Definition der Hauptaxen die beiden Centrifugalmomente

$$\int ZX\,dm \quad \text{und} \quad \int XY\,dm$$

gleich Null; infolgedessen verschwinden nach (5) alle drei Komponenten von C. *Um die Hauptaxen herum sind also die Massen des Körpers so ausbalanciert, daſs die Centrifugalkräfte der einzelnen Massenteilchen sich gegenseitig kompensieren.* In diesem Falle liegt bei der kräftefreien Bewegung kein Grund vor, warum der Impuls seine Lage gegen den Körper verändern sollte. Wir kommen von hier aus zu der uns geläufigen Thatsache, daſs die Hauptaxen permanente Impuls- und also auch permanente Drehungsaxen sind.

In allen anderen Fällen besitzt die resultierende centrifugale Drehkraft eine von Null verschiedene Gröſse und ist senkrecht gegen die Impuls- und Drehungsaxe gerichtet. Sie bewirkt alsdann nach unserem Impulssatze Ib während der Zeit dt im Falle der kräftefreien Bewegung relativ zum Kreisel eine Umlagerung des Impulsvektors, bei welcher der Endpunkt desselben um das Stück $C\,dt$ verschoben wird. *Der*

*) Vgl. z. B. Despeyrons-Darboux, Appell etc.

Impuls-Endpunkt schreitet also im Körper stets gleichzeitig senkrecht zum instantanen Drehungsvektor und zur instantanen Impulsaxe fort mit einer Geschwindigkeit, die dem Parallelogramm aus beiden Vektoren gleich ist. —

Endlich eine letzte wichtige Bemerkung über die Eulerschen Gleichungen. Die Eulerschen Gleichungen bestimmen die Lage des Impulsvektors (oder die des Drehungsvektors) gegen den Kreisel. Um andrerseits die Lage des Kreisels im Raume zu bestimmen, ist ein weiteres Gleichungssystem erforderlich, welches rein kinematischer Natur ist und von der Beschaffenheit der auf den Kreisel wirkenden äußeren Kräfte nicht abhängt. Je nachdem wir die Lage des Kreisels durch die Parameter $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ oder durch die φ, ψ, ϑ beschreiben wollen, werden wir hiezu die Gleichungen (4) von pag. 43 oder die Gleichungen (9) von pag. 45 benutzen. *Die vollständigen Differentialgleichungen des Kreiselproblems werden daher durch die Eulerschen Gleichungen einerseits und durch eines der zuletzt genannten Gleichungssysteme andrerseits dargestellt.*

§ 2. Analytische Behandlung der kräftefreien Bewegung des Kreisels.

Wir wollen jetzt die bereits im vorigen Kapitel besprochene Theorie der kräftefreien Kreiselbewegung noch einmal analytisch ableiten und vervollständigen. Dabei gehen wir von den Differentialgleichungen des Problems aus, d. h. von den Eulerschen Gleichungen einerseits und von den etwa in den φ, ψ, ϑ geschriebenen kinematischen Gleichungen andrerseits. Wir haben also erstlich:

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{dL}{dt} = Mr - Nq, \\ \dfrac{dM}{dt} = Np - Lr, \\ \dfrac{dN}{dt} = Lq - Mp; \end{cases}$$

ferner aber:

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{d\varphi}{dt} = r - \dfrac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta}(p \sin\varphi + q\cos\varphi), \\ \dfrac{d\psi}{dt} = \dfrac{1}{\sin\vartheta}(p\sin\varphi + q\cos\varphi), \\ \dfrac{d\vartheta}{dt} = (p\cos\varphi - q\sin\varphi). \end{cases}$$

Es handelt sich darum, dieses Gleichungssystem zu integrieren. Wir bemerken vorab, daſs sich das Integrationsgeschäft in zwei Schritte zerlegt. Wir können nämlich die Gleichungen (1) für sich behandeln und aus ihnen p, q, r als Funktionen der Zeit bestimmen. Mit den

Hosted by Google

so gefundenen Ausdrücken gehen wir in die Differentialgleichungen (2) ein, welche die Werte von φ, ψ, ϑ liefern.

Die Eulerschen Gleichungen (1) integrieren heifst: drei von einander unabhängige Relationen finden, welche t und die p, q, r, aber nicht mehr ihre Differentialquotienten nach der Zeit enthalten. Zwei solche Relationen können sofort in algebraischer Form aufgestellt werden.

Wenn wir die Gleichungen (1) bez. mit p, q, r oder mit L, M, N multiplizieren und addieren, so entsteht rechts beidemal Null. Wir haben also

$$(3)\qquad \begin{cases} p\,dL + q\,dM + r\,dN = 0, \\ L\,dL + M\,dM + N\,dN = 0. \end{cases}$$

Die Bedeutung dieser Gleichungen ist uns wohlbekannt. Sie entsprechen der pag. 146 hervorgehobenen Thatsache, dafs die Fortschreitungsrichtung des Impuls-Endpunktes im Körper dauernd gleichzeitig auf dem Drehungsvektor und dem Impulse senkrecht steht.

Die Gleichungen (3) lassen sich nun mit Rücksicht auf die Relationen zwischen dem Impuls- und dem Drehungsvektor sofort integrieren; in den p, q, r geschrieben lautet das Resultat der Integration:

$$(4)\qquad \begin{cases} Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = 2h, \\ A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = G^2, \end{cases}$$

in Übereinstimmung mit pag. 124.

Durch (4) wird die *Polhodiekurve* als eine *Raumkurve vierter Ordnung* definiert. Stellen wir aus den vorstehenden Gleichungen eine in den p, q, r homogene Relation her, so liefert uns diese die Gleichung des *Polhodiekegels*. Zu dem Zwecke multiplizieren wir die erste Gleichung mit G^2, die zweite mit $2h$ und erhalten durch Subtraktion

$$(AG^2 - 2hA^2)\,p^2 + (BG^2 - 2hB^2)\,q^2 + (CG^2 - 2hC^2)\,r^2 = 0.$$

Der Polhodiekegel wird also in unserem Falle ein *Kegel zweiten Grades.*

Zur vollständigen Integration fehlt uns noch eine dritte Gleichung zwischen p, q, r und t. Der Symmetrie halber wollen wir dieselbe in der Weise aufstellen, dafs wir die instantane Rotationsgeschwindigkeit Ω in ihrer Abhängigkeit von t ausdrücken. Diese Abhängigkeit ist aber nicht algebraischer Natur, sondern führt, wie wir sogleich sehen werden, auf die elliptischen Transcendenten. Wir werden es daraufhin begreiflich finden, dafs unsere frühere elementargeometrische Behandlung hinsichtlich des zeitlichen Ablaufs der Poinsot-Bewegung unvollständig bleiben mufste, und dafs sie speziell zur Darstellung der Winkelgeschwindigkeit in jedem Augenblicke nicht völlig ausreichte.


Hosted by Google

Am einfachsten verfahren wir folgendermaſsen. Wir kombinieren die Gleichungen (4) mit der folgenden Identität

$$(4') \qquad \Omega^2 = p^2 + q^2 + r^2 = u,$$

in welcher u eine Hülfsvariable bedeutet. Aus (4) und (4') berechnen sich p^2, q^2 und r^2 als lineare Funktionen von u und zwar findet man durch eine kleine Determinantenrechnung

$$(5) \qquad \begin{cases} p^2 = \dfrac{uBC - 2h(B+C) + G^2}{(A-B)(A-C)}, \\ q^2 = \dfrac{uCA - 2h(C+A) + G^2}{(B-C)(B-A)}, \\ r^2 = \dfrac{uAB - 2h(A+B) + G^2}{(C-A)(C-B)}. \end{cases}$$

Insbesondere wird also das Produkt pqr gleich der Quadratwurzel aus einem Ausdruck dritten Grades in u.

Gehen wir nun auf die Gleichungen (1) zurück. Wir multiplizieren dieselben mit $\frac{2p}{A}, \frac{2q}{B}, \frac{2r}{C}$ und erhalten durch Addition

$$2\left(p\frac{dp}{dt} + q\frac{dq}{dt} + r\frac{dr}{dt}\right) = \frac{du}{dt} = cpqr,$$

wo zur Abkürzung

$$c = 2\left(\frac{B-C}{A} + \frac{C-A}{B} + \frac{A-B}{C}\right)$$

gesetzt ist. Infolgedessen wird

$$(6) \qquad dt = \frac{1}{c}\frac{du}{pqr} \quad \text{oder} \quad t - t_0 = \frac{1}{c}\int_{u_0}^{u} \frac{du}{pqr}.$$

Das hier auftretende Integral haben wir nach dem, was soeben über die Abhängigkeit des Produktes pqr von u gesagt wurde, als *elliptisches Integral* zu bezeichnen, insofern der Nenner die Quadratwurzel aus einem Ausdruck dritten Grades in u bedeutet. Genauer auf die Theorie der elliptischen Integrale wollen wir indessen erst im folgenden Kapitel bei dem Probleme des schweren symmetrischen Kreisels eingehen. Wir bemerken hier nur, daſs durch die Gleichung (6) t als Funktion von u und also auch umgekehrt u bez. Ω^2 als Funktion von t bestimmt ist. Mittels der Gleichungen (5) können wir dann auch p, q, r als Funktionen von t berechnen.

Betrachten wir nun die Gleichungen (2), indem wir in ihnen p, q, r als bekannt ansehen. Die direkte Integration dieser Gleichungen können wir umgehen, wenn wir uns auf die Thatsache stützen, daſs der Impuls im Raume konstant ist. Die feste Axe des Impulses können wir zur

Hosted by Google

z-Axe wählen, wobei der Endpunkt des Impulses die Koordinaten $x = 0$, $y = 0$, $z = G$ und $X = Ap$, $Y = Bq$, $Z = Cr$ erhält. Die Richtungscosinus der z-Axe gegen die Axen X, Y, Z, welche früher mit c, c', c'' bezeichnet wurden, sind daher

$$c = \frac{Ap}{G}, \quad c' = \frac{Bq}{G}, \quad c'' = \frac{Cr}{G};$$

andererseits haben wir nach den Gleichungen (6) von pag. 20

$$c = \sin\vartheta \sin\varphi, \quad c' = \sin\vartheta \cos\varphi, \quad c'' = \cos\vartheta.$$

Mithin wird

$$(7) \qquad \sin\vartheta \sin\varphi = \frac{Ap}{G}, \quad \sin\vartheta \cos\varphi = \frac{Bq}{G}, \quad \cos\vartheta = \frac{Cr}{G}.$$

Diese Gleichungen bestimmen φ und ϑ für jeden Wert von t, falls, wie wir voraussetzen, die p, q, r bekannte Funktionen der Zeit sind. Sie müssen natürlich mit den Gleichungen (2) verträglich sein und stellen zwei Integrale derselben dar.

Über die an und für sich willkürlichen Integrationskonstanten haben wir dadurch implicite verfügt, daſs wir die Impulsaxe speziell zur Axe z nahmen.

Der Winkel ψ berechnet sich alsdann durch eine bloſse Quadratur. Die mittelste der Gleichungen (2) liefert nämlich mit Rücksicht auf (7):

$$\frac{d\psi}{dt} = G\,\frac{Ap^2 + Bq^2}{G^2 - C^2r^2},$$

wofür wir nach Gleichung (4) auch schreiben können:

$$(8) \qquad \frac{d\psi}{dt} = G\,\frac{Ap^2 + Bq^2}{A^2p^2 + B^2q^2} = G\,\frac{2h - Cr^2}{G^2 - C^2r^2}.$$

Da wir p, q, r als bekannte Funktionen von t ansehen, kann hiernach ψ durch eine Quadratur für jeden Wert von t gefunden werden.

Durch die vorstehenden in den Lehrbüchern vielfach entwickelten Formeln wird es möglich, sämtliche Elemente der kräftefreien Kreiselbewegung numerisch auszurechnen. Wir könnten daher jetzt z. B. die früher aufgeworfene Frage nach der Gestalt der Herpolhodiekurve im Einzelnen beantworten, wenn wir nicht wie gesagt, das Studium der elliptischen Integrale einstweilen noch zurückschieben müſsten.

Übrigens würde man bei einer ausführlichen analytischen Behandlung mit Vorteil statt der φ, ψ, ϑ unsere Parameter α, β, γ, δ zu Grunde legen. Es würde sich dabei zeigen, daſs, wie wir es später bei der Theorie des schweren symmetrischen Kreisels schildern werden, die Formeln in den α, β, γ, δ nicht nur symmetrischer, sondern auch in funktionentheoretischer Hinsicht erheblich einfacher werden, als in den gewöhnlich benutzten φ, ψ, ϑ. Man bemerke, daſs schon die in



den $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ geschriebenen kinematischen Differentialgleichungen vor den entsprechenden Gleichungen in den φ, ψ, ϑ einen Vorzug haben. Während diese ein nicht reduzierbares System von drei simultanen Differentialgleichungen erster Ordnung darstellen, zerfallen jene in zwei Paare von zwei simultanen linearen Differentialgleichungen, welche die Gröfsen α und β einerseits und die Gröfsen γ und δ andrerseits für sich zu bestimmen gestatten.

Von hier aus würden auch die schönen Resultate von Jacobi*), welcher direkt die neun Richtungscosinus $a, b, c, \ldots$ in ihrer Abhängigkeit von t als ϑ-Quotienten darstellt, sowie die anschliefsenden wichtigen Untersuchungen von Hermite**) eine neue Beleuchtung erfahren.

Wir wollen nun auch die, wie wir wissen, sehr einfache *kräftefreie Bewegung des symmetrischen Kreisels* von den Differentialgleichungen aus untersuchen. Wir legen wiederum die Gleichungen (1) und (2) zu Grunde, indem wir dort $A = B$ setzen. Alsdann ergiebt sich aus den Integralen (4) durch geeignete Kombination

$$(4') \qquad \begin{cases} p^2 + q^2 = \text{const.} = \dfrac{2hC - G^2}{A(C-A)}, \\ \qquad r^2 = \text{const.} = \dfrac{2hA - G^2}{C(A-C)}. \end{cases}$$

Diese Gleichungen zeigen, dafs die Polhodiekurve jetzt in bekannter Weise aus einem um die Figurenaxe beschriebenen Kreise besteht. Gleichzeitig sehen wir, dafs die Gröfse

$$u = p^2 + q^2 + r^2$$

jetzt ihrerseits eine Konstante wird. Infolgedessen ist die obige Methode zur Auffindung eines dritten Integrales, bei welcher nach der Variabeln u integriert wurde, nicht mehr anwendbar. Wir finden aber das noch erforderliche dritte Integral sehr leicht aus den Gleichungen (1) direkt. Wir multiplizieren die beiden ersten Gleichungen (1) bez. mit 1 und $\pm i$; dann ergiebt sich durch Addition:

$$(5') \qquad A\frac{d(p \pm iq)}{dt} = \pm i(C-A)\,r(p \pm iq)$$

oder

$$(6') \qquad p \pm iq = (p_0 \pm iq_0)\, e^{\pm \frac{(C-A)r_0}{A} it},$$

wo p_0, q_0 und r_0 die Werte von p, q und r zur Zeit $t = 0$ bedeuten.

*) Vgl. Sur la rotation d'un corps, Crelles Journal Bd. 39, 1850.
**) Sur quelques applications des fonctions elliptiques, Paris 1883.

Hosted by Google

Es bleibt noch die Integration der Gleichungen (2) übrig. Aus den in (7) enthaltenen Integralen dieser Gleichungen schliefsen wir jetzt:

$$(7') \qquad \cos\vartheta = \frac{Cr}{G} = \text{const.},$$

$$\sin\vartheta\, e^{\pm i\varphi} = \pm\, i\frac{A}{G}\,(p \mp iq).$$

Aus der letzten Gleichung folgt sodann durch logarithmische Differentiation mit Rücksicht auf (5') und (7'):

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\,\frac{C-A}{A}\,r = \text{const.}$$

oder

$$(8') \qquad \varphi = \mu t,$$

wenn wir zur Abkürzung

$$(8'') \qquad \mu = \frac{A-C}{A}\,r$$

setzen und annehmen, dafs dem Zeitpunkte $t = 0$ der Winkel $\varphi = 0$ entspricht.

Endlich haben wir nach (8)

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{G}{A} = \text{const.},$$

also

$$(9') \qquad \psi = \nu t,$$

falls wieder zur Abkürzung

$$(9'') \qquad \nu = \frac{G}{A}$$

gesetzt und angenommen wird, dafs für $t = 0$ auch $\psi = 0$ ist. *Durch die Gleichungen* (7'), (8') *und* (9') *ist die allgemeine Bewegung des kräftefreien symmetrischen Kreisels als reguläre Präcession charakterisiert.*

Als Konstanten der regulären Präcession werden wir, wie früher, in erster Linie die Gröfsen μ, ν und ϑ ansehen. Durch diese lassen sich die Konstanten p_0, q_0, r_0 nach den Gleichungen (4) von pag. 50 folgendermafsen ausdrücken:

$$(10) \qquad p_0 = 0, \quad q_0 = \nu\sin\vartheta, \quad r_0 = \mu + \nu\cos\vartheta.$$

Andrerseits sind aber die drei Gröfsen μ, ν und ϑ den zwei früheren Integrationskonstanten h und G äquivalent; es wird daher zwischen jenen eine Relation bestehen, welche wir aufstellen wollen. Nach Gleichung (8'') haben wir

$$-\,\mu A = (C - A)\,r = (C - A)\,r_0,$$

also mit Rücksicht auf (10):


Hosted by Google

$$-\mu A = (C - A)(\mu + \nu \cos\vartheta)$$

oder

(11) $$C\mu + (C - A)\nu \cos\vartheta = 0.$$

Bei dem einzelnen kräftefreien symmetrischen Kreisel kann also immer nur eine spezielle Art von regulärer Präcession stattfinden, bei welcher die Konstanten μ, ν, ϑ *der Relation* (11) *genügen.*

Schliefslich wollen wir noch die reguläre Präcession des symmetrischen Kreisels nach den Werten von $\frac{\nu}{\mu}$ im Sinne von pag. 51 klassifizieren. Die Gleichung (11) liefert uns

$$\frac{\nu}{\mu} = \frac{C}{A - C}\frac{1}{\cos\vartheta}.$$

Da wir den Winkel ϑ im allgemeinen kleiner als $\frac{\pi}{2}$ voraussetzen dürfen (vgl. pag. 51), so wird die rechte Seite positiv, wenn $A > C$, negativ, wenn $A < C$ ist. Infolgedessen können wir auf Grund der Tabelle von pag. 53 sagen:

Bei dem verlängerten Kreisel ($A > C$) *ist die in Rede stehende Präcession eine progressive, bei dem abgeplatteten* ($A < C$) *eine retrograde.*

Im letzteren Falle läfst sich der Wert von $\frac{\nu}{\mu}$ noch genauer in Grenzen einschliefsen. Wir haben nämlich, wenn $C > A$ ist:

$$-\cos\vartheta \frac{\nu}{\mu} = \frac{C}{C - A} > 1$$

oder

$$\frac{\nu}{\mu} < -\frac{1}{\cos\vartheta}.$$

Bei dem abgeplatteten Kreisel ($A < C$) *ist also die „freie“ Präcession notwendiger Weise eine pericykloidische, bei dem verlängerten Kreisel* ($A > C$) *eine epicykloidische.*

Von den pag. 51 unterschiedenen vier Intervallen des Wertegebietes $\frac{\nu}{\mu}$ kommen also für die kräftefreie Kreiselbewegung nur die beiden äufsersten in Betracht. Demgegenüber werden wir bei der Betrachtung des schweren Kreisels (vgl. den sechsten Paragraphen dieses Kapitels) sehen, dafs für seine Präcessionsbewegungen auch die beiden mittleren Intervalle zugänglich sind.

In dem Grenzfalle $A = C$ wird

$$\frac{\nu}{\mu} = \pm\infty;$$

der Kreisel rotiert dann nach pag. 51 gleichförmig um die Vertikale,

Hosted by Google

d. h. die Impulsaxe herum. Wir kommen also zu dem bekannten Resultate:

Bei dem Kugelkreisel ($A = C$) geht die gleichförmige Präcession in eine gleichförmige Rotation um die Axe des Impulses über.

§ 3. Über die Bedeutung der Eulerschen Gleichungen und ihr Verhältnis zu den Gleichungen von Lagrange.

Die Eulerschen Gleichungen nehmen in dem System der Mechanik eine ganz singuläre Stellung ein und ordnen sich dem allgemeinen Typus der mechanischen Differentialgleichungen, wie er von Lagrange aufgestellt ist, nicht unter. Auch ist es nicht möglich, bei beliebigen mechanischen Systemen Gleichungen aufzustellen, welche ähnliche Vorteile darbieten, wie die Eulerschen Gleichungen bei dem starren Körper. Es wird daher interessant sein, in diesem Paragraphen den Grund für die Besonderheiten der Eulerschen Gleichungen zu besprechen und ihre Vorzüge gegenüber den allgemeinen Gleichungen von Lagrange klarzustellen.

Wir setzen zunächst die allgemeinen Lagrangeschen Gleichungen für den Fall des Kreisels her. Die Lage des Kreisels denken wir uns etwa durch die drei Lagenkoordinaten φ, ψ, ϑ, den Geschwindigkeitszustand durch die zugehörigen Geschwindigkeitskoordinaten φ', ψ', ϑ' dargestellt. Unter T verstehen wir den Ausdruck der lebendigen Kraft in den genannten Lagen- und Geschwindigkeitskoordinaten geschrieben, unter dA die Arbeit, welche das am Kreisel angreifende System der äußeren Kräfte bei der unendlich kleinen Verrückung ($d\varphi$, $d\psi$, $d\vartheta$) leistet.

Die Gleichungen nehmen nun genau dieselbe Form an, welche wir aus dem vorigen Kapitel vom einzelnen Massenpunkte her kennen (vgl. pag. 79 und ff.); wir haben nämlich einerseits:

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{d[\Phi]}{dt} - \dfrac{\partial T}{\partial \varphi} = \Phi, \\ \dfrac{d[\Psi]}{dt} - \dfrac{\partial T}{\partial \psi} = \Psi, \\ \dfrac{d[\Theta]}{dt} - \dfrac{\partial T}{\partial \vartheta} = \Theta, \end{cases}$$

und andrerseits:

$$(2) \qquad \begin{cases} [\Phi] = \dfrac{\partial T}{\partial \varphi'}, & [\Psi] = \dfrac{\partial T}{\partial \psi'}, & [\Theta] = \dfrac{\partial T}{\partial \vartheta'}, \\ \Phi = \dfrac{\partial A}{\partial \varphi}, & \Psi = \dfrac{\partial A}{\partial \psi}, & \Theta = \dfrac{\partial A}{\partial \vartheta}. \end{cases}$$


Hosted by Google

In der That hat man nach Lagrange bei jedem System von drei Freiheitsgraden immer dasselbe Gleichungssystem, wie man auch die drei Parameter φ, ψ, ϑ einführen mag, und schliefslich auch bei einem System von n Freiheitsgraden das entsprechende Gleichungssystem, wobei nur statt unserer drei Parameter deren n zu benutzen sind.

Unsere Schreibweise der Lagrangeschen Gleichungen weicht nur insofern von der gewöhnlichen Schreibweise ab, als wir den Begriff des Impulses explicite darin zum Ausdruck bringen. Dies empfiehlt sich durchaus, weil hierdurch die Bedeutung der Gleichungen viel klarer wird. Durch die Gleichungen (2) werden ersichtlich die Komponenten des Impulses bestimmt, welche zu einer gegebenen Lage des Kreisels und zu einem gegebenen Geschwindigkeitszustand gehören, sowie die Komponenten der äufseren Kraft, welche einer gegebenen Lage entsprechen. (Die Differentialzeichen $\frac{\partial A}{\partial \varphi} \cdots$ sind dabei in demselben uneigentlichen Sinne zu verstehen, wie oben pag. 77 erläutert wurde.) Die Gleichungen (1) geben darauf an, wie sich die Komponenten des Impulses während des Zeitelementes dt abändern. Die Gleichungen (1) sind daher im Falle des Kreisels mit den Eulerschen Gleichungen äquivalent und müssen wie diese der Thatsache Ausdruck geben, dafs die Änderung des Impulses jederzeit gleich dem von den äufseren Kräften herrührenden Drehstofse ist.

Wir wollen die Umrechnung der Eulerschen Gleichungen in die Lagrangesche Form hier wirklich durchführen und damit eine Ableitung der letzteren für den besonderen hier vorliegenden Fall aus dem Impulsprinzipe geben. Da aber die Rechnungen sonst etwas umständlich werden, wollen wir uns hierbei auf den Fall des symmetrischen Kreisels beschränken.

Wir drücken zunächst den Drehungsvektor (p, q, r) durch die Geschwindigkeitskoordinaten φ', ψ', ϑ' aus und in entsprechender Weise die in den Lagrangeschen Gleichungen vorkommenden Komponenten $[\Phi]$, $[\Psi]$, $[\Theta]$ und Φ, Ψ, Θ des Impulses und der äufseren Kraft durch die in den Eulerschen Gleichungen vorkommenden Komponenten L, M, N und Λ, M, N. Dies geschieht nach den Gleichungen (7) von pag. 45, sowie nach pag. 108 in folgender Weise:

$$(3)\qquad \begin{cases} p = \sin\varphi \sin\vartheta \cdot \psi' + \cos\varphi \cdot \vartheta', \\ q = \cos\varphi \sin\vartheta \cdot \psi' - \sin\varphi \cdot \vartheta', \\ r = \varphi' + \cos\vartheta \cdot \psi'; \end{cases}$$

$$(4)\qquad \begin{cases} [\Phi] = N, \\ [\Psi] = \sin\vartheta \sin\varphi \cdot L + \sin\vartheta \cos\varphi \cdot M + \cos\vartheta \cdot N, \\ [\Theta] = \cos\varphi \cdot L - \sin\varphi \cdot M; \end{cases}$$



$$(5)\quad \begin{cases} \Phi = & \mathsf{N}, \\ \Psi = \sin\vartheta\sin\varphi\cdot\Lambda + \sin\vartheta\cos\varphi\cdot\mathsf{M} + \cos\vartheta\cdot\mathsf{N}, \\ \Theta = \cos\varphi\cdot\Lambda - \sin\varphi\cdot\mathsf{M}. \end{cases}$$

Wir werden ferner die Ausdrücke der lebendigen Kraft und der Arbeit nötig haben, welche nach pag. 108 und 109 bez. die folgende Form annehmen:

$$(6)\quad T = \frac{1}{2}(A(p^2+q^2) + Cr^2) = \frac{A}{2}(\sin^2\vartheta\cdot\psi'^2 + \vartheta'^2) + \frac{C}{2}(\varphi' + \cos\vartheta\cdot\psi')^2,$$

$$(6')\quad dA = (\Lambda p + \mathsf{M}q + \mathsf{N}r)\,dt = \Phi\,d\varphi + \Psi\,d\psi + \Theta\,d\vartheta.$$

Aus den Gleichungen (4) bis (6′) schliefsen wir sofort auf das Bestehen der Gleichungen (2); diese Gleichungen sind also eine unmittelbare Folge aus der vorstehenden Definition der Impulskomponenten $[\Phi]$, $[\Psi]$, $[\Theta]$ und der Kraftkomponenten Φ, Ψ, Θ.

Wir nehmen nun die Eulerschen Gleichungen etwa in der Form (3′) von pag. 141 her, nachdem wir in ihnen $B = A$ gesetzt haben. Zunächst sehen wir, dafs die dritte der Eulerschen Gleichungen

$$\frac{dN}{dt} = \mathsf{N}$$

mit der auf die φ-Koordinate bezüglichen Lagrangeschen Gleichung

$$\frac{d[\Phi]}{dt} - \frac{\partial T}{\partial\varphi} = \Phi$$

direkt identisch ist. In der That haben wir nach (4), (5) und (6):

$$N = [\Phi], \quad \mathsf{N} = \Phi, \quad \frac{\partial T}{\partial\varphi} = 0.$$

Um die auf die ψ-Koordinate bezügliche Lagrangesche Gleichung zu erhalten, multiplizieren wir die Eulerschen Gleichungen der Reihe nach mit den Koeffizienten von L, M, N in dem Ausdrucke (4) für $[\Psi]$. Dabei entsteht nach (4) und (5):

$$(7)\quad \begin{cases} \sin\vartheta\sin\varphi\frac{dL}{dt} + \sin\vartheta\cos\varphi\frac{dM}{dt} + \cos\vartheta\frac{dN}{dt} \\ = \frac{d[\Psi]}{dt} - \frac{d\sin\vartheta\sin\varphi}{dt}L - \frac{d\sin\vartheta\cos\varphi}{dt}M - \frac{d\cos\vartheta}{dt}N \\ = (A-C)\sin\vartheta(\sin\varphi\cdot q - \cos\varphi\cdot p)\,r + \Psi. \end{cases}$$

Nun erkennt man aber, wenn man $L = Ap$, $M = Aq$, $N = Cr$ setzt und die Gleichungen (3) in Anwendung bringt, dafs

$$\frac{d\sin\vartheta\sin\varphi}{dt}L + \frac{d\sin\vartheta\cos\varphi}{dt}M + \frac{d\cos\vartheta}{dt}N$$
$$= (C-A)\sin\vartheta(\sin\varphi\cdot q - \cos\varphi\cdot p)\,r$$

Hosted by Google

wird. Mithin ergiebt sich aus (7) einfach

$$\frac{d[\Psi]}{dt} = \Psi.$$

Diese Gleichung ist aber mit der zweiten Lagrangeschen Gleichung des Kreiselproblems identisch, da nach (6) gilt:

$$\frac{\partial T}{\partial \psi} = 0.$$

Um endlich die auf die ϑ-Koordinate bezügliche Gleichung aus unseren Eulerschen Gleichungen abzuleiten, verfahren wir ähnlich. Wir multiplizieren die Eulerschen Gleichungen der Reihe nach mit $\cos\varphi$, $-\sin\varphi$ und 0, d. h. mit den Koeffizienten von L, M und N in der dritten der Gleichungen (4). Dann bekommen wir

$$(8) \quad \begin{cases} \cos\varphi \dfrac{dL}{dt} - \sin\varphi \dfrac{dM}{dt} = \dfrac{d[\Theta]}{dt} - \dfrac{d\cos\varphi}{dt} L + \dfrac{d\sin\varphi}{dt} M \\ \qquad = (A - C)(\cos\varphi \cdot q + \sin\varphi \cdot p)\, r + \Theta. \end{cases}$$

Nun ist aber nach (3)

$$-\frac{d\cos\varphi}{dt} L + \frac{d\sin\varphi}{dt} M = A(\sin\varphi \cdot p + \cos\varphi \cdot q)\,\varphi' = A\sin\vartheta \cdot \psi'\varphi'$$

und andrerseits

$$(A - C)(\cos\varphi \cdot q + \sin\varphi \cdot p)\, r = (A - C)\sin\vartheta \cdot \psi'(\varphi' + \cos\vartheta \cdot \psi').$$

Infolgedessen können wir statt (8) schreiben

$$\frac{d[\Theta]}{dt} - (A\cos\vartheta\sin\vartheta \cdot \psi'^2 - C\sin\vartheta \cdot \psi'(\varphi' + \cos\vartheta \cdot \psi')) = \Theta.$$

Diese Gleichung ist aber mit Rücksicht auf den Ausdruck der lebendigen Kraft wieder nichts anderes als die dritte der Lagrangeschen Gleichungen.

Neben den schon besprochenen Lagrangeschen Gleichungen (oder den Gleichungen „zweiter Art") benutzt man in der analytischen Mechanik bekanntlich auch sog. *Lagrangesche Gleichungen erster Art.* Bei einem System von n Punkten und k Graden der Freiheit bestehen diese aus $3n$ Differentialgleichungen für die Koordinaten der Punkte, in welche noch $3n - k$ verfügbare Parameter, *Lagrangesche Multiplikatoren* genannt, eingehen, welche so zu bestimmen sind, daſs die durch die Differentialgleichungen definierten Koordinatenänderungen mit der dem System eigentümlichen Bewegungsfreiheit verträglich sind.

Nun können wir allerdings nicht daran denken, im Falle des Kreisels die Lagrangeschen Gleichungen erster Art direkt benutzen zu wollen. Wir müſsten sonst — entsprechend den unendlich vielen Massenpunkten, aus denen unser Kreisel besteht, — unendlich viele

Hosted by Google

Gleichungen mit unendlich vielen Lagrangeschen Multiplikatoren untereinander schreiben. Wohl aber können wir für den Kreisel Differentialgleichungen herstellen, welche sozusagen in der Mitte stehen zwischen den Lagrangeschen Gleichungen erster und zweiter Art und welche wir als *Lagrangesche Gleichungen von gemischtem Typus* bezeichnen mögen.

Das Gemeinsame, welches diese gemischten Gleichungen mit den Gleichungen erster Art verbindet, besteht in der Einführung *überzähliger Koordinaten*. Man bestimmt die Lage des Systems durch mehr Koordinaten als die Anzahl der Freiheitsgrade beträgt: Benutzt man als überzählige Koordinaten die $3n$ rechtwinkligen Koordinaten der n Punkte des Systems, so kommt man, wie wir sagten, zu den Lagrangeschen Gleichungen erster Art. Benutzt man dagegen $3n - 1$, $3n - 2, \ldots, k + 1$ Koordinaten, so entstehen jedesmal Gleichungen unseres gemischten Typus. Hat man nur die Mindestzahl von k Koordinaten verwandt, so ergeben sich die Lagrangeschen Gleichungen zweiter Art.

Den überzähligen Lagenkoordinaten entsprechend wird man als überzählige Geschwindigkeitskoordinaten die Differentialquotienten der Lagenkoordinaten nach der Zeit einführen. Es wird ferner aber auch nötig, den Geschwindigkeitskoordinaten entsprechende Kraft- und Impulskoordinaten zu definieren. Dabei wird man, wie früher (vgl. pag. 92) von dem Ausdrucke für die Arbeit des Systems bez. für seine lebendige Kraft auszugehen haben. Diese Ausdrücke sind aber in ihrer Abhängigkeit von den überzähligen Koordinaten nicht völlig bestimmt, sondern können durch Hinzufügung beliebiger Multipla der zwischen jenen bestehenden Relationen formal modifiziert werden. Infolgedessen bleiben die in Rede stehenden Kraft- und Impulskoordinaten in gewisser Weise unbestimmt; sie enthalten willkürliche Parameter, deren Auftreten von unserem Standpunkte aus die Notwendigkeit der Lagrangeschen Multiplikatoren erklärt. Die Gleichungen, welche die Änderungen dieser überzähligen Impulskoordinaten bestimmen, lassen sich im übrigen nach dem Schema der allgemeinen Lagrangeschen Gleichungen hinschreiben.

Zu diesem gemischten Typus werden offenbar die in den $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ bez. in den Quaternionengröſsen A, B, C, D geschriebenen Differentialgleichungen des Kreiselproblems gehören. In der That benutzen wir bei Zugrundelegung der genannten Parameter zur Bestimmung der Lage und des Geschwindigkeitszustandes überzählige Koordinaten. Die so entstehenden Differentialgleichungen werden noch einen Lagrangeschen Multiplikator enthalten, welcher so zu bestimmen ist, daſs die

aus den Differentialgleichungen folgenden Anderungen der $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ bez. der A, B, C, D dauernd mit der Bedingung

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1 \quad \text{bez.} \quad A^2 + B^2 + C^2 + D^2 = 1$$

verträglich sind. Übrigens bekommen diese Differentialgleichungen eine recht übersichtliche und elegante Form. Wir wollen indessen auf ihre Entwickelung an dieser Stelle verzichten, weil wir sonst ausführlicher auf die Definition der überzähligen Impulskoordinaten eingehen müſsten. —

Wir kommen nun auf die am Anfange dieses Paragraphen aufgestellte Aufgabe zurück: die Besonderheiten der Eulerschen Gleichungen gegenüber den Gleichungen von Lagrange zu studieren.

Warum sich die Eulerschen Gleichungen formal von den Lagrangeschen Gleichungen unterscheiden, ist leicht zu sehen. In den Eulerschen Gleichungen bestimmen wir den Geschwindigkeitszustand durch die Komponenten des Drehungsvektors p, q, r nach den Axen X, Y, Z. Es sind dieses, wie pag. 46 hervorgehoben, „inexakte Geschwindigkeitskoordinaten“, d. h. keine Differentialquotienten irgend welcher räumlicher Abmessungen nach der Zeit. Nun bleibt die Lagrangesche Form der mechanischen Differentialgleichungen, wie pag. 155 betont, allerdings bei Einführung beliebiger Lagenkoordinaten bestehen. Als Geschwindigkeitskoordinaten sind dann aber notwendig die Ableitungen der gewählten Lagenkoordinaten nach der Zeit, also jedenfalls exakte Differentialquotienten zu benutzen. Hiernach können wir sagen: *Die Eulerschen Gleichungen sind kein Spezialfall der Lagrangeschen, insofern wir bei jenen den Geschwindigkeitszustand durch inexakte Koordinaten bestimmen, während diese die Benutzung exakter Geschwindigkeitskoordinaten voraussetzen.*

Wir werden aber ferner fragen, worin die besonderen Vorzüge der Eulerschen Gleichungen gegenüber den allgemeinen Differentialgleichungen der Mechanik bestehen. Diese treten hauptsächlich bei der kräftefreien Bewegung des Kreisels hervor, auf welche wir uns zunächst beziehen wollen.

Aus dem vorigen Kapitel wissen wir, und es ist auch von vorneherein selbstverständlich, daſs die Bestimmung des Impulses relativ zum Kreisel in jedem Augenblicke nur von dem instantanen Geschwindigkeitszustand des Kreisels abhängt und von der Lage des Kreisels im Raume gänzlich unabhängig ist. In der That konnten wir die Lage des Impulses im Körper analytisch durch die Differentialquotienten des nur von den Komponenten p, q, r des Geschwindigkeitszustandes abhängigen Ausdrucks der lebendigen Kraft oder auch

Hosted by Google

geometrisch durch eine mit dem Trägheitsellipsoid operierende Konstruktion bestimmen, bei welcher die Stellung des Trägheitsellipsoides im Raume in keiner Weise in Frage kam. Wir bekommen also relativ zum Kreisel (bei gleicher relativer Lage und Gröfse des Drehungsvektors) immer denselben Impulsvektor, welche Stellung wir auch dem Kreisel im Raume geben mögen.

Ferner ist auch die Änderungsgeschwindigkeit des Impulses relativ zum Kreisel bei der kräftefreien Bewegung allein durch die Lage von Impuls- und Drehungsvektor gegen den Kreisel, sowie durch die Gröfse dieser Vektoren bestimmt und hängt von der absoluten Stellung des Kreisels im Raume in keiner Weise ab, wie unmittelbar aus dem Satze von der Konstanz des Impulses hervorgeht.

Die Bestimmung des Impulses und der Impulsänderung oder, was dasselbe bedeutet, des Drehungsvektors und der Änderung des Drehungsvektors gegen den Kreisel bildet also bei der kräftefreien Bewegung ein Problem, für welches die Lage des Kreisels im Raume nicht in Frage kommt. Das Problem bleibt dasselbe, wie wir auch die Anfangslage des Kreisels im Raume wählen mögen.

Man wird von vornherein vermuten dürfen, dafs eine analytische Formulierung unseres Problems möglich ist, welche seine Unabhängigkeit von der absoluten Lage des Kreisels im Raume in Evidenz setzt, in welcher also die Lagenkoordinaten des Kreisels überhaupt nicht vorkommen. *Diese Formulierung wird nun gerade durch die Euler'schen Gleichungen der kräftefreien Bewegung geleistet.* In der That kommen in diesen Gleichungen nur die Gröfsen p, q, r (oder L, M, N) und ihre Differentialquotienten nach der Zeit vor, welche eine von der Lage des Kreisels unabhängige Bedeutung haben.

In den Lagrangeschen Gleichungen dagegen zerlegen wir den Drehungsvektor bei Benutzung der Lagenkoordinaten φ, ψ, ϑ in die Komponenten $\varphi', \psi', \vartheta'$, welche sich zum Teil auf Axen beziehen, die nicht im Kreisel fest sind, so dafs die zugehörigen Werte der $\varphi', \psi', \vartheta'$ bei einer Änderung der absoluten Lage des Kreisels geändert werden. Infolgedessen lassen die Lagrangeschen Gleichungen nicht ohne weiteres die Thatsache hervortreten, dafs die Bestimmung des Drehungsvektors und seiner Lage gegen den Kreisel von der Lage des Kreisels im Raume unabhängig ist.

Die Unabhängigkeit der Eulerschen Gleichungen von den Lagenkoordinaten bringt aber (bei der kräftefreien Bewegung) eine erhebliche *Vereinfachung des Integrationsgeschäftes* mit sich. Wir können nämlich zunächst, wie im vorigen Paragraphen geschehen, die Differentialgleichungen in den p, q, r für sich integrieren und damit alle Fragen

Hosted by Google

erledigen, welche sich auf die Lage von Impuls- und Drehungsvektor relativ gegen den Körper beziehen. Die Bestimmung der absoluten Lage im Raum erfordert dann als zweiten Schritt die Integration der „kinematischen" Gleichungen, wobei wir noch in der Wahl der Lagenkoordinaten volle Freiheit haben.

Eine entsprechende Zerlegung der Integrationsschwierigkeiten ist bei den Lagrangeschen Gleichungen nicht möglich, es sei denn, daſs man gerade diejenigen linearen Funktionen der φ', ψ', ϑ' bei der Integration zu Grunde legt, welche bez. den p, q, r gleich sind. Dies würde aber nichts anderes bedeuten, als den nachträglichen Übergang zu den Eulerschen Gleichungen.

Wenn äuſsere Kräfte die Kreiselbewegung beeinflussen, wird der Vorteil, den die Eulerschen Gleichungen vor den Lagrangeschen bieten, allerdings allgemein zu reden illusorisch. Da nämlich die äuſseren Kräfte von der Lage des Kreisels im Raume abhängen werden, fällt auch die Änderung des Impulsvektors nicht mehr unabhängig von diesem aus. *Infolgedessen bilden jetzt* (sofern nicht besondere Symmetrieverhältnisse betreffs der äuſseren Kräfte vorliegen, worauf wir an dieser Stelle nicht eingehen können) *die Eulerschen Gleichungen mit den kinematischen ein nicht reduzierbares simultanes System von Differentialgleichungen.* Wir werden also, wie es im folgenden Kapitel thatsächlich geschehen wird, bei der Integration ebenso gut von den Lagrangeschen wie von den Eulerschen Gleichungen ausgehen können.

Die vorhergehenden Betrachtungen lassen sich kürzer und präciser fassen, wenn wir uns gestatten, einige Begriffe aus *Lies Theorie der Transformationsgruppen* vorauszusetzen. Wir können dann nämlich sagen: Das Problem, Gröſse und Lage des Drehungsvektors bei der kräftefreien Kreiselbewegung zu bestimmen, gestattet eine dreifach unendliche Gruppe von Transformationen, nämlich die sämtlichen Drehungen des Koordinatensystems x, y, z um den Punkt O*). Dabei spielen die Komponenten p, q, r die Rolle von Invarianten der Gruppe. Die Zerlegung der mechanischen Differentialgleichungen in ein Gleichungssystem (die Eulerschen Gleichungen), welches sich gegenüber den Transformationen der Gruppe invariant verhält, und ein zweites Gleichungssystem (unsere kinematischen Gleichungen), welches durch diese Transformationen geändert wird und gerade die Abhängigkeit des Kreisels vom System x, y, z vorstellt, läſst sich aus der Lieschen Theorie vorhersehen.

---

*) Ausführlicheres hierüber findet man bei Hrn. H. Liebmann: Bemerkungen über integrable Fälle der Kreiselbewegung, Math. Ann. Bd. 50.

Hosted by Google

Mit Hülfe dieser Theorie läſst sich auch die allgemeine Frage beantworten, wann bei anderen mechanischen Systemen, wie dem starren Körper, Gleichungen möglich sind, welche den Eulerschen Gleichungen analog sind und denselben Vorteil der Zerlegung des Integrationsgeschäftes in zwei einfachere Schritte mit sich bringen, wie jene. Solche Gleichungen wird es nur in dem besonderen Falle geben, wo das mechanische System und die dasselbe angreifenden äuſseren Kräfte eine geeignete Gruppe von kontinuierlichen Transformationen gestatten. *Im allgemeinen wird daher von einem Analogon der Eulerschen Gleichungen nicht die Rede sein können.*

Kehren wir unsere Betrachtungsweise gewissermaſsen um und sehen wir das Bestehen oder Nichtbestehen der Eulerschen Gleichungen als gleichbedeutend mit dem Bestehen oder Nichtbestehen eines Satzes über den Impuls an, so werden wir unsere letzte Behauptung durch die folgende Aussage ergänzen können, auf deren Begründung wir im letzten Kapitel näher eingehen werden: *Bei allgemeinen mechanischen Systemen wird von einem direkten Analogon zu den Impulssätzen des starren Körpers nicht die Rede sein können.*

§ 4. **Führung des Kreisels auf vorgeschriebener Bahn. Das D'Alembertsche Prinzip.**

Nachdem wir im zweiten Paragraphen dieses Kapitels die „natürliche“ Bewegung des kräftefreien Kreisels erledigt haben, würden wir nun nach der Bewegung zu fragen haben, die der Kreisel auf Grund gegebener Kräfte, insbesondere auf Grund der Schwerkraft ausführt. Statt dessen werden wir uns zunächst eine einfachere Aufgabe stellen und die Verhältnisse bei einer beliebigen „erzwungenen“ Bewegung ins Auge fassen.

Wir wollen uns vorstellen, daſs wir den Kreisel etwa mit unserer Hand in vorgeschriebener Weise bewegen, indem wir eine Gerade des Kreisels einen Kegel mit der Spitze in O beschreiben und im übrigen den Kreisel um diese Gerade in beliebig vorgegebener Weise rotieren lassen. Dabei werden wir zunächst annehmen, daſs äuſsere Kräfte, auſser den von unserer Hand ausgeübten, nicht vorhanden sind. Wir werden also insbesondere wieder den Schwerpunkt mit dem Unterstützungspunkte zusammenfallen lassen.

Zur Erzeugung unserer erzwungenen Bewegung wird in jedem Momente eine gewisse Kraft erforderlich sein. Wir haben die Empfindung, als ob der Kreisel gegen die Führung einen Widerstand leistet und spüren dementsprechend einen Druck auf unsere Hand. Wir können diesen Widerstand allgemein den *Trägheitswiderstand* nennen.

Hosted by Google

Es soll sich im folgenden darum handeln, den Trägheitswiderstand nach Richtung und Gröfse anzugeben.

Um an Bekanntes anzuknüpfen, wollen wir von der entsprechenden Frage beim einzelnen Massenpunkte ausgehen. Wir denken uns also einen sonst keinen äufseren Kräften unterworfenen Punkt von der Masse m auf einer beliebigen Kurve mit beliebiger Geschwindigkeit entlang geführt und fragen nach dem Widerstande, den der Punkt dieser Bewegung entgegensetzt.

Vor allem konstruieren wir uns für jede Stelle der Bahn den Impuls des Punktes, den wir mit i bezeichnen. Wenn die Bewegung nicht gerade die „natürliche Bewegung" ist, d. h. aus einer gleichmäfsigen geradlinigen Fortschreitung besteht, so wird sich der Impuls von Ort zu Ort ändern. Nun setzt aber, nach Newtons lex secunda, jede Änderung di des Impulses eine Kraft P voraus, von solcher Beschaffenheit, dafs $P\,dt = di$ ist. Diese Kraft P haben wir mit der Hand auszuüben; die entgegengesetzt gleiche Kraft bedeutet den Widerstand W, den wir zu überwinden haben und welchen wir den *Trägheitswiderstand* nennen. Mithin wird

$$W = -\frac{di}{dt}. \tag{1}$$

Geometrisch können wir hiernach den fraglichen Widerstand folgendermafsen bestimmen. Wir konstruieren für zwei benachbarte Zeitpunkte t_0 und t_1 den Impuls der erzwungenen Bewegung, bringen durch Parallelverschiebung die Anfangspunkte der beiden Vektoren zum Zusammenfallen und vervollständigen sie zu einem Dreieck. Dann liefert uns die dritte Seite des Dreiecks, durch $t_0 - t_1$ dividiert, den gesuchten Widerstand.

Wollen wir die Komponenten W_x, W_y, W_z unseres Widerstandes nach drei rechtwinkligen Koordinatenaxen berechnen, so ergeben sich dieselben natürlich sofort, indem wir die Gleichung (1) in Komponenten zerlegen. Wir können diese Komponenten von W aber auch direkt aus unseren früheren Bewegungsgleichungen des einzelnen Massenpunktes ablesen. Bei der Aufstellung dieser Gleichungen (s. pag. 77) dachten wir uns die äufsere Kraft (X, Y, Z) gegeben und fragten nach der „natürlichen" Bewegung, welche sich unter ihrem Einflusse einstellt. Wir können uns aber auch die Bewegung, d. h. die successiven Änderungen des Impulses irgendwie gegeben denken und nach der zugehörigen Kraft fragen, welche wir ausüben müssen, um die betr. Bewegung zu erzwingen. Der Widerstand, um welchen es sich handelt, ist dieser Kraft entgegengesetzt gleich. Wir schliefsen daher aus den angezogenen Gleichungen (9) von pag. 77

Hosted by Google

(2) $$W_x = -X = -\frac{d[X]}{dt}, \qquad W_y = -Y = -\frac{d[Y]}{dt},$$
$$W_z = -Z = -\frac{d[Z]}{dt}.$$

Dies stimmt ersichtlich mit Gleichung (1) überein.

Wenn auf unseren Massenpunkt eine äufsere Kraft P einwirkt, so wird die zur Erzeugung der erzwungenen Bewegung erforderliche Kraft offenbar um deren Betrag verringert. Dementsprechend wird der Widerstand, welchen wir dann zu überwinden haben und den wir mit W' bezeichnen, statt durch (1) durch die folgende Gleichung gegeben:

(3) $$W' = -\frac{di}{dt} + P.$$

Seine Komponenten ergeben sich aus den Bewegungsgleichungen des einzelnen Massenpunktes, wenn wir die gesamte zur Erzeugung der Bewegung erforderliche Kraft mit $(X + X', Y + Y', Z + Z')$ bezeichnen, wobei (X, Y, Z) die von aufsen wirkende Kraft P, (X', Y', Z') die bei der Führung des Punktes aufzuwendende Kraft bedeutet, wie folgt:

(4) $$\begin{cases} W_x' = -X' = -\frac{d[X]}{dt} + X, \\ W_y' = -Y' = -\frac{d[Y]}{dt} + Y, \\ W_z' = -Z' = -\frac{d[Z]}{dt} + Z. \end{cases}$$

Die vorstehenden, nach den Grundgesetzen der allgemeinen Mechanik durchaus selbstverständlichen Bemerkungen übertragen wir nun auf den Fall des *allgemeinen kräftefreien Kreisels.*

Wir konstruieren uns vor allem für jedes Bewegungsstadium den Impuls und bekommen so einen von O auslaufenden im allgemeinen variabeln Vektor i. Jede Änderung di des Impulses erfordert aber, wie wir aus der pag. 115 gegebenen Übertragung des zweiten Newtonschen Bewegungsgesetzes wissen, eine Drehkraft D von solcher Beschaffenheit, dafs $D\,dt = di$ ist. Die Drehkraft D haben wir mit der Hand bei der Führung des Kreisels auszuüben; mit der entgegengesetzt gleichen Kraft widerstrebt der Kreisel der Bewegung. *Der gesuchte Widerstand ist also nach Richtung, Gröfse und Sinn gegeben durch die Vektorgleichung:*

(1') $$W = -\frac{di}{dt}.$$

Geometrisch finden wir den Widerstand abermals dadurch, dafs wir uns den Impuls im Raume für zwei benachbarte Zeitpunkte t_0 und t_1

konstruieren und die Endpunkte der beiden Vektoren verbinden. Dann liefert uns das Verhältnis der Verbindungslinie zu dem Zeitintervalle $t_0 - t_1$ Gröfse, Richtung und Sinn von W in dem Zeitpunkte $t_0 = t_1$.

Um die Komponenten W_X, W_Y, W_Z unseres Widerstandes nach den im Kreisel festen Koordinatenaxen XYZ zu berechnen, ziehen wir die Eulerschen Gleichungen heran.

In der That können wir diese Gleichungen, wie oben die Bewegungsgleichungen des einzelnen Massenpunktes und ebenso wie die mechanischen Differentialgleichungen überhaupt, in doppelter Weise auffassen. Wir können uns entweder die äufseren Kräfte gegeben denken und nach derjenigen Bewegung fragen, welche das System von einem gegebenen Anfangszustande aus auf Grund dieser Kräfte ausführt. Wir können uns aber auch andrerseits die Bewegung des Systems willkürlich gegeben denken und nach denjenigen Kräften fragen, welche zur Erzeugung dieser Bewegung erforderlich sind. Während die erstere Aufgabe die *Integration* der mechanischen Differentialgleichungen nötig macht, ist die letztere durch die in den Gleichungen angedeuteten *Differentiationen* zu erledigen. In diesem Paragraphen betrachten wir die Eulerschen Gleichungen von dem zuletzt charakterisierten Standpunkte.

Der gesuchte Trägheitswiderstand ist offenbar nach dem Gesetz der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung der zur Erzeugung der Bewegung erforderlichen Kraft entgegengesetzt gleich. Entnehmen wir also die Komponenten $\mathsf{\Lambda}$, M, N dieser Kraft aus den Eulerschen Gleichungen von pag. 140, so erhalten wir für die Komponenten des Widerstandes, bezogen auf das im Körper feste Koordinatensystem, die folgenden Werte:

$$(2')\qquad \begin{cases} W_X = -\mathsf{\Lambda} = -\dfrac{dL}{dt} + Mr - Nq, \\ W_Y = -\mathsf{M} = -\dfrac{dM}{dt} + Np - Lr, \\ W_Z = -\mathsf{N} = -\dfrac{dN}{dt} + Lq - Mp. \end{cases}$$

Dafs diese Bestimmung von W mit dem in (1') enthaltenen Werte zusammenfällt, ist nach unserer Ableitung der Eulerschen Gleichungen evident.

Wir wollen nun ferner annehmen, dafs auf unseren Kreisel von aufsen her ein irgendwie gegebenes Kraftsystem wirkt, welches, in gewohnter Weise zusammengesetzt, eine Drehkraft D ergiebt. Ihre Komponenten nach den Koordinatenaxen seien $\mathsf{\Lambda}$, M, N.

Alsdann wird ein Teil der Impulsänderung durch diese Drehkraft D kompensiert. Der übrig bleibende, nicht kompensierte Teil ergiebt

Hosted by Google

negativ genommen nach Richtung, Gröſse und Sinn den Widerstand, den wir bei der erzwungenen Bewegung des Kreisels zu überwinden haben. Dieser Widerstand W' unterscheidet sich also jetzt von dem Trägheitswiderstande W des Kreisels um den Betrag der Drehkraft D und ist dementsprechend durch die folgende Vektorgleichung zu berechnen:

$$W' - W = D \quad \text{oder} \quad W' = -\frac{di}{dt} + D. \tag{3'}$$

Seine Komponenten nach den Koordinatenaxen folgen abermals aus den Eulerschen Gleichungen. Bezeichnen wir die Komponenten der gesamten Kraft, welche zur Erzeugung der fraglichen Bewegung erforderlich ist, bez. mit $\Lambda + \Lambda'$, $\mathsf{M} + \mathsf{M}'$, $\mathsf{N} + \mathsf{N}'$, so erhalten wir:

$$\left\{\begin{aligned} W'_X &= -\Lambda' = -\frac{dL}{dt} + Mr - Nq + \Lambda, \\ W'_Y &= -\mathsf{M}' = -\frac{dM}{dt} + Np - Lr + \mathsf{M}, \\ W'_Z &= -\mathsf{N}' = -\frac{dN}{dt} + Lq - Mp + \mathsf{N}. \end{aligned}\right. \tag{4'}$$

Von hier aus gelangen wir zu einem sehr einfachen und sehr bekannten *Kriterium, durch welches wir die unter dem Einfluſs gegebene Kräfte stattfindende natürliche Bewegung des Kreisels gegenüber beliebige erzwungenen Bewegungen charakterisieren können.* Wir wollen auch hierbei zuerst vom einzelnen Massenpunkte sprechen. Die natürliche Bewegung, welche der Punkt unter dem Einfluſs der Kraft P ohne äuſseren Zwang ausführt, ist offenbar diejenige Bewegung, bei welcher der oben eingeführte Widerstand W' verschwindet. *Die Bedingung für die natürliche Bewegung lautet also nach* (3)

$$-\frac{di}{dt} + P = 0. \tag{5}$$

Diese Gleichung ist im Grunde vollständig trivial; sie ist nichts anderes als der fundamentale Impulssatz, welcher der Mechanik von Newton als zweites Axiom zu Grunde gelegt ist.

Wir können nun aber diesem Satze eine neue Formulierung geben, indem wir die Frage nach der natürlichen Bewegung des Punktes auf eine Gleichgewichtsfrage zurückführen. Diese Formulierung liegt nahe, sobald man, wie oben geschehen, die negativ genommene Änderungsgeschwindigkeit des Impulses als eine besondere Kraft eingeführt und mit einem besonderen Namen („Trägheitswiderstand“) belegt hat. Wir können nämlich die Gleichung (5) folgendermaſsen in Worte fassen:

Hosted by Google

Bei der natürlichen Bewegung eines Punktes hält sich der Trägheitswiderstand des Punktes mit der äufseren Kraft dauernd das Gleichgewicht.

In dem vorliegenden einfachsten Falle ist natürlich mit dieser Formulierung nichts gewonnen. Wir erwähnen dieselbe nur deshalb, weil die entsprechende Aussage als sog. *D'Alembertsches Prinzip* die natürliche Bewegung beliebiger mechanischer Systeme regelt, worauf wir sofort zurückkommen.

Charakterisieren wir vorab die natürliche Bewegung des allgemeinen Kreisels in entsprechender Weise. Es ist dieses offenbar wieder diejenige Bewegung, gegen welche der Kreisel keinen Widerstand leistet, bei welcher also W' in Gleichung (3′) verschwindet. *Unser Kriterium für die unter dem Einflufs der äufseren Drehkraft D stattfindende natürliche Bewegung des Kreisels lautet also, ganz ähnlich wie beim Punkte:*

$$-\frac{di}{dt} + D = 0. \tag{5'}$$

Im Grunde fallen wir damit wieder auf unsern fundamentalen Impulssatz von pag. 115 zurück bez. auf die mit jenem äquivalenten Eulerschen Gleichungen.

Um nun die hier in Betracht kommende Formulierung dieser Gleichung zu finden, gehen wir auf die einzelnen Massenpunkte zurück, welche den Kreisel konstituieren und denken uns dementsprechend den Gesamtimpuls i sowie die resultierende Drehkraft D in die zu den Massenpunkten gehörigen Einzelimpulse und Einzelkräfte aufgelöst. Alsdann können wir die Gleichung (5′) als eine Gleichgewichtsbedingung im Sinne der elementaren Statik aussprechen und können folgenden Satz formulieren, welcher sich mit dem D'Alembertschen Prinzipe im Falle des Kreisels deckt:

Bei der natürlichen Bewegung steht das System der Trägheitswiderstände aller einzelnen Massenteilchen mit dem System der in den Punkten angreifenden äufseren Kräfte vermöge der starren Verbindung der Massenpunkte beständig im Gleichgewichte.

Diese Aussage überträgt sich nun, wie gesagt, auf beliebige mechanische Systeme mit beliebigen, nicht notwendig starren Verbindungen. Die sämtlichen Fragen der Bewegung erscheinen somit auf reine Gleichgewichtsfragen zurückgeführt. In dieser statischen Auffassung der dynamischen Gesetze liegt die eigentliche Leistung D'Alemberts und das Charakteristicum seines Prinzipes.

Wir können schliefslich sozusagen ein *Mittelding zwischen der natürlichen und der erzwungenen Bewegung des Kreisels* betrachten. Wir wollen etwa, um einen bestimmten Fall vor Augen zu haben, eine



Hauptaxe H des Kreisels in bestimmter Weise einen Kegel mit der Spitze in O beschreiben lassen bez. im besonderen festgehalten denken, während wir die Drehung um diese Axe durch äufseren Zwang nicht beeinflussen. Der letztere Teil der Bewegung ist dann als natürliche, der erstere als erzwungene Bewegung zu bezeichnen. Alsdann wird die Komponente des Widerstandes W' in Richtung von H verschwinden müssen, weil diese durch die Führung von H nicht kompensiert werden kann. Dagegen wird die zu H senkrechte Komponente von W' einen von Null verschiedenen Wert haben, welcher uns eben den bei der Führung aufzuwendenden Druck anzeigt. Dementsprechend ist nur die zu H senkrechte Komponente von W' nach Gleichung (3') zu berechnen.

Die Ausdrucksweise des D'Alembertschen Prinzipes läfst sich auch für diesen Typus von Bewegungen vollkommen aufrecht halten. Gerade in dieser Vielseitigkeit, kann man sagen, beruht der wesentliche Nutzen des Prinzipes.

Achten wir nur auf denjenigen Teil der Bewegung, welchen wir soeben als natürliche Bewegung bezeichneten, so haben wir sozusagen einen *Kreisel von nur einem Grade natürlicher Bewegungsfreiheit.* An diesem halten sich dann die Trägheitswiderstände der einzelnen Massenpunkte mit den äufseren Kräften nach der für uns in Betracht kommenden Komponente von Gleichung (5') ersichtlich das Gleichgewicht, d. h. jene Widerstände und Kräfte zusammengenommen bringen keine Rotation um die Axe H hervor. Ziehen wir aber auch die erzwungene Bewegung von H in Betracht, so haben wir einen *Kreisel von einem Grade natürlicher und zwei Graden erzwungener Bewegungsfreiheit.* Das Gleichgewicht zwischen den Trägheitswiderständen und den äufseren Kräften wird bei diesem hergestellt, wenn wir zu den äufseren Kräften noch die Kraft hinzurechnen, welche wir bei der Führung des Kreisels auszuüben haben. Die so entstehende Betrachtungsweise ist der vorhergenannten deshalb vorzuziehen, weil sie nicht nur den Ablauf der natürlichen Bewegung sondern auch den für die erzwungene Bewegung erforderlichen Druck zu bestimmen gestattet.

In der gewöhnlichen Sprache der analytischen Mechanik würde man die hier vorgenommene Beschränkung der natürlichen Bewegungsfreiheit so formulieren, dass man den Kreisel *gewissen Bedingungsgleichungen* unterwirft, welche im obigen Beispiel (bei beliebiger Führung der Axe H) noch die Zeit enthalten würden. Der Nutzen des D'Alembertschen Prinzipes besteht, analytisch gesprochen, gerade darin, dafs man mittels dieses Prinzipes von derartigen Bedingungsgleichungen so viele eliminieren kann, als man gerade will, um dann die übrigen durch geeignete Kräfte zu ersetzen.

Hosted by Google

Wir werden im letzten Paragraphen dieses Kapitels für die hier nur angedeuteten Anwendungen des D'Alembertschen Prinzipes auf Bewegungen von teilweise erzwungenem Charakter einige Beispiele bringen.

§ 5. Spezielle Ausführungen für den Kugelkreisel. Zerlegung des Gesamtwiderstandes in einen Accelerations- und einen Deviationswiderstand.

In der Punktmechanik kann man die Betrachtung des Trägheitswiderstandes, welche der einzelne Massenpunkt einer erzwungenen Bewegung entgegensetzt, noch etwas weiter führen, als es im vorigen Paragraphen geschehen ist.

Wir wollen, wie üblich, den Trägheitswiderstand, indem wir ihn auf die Tangente an die Bahnkurve projizieren, in zwei Komponenten zerlegen, eine in Richtung der Tangente fallende Komponente, welche *Tangentialkraft* genannt werden soll, und eine dazu senkrechte Komponente, welche *Centrifugalkraft* heiſst und welche bereits im ersten Paragraphen dieses Kapitels vorkam. Die Gröſse der Tangentialkraft wollen wir mit H, die der Centrifugalkraft mit K bezeichnen.

Die Centrifugalkraft können wir auch als *denjenigen Bestandteil des Widerstandes definieren, zu dessen Überwindung keine Arbeitsleistung erforderlich ist.* Da nämlich nach Definition die Centrifugalkraft auf der augenblicklichen Bewegungsrichtung senkrecht steht, so wird, wenn wir mit K_x, K_y, K_z ihre Komponenten nach irgend welchen Koordinatenaxen bezeichnen

$$x' K_x + y' K_y + z' K_z = 0;$$

andrerseits erfordert die Überwindung der Centrifugalkraft in der Zeit dt die Arbeit

$$dA = (x' K_x + y' K_y + z' K_z)\, dt.$$

Diese Arbeit verschwindet also, wie behauptet wurde.

Um die Berechnung von H und K möglichst einfach zu gestalten, verfährt man bekanntlich so, daſs man die vorgegebene Bewegung durch eine andere ersetzt, welche jene in dem betrachteten Zeitpunkte von der zweiten Ordnung approximiert, d. h. welche für diesen Zeitpunkt und einen unmittelbar folgenden dieselbe Gröſse und Richtung des Impulses und daher auch dieselbe Tangential- und Centrifugalkraft aufweist, wie die ursprüngliche Bewegung. Man konstruiert nämlich zu der vorgegebenen Bahnkurve den Krümmungskreis an der betrachteten Stelle und läſst den Massenpunkt m auf diesem mit gleichförmiger Beschleunigung entlang laufen, wobei seine Geschwindigkeit

Hosted by Google

und Beschleunigung so zu bemessen sind, dafs sie an der in Rede stehenden Stelle mit der Geschwindigkeit und der Beschleunigung der ursprünglichen Bewegung übereinstimmen.

Alsdann findet man leicht aus der Gleichung (1) des vorigen Paragraphen für die *Gröfse der Tangentialkraft:*

$$H = m\frac{dv}{dt} = \frac{d|i|}{dt} \text{*)}. \tag{1}$$

Die Richtung der Kraft ist nach der ursprünglichen Definition derselben mit der Richtung der instantanen Geschwindigkeit identisch. *Der Sinn* ist dem Sinne der instantanen Beschleunigung entgegengesetzt.

Desgleichen ergiebt sich für die *Gröfse der Centrifugalkraft* die schon früher benutzte Formel

$$K = \frac{mv^2}{R}, \tag{2}$$

in welcher R den Radius des Krümmungskreises bedeutet. Die *Richtung der Centrifugalkraft* ist dadurch bestimmt, dafs sie 1) auf der instantanen Bewegungsrichtung senkrecht steht und 2) in der Schmiegungsebene der Bahnkurve und also der Ebene des Krümmungskreises liegt. Den *Sinn der Centrifugalkraft* können wir etwa durch folgende Regel festlegen: sie sucht den Massenpunkt von dem Centrum des Krümmungskreises zu entfernen.

Nach (1) verschwindet die Tangentialkraft nur dann, wenn die Beschleunigung verschwindet. Andrerseits verschwindet nach (2) die Centrifugalkraft dann, wenn die Krümmung der Bahn gleich Null wird, wenn also die Geschwindigkeit eine unveränderliche Richtung besitzt. Infolgedessen werden wir behaupten können: *Das Auftreten der Tangentialkraft hat seinen Grund in einer Längenänderung, das der Centrifugalkraft in einer Richtungsänderung des Geschwindigkeitsvektors.*

Wollten wir nun im Falle des allgemeinen Kreisels eine ähnliche Zerlegung des Trägheitswiderstandes in zwei zu einander senkrechte Komponenten vornehmen, so würde sich alsbald zeigen, dafs diese Zerlegung ihr Mifsliches hat. Wir müssen vielmehr bis zu dem Spezialfalle des *Kugelkreisels* hinabsteigen, um die Begriffe der Tangential- und Centrifugalkraft glatt übertragen zu können. Es bestätigt sich dabei, was schon pag. 134 bemerkt wurde, dafs der Kugelkreisel (vermöge der Koincidenz von Impuls- und Geschwindigkeitsaxe) in kinetischer Hinsicht eine volle Analogie mit dem einzelnen Massen-

*) Über die Bedeutung des Zeichens $|i|$ als Ausdruck für die Länge des Vektors i vgl. eine Bemerkung auf pag. 143.


Hosted by Google

punkte darbietet. Übrigens hat diese Beschränkung der Allgemeinheit für die weiterhin in Aussicht genommenen Entwickelungen nicht viel zu sagen, da wir in den nächstfolgenden Kapiteln ohnehin unser Hauptinteresse dem Kugelkreisel zuwenden werden.

Der Trägheitswiderstand W des Kugelkreisels wird natürlich, ebenso wie der des allgemeinen Kreisels, durch die Gleichung (1′) des vorigen Paragraphen gegeben. Wir projizieren nun W senkrecht auf die Axe der instantanen Rotation und erhalten dadurch eine Drehkraft, welche den instantanen Drehungsvektor zur Axe hat und welche wir den *Accelerationswiderstand* nennen wollen, und eine zweite, deren Axe zum Drehungsvektor senkrecht steht und welche der *Deviationswiderstand* heifsen soll. Der Grund für diese Benennungen wird sofort klar werden. Die Gröfse des Accelerationswiderstandes bezeichnen wir mit H, die des Deviationswiderstandes mit K.

Wir erwähnen zunächst eine wichtige Eigenschaft des Deviationswiderstandes, welche dieser mit der Centrifugalkraft gemein hat: *Zur Überwindung des Deviationswiderstandes ist keine Arbeitsleistung erforderlich.* In der That besagt die Definition des Deviationswiderstandes, dafs die Axe desselben fortgesetzt auf der instantanen Rotationsaxe p, q, r senkrecht steht. Bezeichnen wir also mit K_X, K_Y, K_Z die Komponenten unseres Widerstandes nach denselben Koordinatenaxen, auf welche sich die p, q, r beziehen, so haben wir

$$pK_X + qK_Y + rK_Z = 0.$$

Infolgedessen wird die zur Überwindung des Deviationswiderstandes erforderliche Arbeit während der Zeit dt:

$$dA = (pK_X + qK_Y + rK_Z)\,dt = 0.$$

Bei der Berechnung von Accelerations- und Deviationswiderstand werden wir nun ähnlich verfahren, wie oben beim einzelnen Massenpunkte. Wir konstruieren uns nämlich zu der vorgegebenen eine einfachere Bewegung hinzu, welche jene an der in Rede stehenden Stelle von der zweiten Ordnung approximiert. Nach pag. 54 leistet dieses bereits eine richtig gewählte *„gleichförmig beschleunigte Präcession“*. Wir wurden auf diese Bewegung geführt, indem wir an die vorgegebenen Polhodie- und Herpolhodiekegel die Krümmungskegel legten, welche jene in der instantanen Rotationsaxe oskulieren, sowie die auf den Krümmungskegeln spiralig verlaufenden Kurven der Polhodie und Herpolhodie unserer Präcessionsbewegung markierten, welche bez. die Polhodie- und Horpolhodiekurve der ursprünglichen Bewegung im Endpunkte des instantanen Drehungsvektors berühren. Diese neue Bewegung besitzt in zwei benachbarten Zeitmomenten nach Richtung

Hosted by Google

und Gröſse denselben Rotations- und also auch denselben Impulsvektor, wie die vorgegebene Bewegung. Infolgedessen werden auch die Accelerations- und Deviationswiderstände bei beiden Bewegungen bez. gleich sein.

Wir haben nun zur Berechnung von H und K die Verschiebung di zu betrachten, welche der Endpunkt des Impulsvektors im Raume während der Zeit dt bei unserer gleichförmig beschleunigten Präcession erfährt. Bezeichnen wir mit ds die zugehörige Verschiebung des Drehungsvektors im Raume, d. h. das Bogenelement der Herpolhodiekurve, und mit C das für alle Axen gleiche Trägheitsmoment des Kugelkreisels, so wird offenbar

$$di = C\,ds.$$

Sodann zerlegen wir ds in zwei Komponenten parallel und senkrecht zur Richtung der instantanen Rotationsaxe, welche bez. ds' und $d\sigma$ heiſsen mögen. Alsdann haben wir nach der Definition des Accelerations- und des Deviationswiderstandes:

$$H = C\frac{ds'}{dt}, \qquad K = C\frac{d\sigma}{dt}.$$

Nun ist ds' nichts anderes, als die Änderung der Drehgeschwindigkeit Ω während der Zeit dt. Mithin erhalten wir für die *Gröſse des Accelerationswiderstandes* die Formel:

$$(1') \qquad H = C\frac{d\Omega}{dt}$$

oder auch

$$(1'') \qquad H = \frac{d|i|}{dt}.$$

Die *Axe* des Accelerationswiderstandes fällt mit der Axe der instantanen Drehgeschwindigkeit zusammen; dem *Sinne* nach ist er dem Sinne der instantanen Drehbeschleunigung entgegengesetzt. *Der Accelerationswiderstand tritt hiernach immer dann auf, wenn wir die Drehung des Kugelkreisels beschleunigen.* Eine Richtungsänderung des Drehvektors bei unveränderter Länge desselben hat auf den Accelerationswiderstand keinen Einfluſs. Diese Bemerkung dient zur Erklärung der von uns gewählten Bezeichnung.

Wichtiger ist für uns der andere Bestandtheil von W, der *Deviationswiderstand.*

Um die Gröſse K desselben zu berechnen, bemerken wir, daſs wir $d\sigma$ auffassen können als ein Bogenelement auf der Herpolhodiekurve derjenigen *gleichförmigen* Präcession, welche mit unserer *gleichförmig beschleunigten* Präcession die Richtung und Gröſse der Drehungsaxe in dem betrachteten Momente gemein hat. Bezeichnen wir die

Hosted by Google

Konstanten dieser Präcession mit μ, ν, ϑ, so wird nach den Gleichungen (3) und (5) von pag. 50

$$d\sigma = \sqrt{(d\pi)^2 + (d\varkappa)^2 + (d\varrho)^2} = \mu \sin \vartheta \, d\psi = \mu\nu \sin \vartheta \, dt.$$

Mithin haben wir für die *Gröſse des Deviationswiderstandes* beim Kugelkreisel die einfache Formel:

$$K = |C\mu\nu \sin \vartheta|. \tag{2'}$$

Was sodann die *Axe des Deviationswiderstandes* betrifft, so folgt aus der Definition desselben zunächst, daſs diese Axe auf der instantanen Drehungsaxe senkrecht steht; andrerseits ergiebt sich aus der vorhergehenden Betrachtung, daſs dieselbe in die durch den instantanen Drehungsvektor gelegte Tangentialebene an den Herpolhodiekegel der gleichförmig beschleunigten Präcession oder, was dasselbe ist, an den Herpolhodiekegel der ursprünglichen Bewegung fällt. Eine ganz analoge Eigenschaft haben wir oben bei der Centrifugalkraft konstatiert, deren Richtung, wie erwähnt, in der Schmiegungsebene an die Bahnkurve, d. h. in der durch zwei benachbarte Geschwindigkeitsrichtungen hindurchgehenden Ebene liegt. Der Schmiegungsebene entspricht aber im vorliegenden Falle die genannte Tangentialebene, insofern sie durch zwei benachbarte Drehungsaxen hindurchgeht.

Auf die eigentümlichen experimentellen Folgerungen, welche sich aus der Axenrichtung unseres Widerstandes ergeben, werden wir im letzten Paragraphen dieses Kapitels noch näher eingehen.

Wir wollen schlieſslich den *Sinn des Deviationswiderstandes* durch eine leicht zu handhabende geometrische Regel festlegen. Ursprünglich ist der Sinn natürlich der Gleichung (1′) entsprechend dadurch bestimmt, daſs er dem Sinne der zur Drehungsaxe senkrechten Komponente von di entgegengesetzt ist. Statt dessen können wir aber auch folgendermaſsen sagen: *Der Deviationswiderstand wirkt stets in solchem Sinne, daſs er den Polhodiekegel an den Herpolhodiekegel anpreſst.*

In der That: Fassen wir ein Bogenelement der Herpolhodiekurve bei unserer erzwungenen Bewegung ins Auge. Unsern Standpunkt im Raume wollen wir so wählen, daſs die Richtung, in welcher unser Bogenelement von dem Endpunkte des Drehungsvektors durchlaufen wird, auf uns hin gerichtet ist. Da der Drehungsvektor verabredetermaſsen stets nach derjenigen Seite der Drehungsaxe abgetragen wird, von der aus die Drehung im Sinne des Uhrzeigers stattzufinden scheint, so liegt der Polhodiekegel bei der Wahl unseres Standpunktes notwendig rechts von dem Herpolhodiekegel. Nun ist beim Kugelkreisel die Änderung des Impulsvektors der Änderung des Drehungsvektors proportional. Unser Widerstand, welcher dem Sinne nach der Impuls-

Hosted by Google

änderung entgegengesetzt ist, wirkt daher von unserem Standpunkte gesehen entgegen dem Sinne des Uhrzeigers. Er sucht also den rechterhand gelegenen Polhodiekegel nach links überzudrehen und preſst mithin diesen, wie behauptet wurde, an den Herpolhodiekegel an.

Da es bei der Berechnung des Deviationswiderstandes lediglich auf die zur Drehungsaxe senkrechte Komponente der Impulsänderung ankommt, so hat eine gleichzeitige Beschleunigung der Rotationsgeschwindigkeit auf die Gröſse unseres Widerstandes überhaupt keinen Einfluſs. Vielmehr tritt derselbe nur bei solchen Bewegungen auf, welche mit einer Richtungsänderung der Drehungsaxe verbunden sind. *Den Ursprung des Deviationswiderstandes haben wir also, ähnlich wie den der Centrifugalkraft, in der Umlagerung des Geschwindigkeitsvektors zu suchen.* Dieser Thatsache wollten wir durch die Wahl der Benennung Ausdruck geben.

Die Erörterungen dieses Paragraphen lassen sich auf den *allgemeinen Kreisel*, wie erwähnt, nicht gut übertragen. Allerdings können wir selbstverständlich den Trägheitswiderstand W auch bei diesem in einen Bestandteil zerlegen, welcher die Richtung der instantanen Drehung zur Axe hat, und einen zweiten, welcher darauf senkrecht steht und welcher daher keine Arbeitsleistung absorbiert. Indessen würden schon die Namen Accelerations- und Deviationswiderstand für diese beiden Bestandteile nicht gerechtfertigt sein. Da nämlich die Richtung von Impuls- und Drehungsaxe jetzt im allgemeinen auseinander fallen, so würde unser erster Bestandteil nicht ausschlieſslich von den Längenänderungen, der letztere nicht ausschlieſslich von den Richtungsänderungen des Drehungsvektors herrühren. Auch läſst sich die Gröſse dieser beiden Bestandteile nicht durch so einfache Formeln bestimmen, wie oben beim Kugelkreisel. Wir ziehen es daher vor, bei dem allgemeinen Kreisel, wie im vorigen Paragraphen geschehen, schlechtweg von dem *Widerstande* zu sprechen und von einer weiteren Zerlegung desselben abzusehen.

§ 6. Der Deviationswiderstand bei der regulären Präcessionsbewegung des symmetrischen Kreisels.

Die Erörterungen des vierten Paragraphen enthalten im besonderen Alles, was über die erzwungenen Bewegungen des symmetrischen Kreisels zu sagen ist. Wenn wir auf letztere hier ausführlicher eingehen, so geschieht dieses nur deshalb, weil sich speziell bei der regulären Präcession des symmetrischen Kreisels besonders einfache Resultate ergeben, welche uns eine erste Orientierung über die Bewegung des symmetrischen schweren Kreisels verschaffen.

Hosted by Google

Wir nehmen zunächst an, daſs keine äuſseren Kräfte wirksam sind, und erteilen unserm Kreisel mit der Hand eine beliebige reguläre Präcession um die Vertikale. Der Impulsvektor wird dabei auf einem Kreise um die Vertikale herumgeführt; sein Endpunkt schreitet in jedem Momente senkrecht zur augenblicklichen Drehungsaxe fort; seine Länge wird nicht geändert. Der Widerstand, welcher aus dieser Impulsänderung resultiert, rührt also lediglich von den Umlagerungen des Impulses her und soll dementsprechend wieder speziell als Deviationswiderstand bezeichnet werden.

Die *Axe dieses Deviationswiderstandes* steht nach dem, was soeben über die Richtung der Impulsänderungen bemerkt wurde, sowohl auf der Drehungsaxe wie auf der Vertikalen senkrecht; sie fällt also, wie wir kurz sagen können, in die *Richtung der Knotenlinie.*

Gröſse und Sinn des Widerstandes, welche wir durch die Gröſse und das Vorzeichen des Buchstabens K bezeichnen, ergiebt sich darauf aus den Werten von W_X, W_Y, W_Z in den Gleichungen (2′) von pag. 165. Es wird nämlich, da die Knotenlinie (vgl. etwa die Figur 3 von pag. 18) mit der X-Axe den Winkel φ, mit der Y-Axe den Winkel $\frac{\pi}{2} + \varphi$ einschlieſst:

$$K = W_X \cos\varphi - W_Y \sin\varphi.$$

Hier haben wir in den Ausdrücken von W_X und W_Y, da es sich um eine reguläre Präcession handelt, für p, q, r die Werte aus den Gleichungen (4) von pag. 50 einzutragen und für L, M, N die zugehörigen Werte Ap, Aq, Cr. Alsdann erhalten wir nach einer kleinen Rechnung:

$$K = -C\mu\nu \sin\vartheta - (C - A)\nu^2 \sin\vartheta \cos\vartheta. \tag{1}$$

Man bemerke, daſs die Bedeutung des Buchstabens K gegen den vorigen Paragraphen etwas abgeändert ist, insofern wir K jetzt ein bestimmtes Vorzeichen beilegen. Ein positiver Wert von K besagt, daſs unser Deviationswiderstand von dem Halbstrahle der Knotenlinie aus gesehen im Sinne des Uhrzeigers, ein negativer, daſs er im entgegengesetzten Sinne wirkt. Den so bestimmten Widerstand werden wir bei der Führung des kräftefreien Kreisels als Druck auf unsere Hand spüren.

In dem speziellen Falle $C = A$ reduziert sich unsere Gleichung (1) natürlich auf die pag. 173 für den Kugelkreisel abgeleitete Gleichung (2′), indem dann der zweite Term der rechten Seite in (1) verschwindet. Dieser zweite Term rührt daher von der Abweichung des Trägheitsellipsoides von der Kugelgestalt her und soll etwa als *„ellipsoidischer Bestandteil des Deviationswiderstandes“* bezeichnet werden. Der erste

Hosted by Google

Term, welcher den Wert des Widerstandes beim Kugelkreisel bezeichnet, soll dementsprechend der *„sphärische Bestandteil“* heifsen.

Es giebt noch zwei andere Fälle, in denen sich der Deviationswiderstand auf seinen sphärischen Bestandteil reduziert. Dies findet erstens offenbar statt, wenn $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ ist, die Figurenaxe also auf der Axe der regulären Präcession senkrecht steht. Ferner aber gilt etwas Ähnliches, wenn die Teildrehung μ im Verhältnis zu allen sonst in unserer Formel vorkommenden Gröfsen aufserordentlich überwiegt. Letzteres ist in den Anwendungen sogar die Regel, weil man durch die gewöhnlich benutzten Antriebsvorrichtungen einen Impulsvektor von sehr grofsem Betrage erzeugt, welcher nahezu in die Richtung der Figurenaxe fällt.

Wir kommen hier noch einmal auf die *natürliche Präcession* zurück, welche der kräftefreie symmetrische Kreisel ohne äufseren Zwang ausführt. Die Bedingung für diese Bewegung lautet offenbar (man vgl. die Ausführungen auf pag. 167) $K = 0$ oder

$$0 = (C\mu + (C - A)\nu \cos\vartheta)\nu \sin\vartheta.$$

Durch die vorstehende Gleichung wird unter allen möglichen Präcessionsbewegungen eine ganz bestimmte Klasse als natürliche kräftefreie Präcession ausgeschieden. Auf dieselbe Bedingung wurden wir schon im zweiten Paragraphen (s. Gl. (11) von pag. 153) geführt.

Wir betrachten nun einen *schweren symmetrischen Kreisel* und erteilen diesem eine reguläre Präcession um die Vertikale von beliebigen Konstanten. Aus der Statik wissen wir (vgl. pag. 87), dafs die an den einzelnen Massenteilchen angreifenden Schwerewirkungen eine resultierende Drehkraft ergeben, deren Axe bei dem symmetrischen Kreisel die Knotenlinie ist und deren Gröfse und Sinn durch $P \sin\vartheta$ bestimmt ist. Dabei bedeutet $P > 0$, dafs der Schwerpunkt oberhalb, $P < 0$, dafs er unterhalb des Unterstützungspunktes liegt.

Der Widerstand, welchen wir bei einer erzwungenen regulären Präcession unseres schweren Kreisels zu überwinden haben, — wir können ihn abermals speziell als Deviationswiderstand bezeichnen, — fällt der Richtung nach wieder in die Knotenlinie, weil sowohl das Drehmoment der Schwere wie nach Obigem die Impulsänderung bei der regulären Präcession um die Vertikale die Knotenlinie zur Axe haben. Gröfse und Sinn unseres Widerstandes ergeben sich jetzt aus der Gleichung (3′) des vierten Paragraphen. Tragen wir hier für D den soeben angegebenen Wert $P \sin\vartheta$ und für die Änderungsgeschwindigkeit des Impulses die oben berechnete Gröfse $-K$ ein, so folgt:

(2) $$W' = K + P \sin\vartheta.$$



Der Widerstand, den wir bei der Führung des schweren Kreisels spüren werden, ist also ein anderer wie der bei gleicher Führung des kräftefreien Kreisels.

Wir werden auch hier den Übergang zu der natürlichen Bewegung des schweren Kreisels machen, also nach solchen Präcessionsbewegungen fragen, welche der schwere Kreisel ohne äufseren Zwang auszuführen imstande ist. Die Bedingung für diese Bewegungen lautet (in Übereinstimmung mit dem D'Alembertschen Prinzipe) $W' = 0$. Mit Rücksicht auf (1) und (2) können wir hierfür schreiben, wenn wir annehmen, dafs ϑ von Null verschieden ist, dafs also die Präcession nicht speziell in eine blofse Rotation um die Vertikale ausgeartet ist:

$$P = C\mu\nu + (C - A)\nu^2 \cos\vartheta. \tag{3}$$

Der schwere symmetrische Kreisel vermag hiernach (bei gegebener Massenverteilung, d. h. bei gegebenen Werten von A, C und P) ohne äufseren Zwang wieder nur eine bestimmte Klasse von regulären Präcessionsbewegungen auszuführen, nämlich nur solche, deren Konstanten μ, ν, ϑ durch die Relation (3) verknüpft sind.

Im ganzen hängt diese natürliche Präcession des schweren Kreisels von vier willkürlichen Parametern ab. Es sind dieses etwa die Anfangswerte der Winkel φ, ψ, ϑ und die Winkelgeschwindigkeiten μ und ν, welche letzteren aber wegen (3) nur einen willkürlichen Parameter repräsentieren. Wir drücken diese Thatsache so aus, dafs wir sagen: *Es giebt beim einzelnen symmetrischen schweren Kreisel ∞^4 mögliche Präcessionsbewegungen.*

Dagegen hängt die allgemeine natürliche Bewegung des schweren Kreisels von sechs willkürlichen Parametern ab. Da nämlich der Kreisel ein System von drei Graden der Freiheit ist, so können wir aufser den Anfangswerten der φ, ψ, ϑ noch ihre Anfangsgeschwindigkeiten willkürlich vorschreiben, worauf der weitere Verlauf der Bewegung durch die mechanischen Differentialgleichungen bestimmt sein wird. *Es giebt also ∞^6 mögliche natürliche Bewegungen des schweren Kreisels.*

Wir schliefsen hieraus, dafs die reguläre Präcession nur eine *spezielle Bewegungsform des schweren Kreisels*, eine *partikuläre Lösung seiner Differentialgleichungen* ist.

Machen wir dieselbe Abzählung beim symmetrischen schwerelosen Kreisel, so haben wir aufser den Anfangswerten der Winkel φ, ψ, ϑ und den durch die Relation $K = 0$ verbundenen Winkelgeschwindigkeiten μ und ν zu berücksichtigen, dafs die Axe der Präcession jede beliebige Lage durch O haben kann, (während dieselbe bei dem schweren Kreisel

wegen der Richtung der Schwerewirkung notwendig mit der Vertikalen zusammenfallen mufs). Dieser Umstand erhöht die Zahl der willkürlichen Konstanten bei der regulären Präcession des kräftefreien Kreisels auf 6. *Es giebt also bei diesem* ∞^6 *natürliche Präcessionsbewegungen.* Wir verstehen aus diesem Grunde ganz wohl, warum die reguläre Präcession die allgemeinste Bewegungsform des schwerelosen symmetrischen Kreisels sein kann.

Die reguläre Präcession wird als einfachste, wenngleich partikuläre Bewegung des schweren Kreisels für uns später wichtig werden. Wir wollen daher auf die möglichen Werte der Präcessionskonstanten noch näher eingehen, indem wir diese aus den Konstanten der Präcession beim kräftefreien Kreisel durch kontinuierlichen Übergang entstehen lassen.

Dabei werden wir μ und ϑ festgehalten denken und werden fragen, wie der Wert von ν durch Hinzutreten der Schwerewirkung abgeändert wird. Den Wert von μ werden wir überdies als positiv voraussetzen.

Nehmen wir zunächst $P = 0$, so liefert die in ν quadratische Gleichung (3) zwei Werte dieser Konstanten, nämlich

$$\text{a)}\quad \nu = 0, \qquad \text{b)}\quad \nu = \frac{C\mu}{(A - C)\cos\vartheta}.$$

Der Wert a) entspricht einer einfachen Rotation des Kreisels um die Figurenaxe, der Wert b) gehört zu einer wirklichen Präcessionsbewegung. Setzen wir darauf P von Null verschieden voraus. Dann finden wir als Wurzeln von (3) die beiden folgenden Werte:

$$(4) \qquad \nu = \frac{C\mu \mp \sqrt{C^2\mu^2 - 4P(A - C)\cos\vartheta}}{2(A - C)\cos\vartheta}.$$

Es giebt also (bei gegebener Massenverteilung und gegebenen Werten von μ *und* ϑ*) entweder zwei Fälle von regulärer Präcession oder keinen, je nachdem nämlich die Quadratwurzel im vorstehenden Ausdruck reell oder imaginär ist.* Die beiden reellen Fälle wollen wir nach der Gröfse von ν als *„langsame"* und *„schnelle Präcession"* unterscheiden. Bei genügend kleinen Werten von P ist die langsame Präcession diejenige, welche sich durch stetigen Übergang aus der einfachen Rotation des schwerelosen Kreisels um die Figurenaxe entwickelt, deren Präcessionskonstante also der oben mit a) bezeichneten Wurzel entspricht.

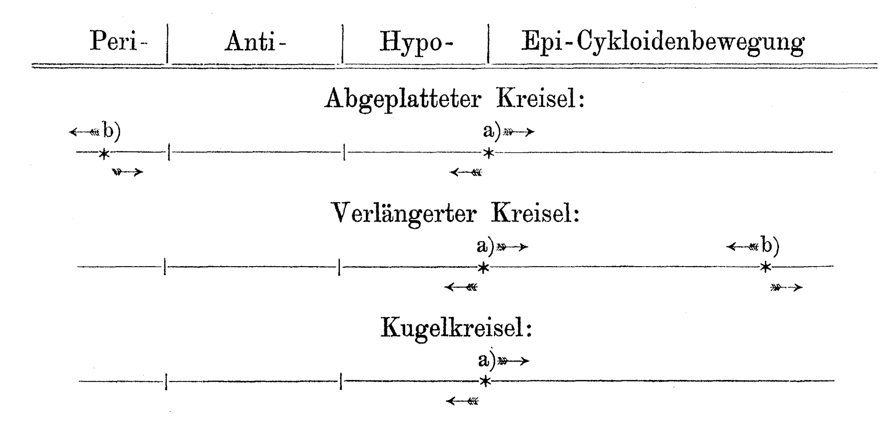
Eine besondere Betrachtung macht der Fall des Kugelkreisels ($A = C$) nötig. Die Gleichung (3) wird in diesem Falle in ν linear und liefert den Wert

$$(5) \qquad \nu = \frac{P}{C\mu}.$$


Hosted by Google

Der Vergleich mit dem abgeplatteten oder verlängerten Kreisel berechtigt uns aber auch in diesem Falle noch von einer zweiten Wurzel zu sprechen, welche allerdings unendlich grofs geworden ist ($\nu = \pm\infty$). Die zu der zuerst genannten Wurzel gehörige Präcessionsbewegung werden wir als langsame Präcession bezeichnen können, da sie für $P = 0$ in die einfache Rotation a) übergeht; die Wurzel $\nu = \pm\infty$ stellt jedenfalls eine schnelle Präcession dar.

Das folgende Schema, dessen Richtigkeit man leicht aus den Gleichungen (4) und (5) verifiziert, veranschaulicht die Lage der Wurzeln a) und b) für $P = 0$ sowie (durch den Sinn der beigefügten Pfeile) die Richtung, in welcher a) und b) beim Hinzutreten der Schwerewirkung im Falle des abgeplatteten, des verlängerten und des Kugelkreisels wandern. Dabei beziehen sich die Pfeile oberhalb bez. unterhalb der Geraden auf die Fälle $P > 0$ bez. $P < 0$.



Im Anschlufse hieran bemerken wir, dafs die Werte von $\frac{\nu}{\mu}$, welche beim kräftefreien Kreisel auf das Gebiet der Epi- und Pericykloidenbewegung beschränkt waren (vgl. pag. 153) im Falle des schweren Kreisels auch in die Gebiete der Anti- und Hypocykloidenbewegung eindringen können, dafs also durch den schweren Kreisel alle kinematisch möglichen Präcessionsbewegungen auch kinetisch realisiert werden können.

Es könnte zunächst vielleicht überraschen, dafs die in vertikaler Richtung wirkende Schwerkraft überhaupt eine reguläre Präcession des Kreisels um die Vertikale unterhalten kann, d. h. eine Bewegung, bei welcher die einzelnen Massenteilchen durchschnittlich in horizontaler Richtung fortschreiten. Indessen ist dieser Sachverhalt keineswegs merkwürdiger, wie die aus der Punktmechanik bekannte Thatsache, dafs ein Massenpunkt, welcher sich unter dem Einflufs einer

Hosted by Google

Centralkraft bewegt, bei geeignetem Anfangsimpulse auf einem Kreise um das Anziehungscentrum herumlaufen, also beständig genau senkrecht zur Richtung der äufseren Kraft fortschreiten kann. Ebenso wie die Möglichkeit dieser Bewegung durch die Bedingung gegeben ist, dafs die Centrifugalkraft mit der Anziehungskraft dauernd im Gleichgewichte stehen mufs, so lautete die Bedingung, durch welche wir die reguläre Präcession als eine mögliche Bewegung des schweren Kreisels erkannten, dahin, dafs der Trägheitswiderstand bei der regulären Präcession dem von der Schwerkraft herrührenden um eine horizontale Axe wirkenden Drehmomente dauernd das Gleichgewicht halten sollte. Dabei ist zu bemerken, dafs weder die Kreisbewegung des Punktes noch die reguläre Präcession des Kreisels die allgemeinste Bewegung von Punkt oder Kreisel darstellen, sondern dafs beide Bewegungen nur bei geeigneter Wahl des Anfangszustandes auftreten.

Zum Schlusse mögen wir die reguläre Präcession des schweren Kreisels unter dem Gesichtspunkte der im vorigen Kapitel besprochenen sog. Stabilität der Drehungsaxe betrachten. Nach obigem kann sich aus der einfachen Rotation ($\nu = 0$) beim Hinzutreten der Schwerewirkung eine reguläre Präcession $\left(\nu \gtrless 0\right)$ entwickeln, bei welcher die Rotationsaxe allmählich auf einem Kreiskegel um die Vertikale herumgeführt wird. Wir sehen also in Übereinstimmung mit einer Bemerkung auf pag. 136, dafs eine kontinuierlich wirkende äufsere Kraft im Laufe der Zeit eine völlige Umlagerung der Drehungsaxe bedingen kann, wie grofs auch die ursprüngliche Rotationsgeschwindigkeit μ bez. wie klein auch die äufsere Einwirkung P sein möge. *Von einem Festbleiben der Drehungsaxe im Raume wird daher beim Hinzutreten einer kontinuierlichen äufseren Störung gewifs nicht die Rede sein können.*

§ 7. **Eine neue Ableitung des Deviationswiderstandes bei der regulären Präcession des symmetrischen Kreisels. Die Coriolissche Kraft.**

Da der Begriff des Deviationswiderstandes bei der regulären Präcession des symmetrischen Kreisels im folgenden eine nicht unerhebliche Rolle spielen wird, so wollen wir uns seine Entstehung noch auf eine andere Weise klar machen, indem wir uns den Kreisel in seine einzelnen Massenpunkte aufgelöst denken und nach den Kräften fragen, mit welchen diese der erzwungenen Bewegung widerstreben. Wir werden uns dabei der Einfachheit halber auf den speziellen Fall $\vartheta = 90^0$ der regulären Präcession beschränken, in welchem sich nach pag. 176 der Deviationswiderstand auf seinen sphärischen Bestandteil reduziert.

Hosted by Google

Wir betrachten zunächst einen einzelnen Massenpunkt P und zwingen diesen, eine aus zwei kreisförmigen Bewegungen zusammengesetzte Bahn zu durchlaufen. Der Punkt soll in einer vertikalen Ebene E mit konstanter Geschwindigkeit auf einem Kreise vom Radius R und Mittelpunkte O fortschreiten; gleichzeitig soll die Ebene E mit gleichförmiger Geschwindigkeit um eine durch O gehende vertikale Axe A gedreht werden.

Wir wollen den Widerstand berechnen, mit welchem der Punkt dieser zusammengesetzten Bewegung widerstrebt. Jedenfalls werden wir als Bestandteile dieses Widerstandes die beiden Centrifugalkräfte vorfinden müssen, welche den Teilbewegungen von P, nämlich dem in der Ebene E vor sich gehenden Umlauf um O und dem im Raum stattfindenden Umlauf um A, entsprechen. Es zeigt sich aber, dafs aufserdem noch eine aus dem Zusammenbestehen beider Teilbewegungen hervorgehende Kraft existiert, die man nach ihrem Entdecker *Coriolissche Kraft* oder auch *zusammengesetzte Centrifugalkraft (force centrifuge composée)* nennt.

Die Lage des Punktes P in der Ebene E bestimmen wir durch den Winkel φ, welchen seine Verbindungslinie mit O gegen die Anfangslage dieser Linie bildet. Wir wollen annehmen, dafs zu Anfang die Verbindungslinie OP senkrecht auf der Axe A steht. Bezeichnen wir noch mit μ die konstante Winkelgeschwindigkeit, mit welcher P in der Ebene E umläuft, so haben wir

$$\varphi = \mu t.$$

Andrerseits bestimmen wir die Lage der Ebene E im Raume durch den Winkel ψ, um welchen E aus der Anfangslage E_0 herausgedreht ist. Bedeutet ferner ν die konstante Winkelgeschwindigkeit, mit welcher sich E um A dreht, so haben wir

$$\psi = \nu t.$$

Auf kürzestem Wege dürften wir zur Berechnung der Coriolisschen Kraft durch die nachstehende kleine Koordinatenrechnung gelangen. Eine direkte geometrische Ableitung werden wir am Schlusse des Paragraphen geben, (vgl. pag. 186 und 187).

Die Drehungsaxe A nehmen wir zur z-Axe eines räumlichen Koordinatensystems, dessen Mittelpunkt in O liegen und dessen xz-Ebene mit E_0 zusammenfallen möge. In diesem System werden die Koordinaten von P ersichtlich:

$$(1)\qquad \begin{cases} x = R\cos\varphi\cos\psi, \\ y = R\cos\varphi\sin\psi, \\ z = R\sin\varphi. \end{cases}$$



Der Impuls i des Punktes bei unserer zusammengesetzten Bewegung hat alsdann, wenn wir noch die Masse des Punktes mit m bezeichnen, die folgenden Komponenten:

$$[X] = mx' = -m\mu R \sin\varphi \cos\psi - m\nu R \cos\varphi \sin\psi,$$
$$[Y] = my' = -m\mu R \sin\varphi \sin\psi + m\nu R \cos\varphi \cos\psi,$$
$$[Z] = mz' = \quad m\mu R \cos\varphi.$$

Der Widerstand W, welchen der Punkt der erzwungenen Bewegung entgegensetzt, bestimmt sich wie früher durch die Vektorgleichung:

$$W = -\frac{di}{dt};$$

seine Komponenten werden also die folgenden:

$$(2)\quad \begin{cases} W_x = -\dfrac{d[X]}{dt} = m\mu^2 R \cos\varphi \cos\psi - 2m\mu\nu R \sin\varphi \sin\psi \\ \qquad\qquad\qquad + m\nu^2 R \cos\varphi \cos\psi, \\ W_y = -\dfrac{d[Y]}{dt} = m\mu^2 R \cos\varphi \sin\psi + 2m\mu\nu R \sin\varphi \cos\psi \\ \qquad\qquad\qquad + m\nu^2 R \cos\varphi \sin\psi, \\ W_z = -\dfrac{d[Z]}{dt} = m\mu^2 R \sin\varphi. \end{cases}$$

In diesen Ausdrücken entsprechen offenbar die Terme mit dem Faktor μ^2 der Centrifugalkraft, welche aus dem Umlauf von P in der Ebene E entspringen würde, sofern wir uns die letztere im Raume still stehend denken. In der That sind diese Terme die Komponenten einer Kraft, deren Gröſse

$$(3)\qquad m\mu^2 R$$

beträgt und deren Richtung gegen die Koordinatenaxen durch die Richtungscosinus

$$(3')\qquad a = \cos\varphi \cos\psi, \quad b = \cos\varphi \sin\psi, \quad c = \sin\varphi$$

bestimmt wird. Es sind dieses nach den Gleichungen (1) gerade die Richtungscosinusse der Verbindungslinie OP.

Andrerseits entsprechen die Terme mit dem Faktor ν^2 der Centrifugalkraft, welche sich aus dem Umlauf von P um die Axe A ergeben würde, sofern wir den Punkt P in der Ebene E als ruhend ansehen. In der That geben diese Terme eine Kraft von der Gröſse

$$(4)\qquad m\nu^2 R_1,$$

wo $R_1 = R\cos\varphi$ den Abstand des Punktes P von der Axe A bedeutet. Ihre Richtungscosinus gegen die Koordinatenaxen sind

$$(4')\qquad a' = \cos\psi, \quad b' = \sin\psi, \quad c' = 0,$$

Hosted by Google

d. h. die einer durch P hindurchgehenden, zur Axe A senkrechten Geraden.

Es bleiben noch die mittleren Terme mit dem Faktor $\mu\nu$ übrig, welche ihren Ursprung dem Umstande verdanken, daſs weder die Ebene E im Raume, noch der Punkt P in der Ebene E fest ist. Setzen wir die bez. Komponenten zusammen, so entsteht eine Kraft von der Gröſse

$$(5) \qquad - 2 m \mu \nu R \sin \varphi,$$

welche die Richtungscosinus

$$(5') \qquad a'' = \sin \psi, \quad b'' = - \cos \psi, \quad c'' = 0$$

gegen die Koordinatenaxen bildet. Sie steht sowohl auf der Richtung (3′) wie auf der Richtung (4′) senkrecht und liegt in der Normalen von E. Diese Kraft ist es, die man als *Coriolissche Kraft* bezeichnet.

Schreiben wir der Ebene E Starrheit und eine gewisse Dicke zu und denken wir uns den Kreis, welchen P beschreiben soll, als eine Rinne in E eingegraben, so wird die Kraft (3) durch die Starrheit von E, die Kraft (4) zum Teil durch diese, zum Teil durch die Führung aufgehoben, mittelst welcher P in der Rinne gleichförmig entlang geschoben wird. Die Kraft (5) dagegen drückt senkrecht gegen die Ebene E und wird fühlbar, wenn wir die Rotation dieser Ebene um die Axe A mit der Hand besorgen. Diese Kraft wirkt, je nach dem Quadranten, in welchem sich P gerade befindet, beschleunigend oder hemmend auf die Rotation von E.

Bemerken wir noch, daſs wir durch die Einführung der Coriolisschen Kraft im Grunde nichts Neues lernen. Ebenso wenig, wie das Auftreten der Centrifugalkraft etwas besagt, was wir nicht aus der Theorie des Impulses ohnehin wissen, ebenso wenig erfahren wir aus der Betrachtung der Coriolisschen Kraft etwas, was nicht in der allgemeinen Theorie der Centrifugalkräfte enthalten wäre. Die Notwendigkeit des Coriolisschen Termes folgt einfach daraus, daſs die Centrifugalkraft, welche der thatsächlichen Bewegung des Punktes im Raum entspricht, nicht einfach gleich der Resultante aus den beiden Centrifugalkräften ist, die sich ergeben, wenn wir einerseits P in der ruhenden Ebene E und andrerseits E bei fester Lage von P rotieren lassen.

Die selbständige Einführung der Coriolisschen Kraft erklärt sich überhaupt nur von einem besonderen Standpunkte aus, welchen man der oben beschriebenen zusammengesetzten Bewegung gegenüber einnehmen kann und welchen wir als den *Standpunkt der Relativbewegung* bezeichnen wollen. Man möchte, um bei dem obigen Beispiel zu bleiben, die Bewegung des Punktes P in der Ebene E so behandeln,

Hosted by Google

dass man bei der Betrachtung aus der Ebene E nicht heraustritt. Wenn diese Ebene in Ruhe wäre, würde man die erste der obigen Centrifugalkräfte zu berücksichtigen haben. Wegen der Rotation der Ebene E aber muſs vor allem noch ein Korrektionsglied in Gestalt des Coriolisschen Termes hinzugefügt werden, welches seinen Ursprung dem Zusammenbestehen der beiden Bewegungen verdankt. Den dritten Term, welcher von der Ordnnng ν^2 ist, wird man im Verhältnis zu den ersteren unter Umständen vernachlässigen können, nämlich immer dann, wenn die Bewegung von E im Raume verhältnismäſsig langsam vor sich geht, wenn also ν im Verhältnis zu μ genügend klein ist.

Übrigens geht der Coriolissche Ansatz*) viel weiter als unsere Darstellung desselben. Während wir einen einzelnen Massenpunkt betrachteten, welcher eine vorgeschriebene Kreisbewegung in einer gleichförmig rotierenden Ebene ausführt, bezieht sich der Coriolissche Ansatz auf ein beliebiges System von Massenpunkten, welches eine beliebige Bewegung gegen ein seinerseits willkürlich bewegtes Axensystem beschreibt. —

Zur Klasse der Relativbewegungen gehört offenbar *jede Bewegung auf unserer Erdoberfläche*. Eine solche wird man immer so behandeln, als ob die Erdoberfläche in Ruhe wäre, und wird den Einfluſs der Erddrehung nachträglich durch Hinzunahme der Coriolisschen Kraft und der Centrifugalkraft der Erdrotation in Rechnung setzen. Wenn insbesondere der bewegte Körper gezwungen wird, sich gleichförmig fortschreitend auf einem Meridiane zu bewegen, so haben wir genau die oben vorausgesetzten Verhältnisse.

Wir kommen nun zu den Anwendungen der vorhergehenden Betrachtung auf die Kreiseltheorie. Dabei sei es uns gestattet, eine *geographische Einkleidung* zu wählen und an der zuletzt erwähnten Vorstellung einer auf der Erdoberfläche vor sich gehenden Bewegung festzuhalten.

Wir wollen uns denken, daſs die Erde längs eines Meridianes von einer Röhre mit überall gleichem, rechteckigem Querschnitt umzogen ist, in welcher wir Wasser mit gleichförmiger Geschwindigkeit zirkulieren lassen, während sich gleichzeitig die Erde mit gleichförmiger Geschwindigkeit um ihre Axe dreht. Den Erdmittelpunkt, welchen wir im Raume fest denken, bezeichnen wir mit O. Die Geschwindigkeit der Erdrotation sei ν; die Winkelgeschwindigkeit, mit welcher das Wasser von O aus gesehen in unserer Röhre fortströmt, heiſse μ. Die

*) Man vgl. seine Abhandlung im 24. Hefte des Journal de l'Ecole Polytechnique vom Jahre 1835: *Sur les équations du mouvement rélatif des systèmes de corps.*


Hosted by Google

Erde dreht sich vom Nordpol aus gesehen entgegen dem Sinne des Uhrzeigers, wie in der nebenstehenden Figur durch einen Pfeil angedeutet ist. Das Wasser möge auf der in der Figur vorderen Erdhälfte von Süden nach Norden strömen. Die Bezeichnungen „rechtes" und „linkes Ufer" sollen bei unserer Röhre, wie es in der Geographie üblich ist, vom Standpunkte eines in der Strömungsrichtung blickenden Beobachters gewählt werden. Die Ebene unseres Meridianes werde kurz mit E bezeichnet.

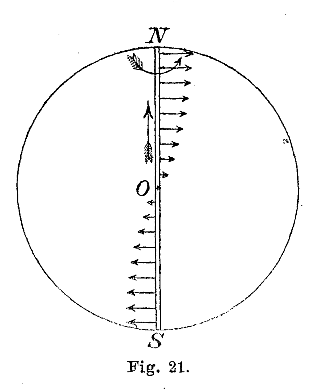


Fig. 21.

Übrigens wollen wir, um nicht auf hydrodynamische Fragen eingehen zu müssen und um das Vorangehende direkt verwenden zu können, unsere Röhre unendlich dünn voraussetzen und unseren Wasserstrom so behandeln, als ob er aus einer Reihe einzelner aufeinander folgender diskreter Massenteilchen bestände.

Da kein Grund vorliegt, weshalb ein Wasserteilchen in unserer Röhre das andere überholen sollte, so werden die Abstände der einzelnen Teilchen bei der Bewegung dauernd erhalten bleiben. Das Wasser, können wir sagen, schiebt sich in seiner Rinne genau so wie ein starrer Körper fort. Infolgedessen werden auch die Kräfte, welche auf die einzelnen Wasserteilchen wirken, dieselben sein, wie bei einem starren Körper von entsprechender Massenverteilung, welcher sich um den festen Punkt O dreht, d. h. wie bei einem Kreisel. Und zwar würde die Masse unseres Kreisels, welche in diesem Sinne dem Wasser unserer Röhre entspricht, auf einem Kreise konzentriert zu denken sein, der zum Radius den Erdradius R und zum Mittelpunkte den Erdmittelpunkt O hat. Da wir uns überdies die Masse gleichförmig über den genannten Kreis verteilt zu denken haben, so werden wir unsern Kreisel speziell als symmetrischen Kreisel bezeichnen müssen; seine Figurenaxe ist die auf der Meridianebene E senkrechte Gerade. Die Kreiselbewegung, welche der aus der Eigenzirkulation und der Erddrehung zusammengesetzten Bewegung des Wassers entspricht, stellt dabei einfach eine reguläre Präcession vor, bei welcher die Figurenaxe in senkrechter Neigung gegen die Erdaxe mit der Winkelgeschwindigkeit ν um diese umgedreht wird, während gleichzeitig der Kreisel um die Figurenaxe mit der Winkelgeschwindigkeit μ rotiert.

Wir gehen wieder zu dem geographischen Bilde zurück und fragen nach der *Kraft, mit welcher das Wasser auf die seitlichen Röhrenwände drückt.*

Hosted by Google

Die gesamte Kraft, welche das einzelne Wasserteilchen P der hier vorausgesetzten Bewegung entgegensetzt, d. h. der oben berechnete Widerstand W, besteht aus drei Teilen. Wir haben erstens eine Centrifugalkraft, welche von der Zirkulation des Wassers allein herrührt und in der Richtung OP wirkt, zweitens eine Centrifugalkraft, welche durch die Erddrehung allein hervorgerufen wird und von der Erdaxe senkrecht fortgerichtet ist. Diese Kräfte ergeben offenbar keinen Seitendruck auf die Röhrenwände, wenigstens sofern wir uns, wie oben verabredet, den Wasserstrom als eine einfache Reihe diskreter Massenteilchen vorstellen. Sie äufsern sich lediglich in einer scheinbaren Gewichtsabnahme des Wassers, oder, was dasselbe bedeutet, in einem Druck gegen die obere Wand der Röhre. (Bei der herangezogenen Kreiselbewegung würden sie direkt durch die Starrheit des Materiales aufgehoben werden).

Aufserdem haben wir aber noch die Coriolissche Kraft zu berücksichtigen. Diese beträgt nach (5)

$$-2\mu\nu R \sin\varphi \, dm, \tag{6}$$

wo φ die geographische Breite, dm die Masse von P bedeutet. Sie ist nach obigem senkrecht zu der Meridianebene E, also senkrecht gegen die Seitenwände der Röhre gerichtet und ändert ihren Sinn, wenn $\sin\varphi$ das Vorzeichen ändert. *Auf der nördlichen Halbkugel* drückt sie durchweg *gegen das rechte, auf der südlichen gegen das linke Ufer.* Gröfse und Sinn dieser Kraft an den verschiedenen Stellen unserer Röhre sind in der vorstehenden Figur durch Pfeile angedeutet.

Den Ursprung der Kraft (6) können wir uns in unserem geographischen Bilde durch folgende Überlegung noch weiter veranschaulichen, welche wir in 2 Schritte gliedern.

1) Ein Wasserteilchen, welches längs unseres an der Erdrotation partizipierenden Meridianes fortschreitet, besitzt an jeder Stelle eine Geschwindigkeitskomponente, welche in Richtung des Meridianes, und eine zweite, welche in Richtung des Parallelkreises fällt. Diese beiden Komponenten sind offenbar bez. gleich dem Produkte aus der Winkelgeschwindigkeit μ in den Radius des Meridianes und gleich dem Produkte aus der Winkelgeschwindigkeit ν in den Radius des Parallelkreises. Die entsprechenden Komponenten des Impulses werden daher bez. gegeben durch

$$R\mu \, dm \quad \text{und} \quad R\nu \cos\varphi \, dm.$$

Während das Teilchen, von dem Äquator ausgehend, nach dem Nordpole wandert, wird die in Richtung des Parallelkreises fallende Impulskomponente successive abgeändert, indem der Abstand unseres Teilchens



von der Erdaxe successive vermindert wird. Die Anderungsgeschwindigkeit dieser Impulskomponente beträgt offenbar:

$$\frac{d}{dt} R\nu \cos\varphi \, dm = \mu \frac{d}{d\varphi} R\nu \cos\varphi \, dm = - \mu\nu R \sin\varphi \, dm.$$

Das Teilchen besitzt, wie wir sagen können, infolge der Erdrotation einen Überschufs an seitlicher Geschwindigkeit, welchen es beim Fortschreiten längs der Röhre abgeben mufs. Der zugehörige Überschufs des Impulses bedeutet so viel wie einen unendlich kleinen Stofs, welchen das Teilchen gegen die Röhrenwände ausübt, die entsprechende Anderungsgeschwindigkeit des Impulses also eine kontinuierliche, senkrecht gegen die Seitenwände wirkende Kraft.

2) Die so gefundene Kraft stellt, wie wir sehen, nur erst die Hälfte der oben angegebenen Coriolisschen Kraft dar. Es ist in der That noch ein anderer Umstand zu berücksichtigen, welcher eine gleich grofse Änderung des Impulses zur Folge hat. Es wird nämlich in jedem Momente (aufser in den Punkten des Aquators) die *Richtung* unserer meridionalen Röhre infolge der Erdrotation abgeändert. Bezeichnen wir die in der Zeit dt statthabende Richtungsänderung mit $d\chi$, so ergiebt sich während dieser Zeit eine wiederum in Richtung des Parallelkreises fallende Geschwindigkeitsänderung, welche der Gröfse nach gleich ist dem Produkte aus $d\chi$ in die meridionale Geschwindigkeitskomponente $R\mu$. Dabei findet man durch eine elementargeometrische Betrachtung für $d\chi$ leicht den folgenden Wert

$$d\chi = - \nu \sin\varphi \, dt.$$

Die zugehörige Anderungsgeschwindigkeit des Impulses, welche sich als Seitendruck äufsert, wird dementsprechend

$$R\mu \frac{d\chi}{dt} dm = - \mu\nu R \sin\varphi \, dm.$$

Die unter 1) und 2) genannten Umstände liefern in der That zusammen die in (6) angegebene Kraft. Die vorstehende Betrachtung können wir geradezu als die oben in Aussicht gestellte geometrische Neuableitung der Coriolisschen Kraft ansehen.

Wir setzen nun die so gefundenen auf die einzelnen Wasserteilchen bezüglichen Kräfte zu einer resultierenden Drehkraft zusammen, welche die Erde als Ganzes angreift. Von den gewöhnlichen Centrifugalkräften können wir dabei hinsichtlich des Gesamteffektes absehen, weil zu jeder von ihnen eine entgegengesetzt gleiche Centrifugalkraft gefunden werden kann, welche jene bezüglich der Gesamtwirkung auf die Erde gerade kompensiert. Es kommt also nur auf die in (6) angegebenen „zusammengesetzten Centrifugalkräfte“ an.



Zunächst entspricht der Einzelkraft (6) hinsichtlich des fest gedachten Erdmittelpunktes eine Drehkraft von der Gröfse

$$-2\mu\nu R^2 \sin\varphi\, dm,$$

welche, wie man aus der Figur leicht abliest, um den Halbstrahl $\varphi - \frac{\pi}{2}$ im positiven Sinne wirkt. Wir werden diese Drehkraft in zwei Komponenten zerlegen, indem wir sie einerseits auf die Erdaxe und andrerseits auf die „Knotenlinie", d. h. auf die zur Erdaxe senkrechte äquatoriale Gerade $\varphi = 0$ projizieren. Diese beiden Komponenten werden dann bez.

$$2\mu\nu R^2 \sin\varphi \cos\varphi\, dm$$

und

$$-2\mu\nu R^2 \sin^2\varphi\, dm.$$

Machen wir dieselbe Zerlegung für jedes Wasserteilchen dm und setzen wir die so entstehenden Drehkräfte zusammen, so erhalten wir die gesuchte resultierende Drehkraft. Dieselbe hat, unter $2\pi m$ die Gesamtmasse des strömenden Wassers verstanden, in Richtung der Erdaxe die Komponente

$$+2\mu\nu R^2 \int_{-\pi}^{+\pi} \sin\varphi \cos\varphi\, dm = +2\mu\nu m R^2 \int_{-\pi}^{+\pi} \sin\varphi \cos\varphi\, d\varphi = 0,$$

ihre zweite Komponente in Richtung der Knotenlinie dagegen wird

$$-2\mu\nu R^2 \int_{-\pi}^{+\pi} \sin^2\varphi\, dm = -2\mu\nu m R^2 \int_{-\pi}^{+\pi} \sin^2\varphi\, d\varphi = -2\pi m R^2 \mu\nu.$$

Berücksichtigen wir noch, dafs

$$2\pi m R^2 = C$$

das Trägheitsmoment unseres Wasserstromes bezüglich des auf der Meridianebene senkrechten Erddurchmessers bedeutet, so können wir sagen:

Die resultierende Drehkraft, welche infolge der vorausgesetzten Wasserbewegung die Erde als Ganzes angreift, ist

$$K = -C\mu\nu$$

und hat die soeben genannte Knotenlinie zur Axe.

Denken wir an die mit unserer Wasserbewegung parallelisierte reguläre Kreiselpräcession, so können wir diese Drehkraft K direkt als den *Deviationswiderstand* unserer Wassermasse bezeichnen. Die vorstehende Formel befindet sich offenbar in voller Übereinstimmung mit

Hosted by Google

der Gleichung (1) des vorigen Paragraphen, falls wir nur in letzterer den hier vorausgesetzten Verhältnissen entsprechend $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ nehmen.

Vergleichen wir noch die vorstehende Ableitung des Deviationswiderstandes mit der früheren, so werden wir finden, daſs beide nicht so verschieden sind, wie es zunächst scheinen möchte. Soeben gingen wir von dem Impuls des einzelnen Massenteilchens aus, von dem aus sich die Coriolissche Kraft durch Differentiation nach der Zeit ergab. Es war dann noch eine Integration über die Gesamtmasse des Kreisels nötig, um den Gesamtwiderstand des Kreisels zu finden. Früher operierten wir mit dem Gesamtimpulse des Kreisels, aus welchem durch Differentiation nach der Zeit der Widerstand direkt folgte. Der Gesamtimpuls wurde aber seinerseits (im vorangehenden Kapitel) aus den Impulsen der einzelnen Massenteilchen durch eine Integration über die Masse des Kreisels abgeleitet. *Der Unterschied zwischen unserer jetzigen und unserer früheren Ableitung besteht also,* abgesehen von der gröſseren Allgemeinheit der letzteren, *im Grunde in einer bloſsen Vertauschung der Reihenfolge von Differentiation und Integration.*

Wir müssen betonen, daſs die hier betrachtete Wasserströmung auf der gleichförmig rotierenden Erdoberfläche durchaus in die Kategorie der erzwungenen Bewegungen gehört, daſs sie strenge genommen nur durch einen äuſseren Zwang ermöglicht wird. Wenn nämlich die Drehungsaxe der Erde dauernd die feste Nord-Südrichtung behalten soll, so muſs in jedem Momente von auſsen her der Deviationswiderstand der Wasserströmung überwunden werden. Da ein solcher Zwang in Wirklichkeit nicht vorhanden ist, würde sich aus der Zirkulation des Wassers sofort eine *Ablenkung der Nord-Südrichtung* und eine *Änderung in der geographischen Breite der Örter* ergeben. Wir kommen auf die hier sich anschlieſsenden Fragen später bei den astronomischen Anwendungen der Kreiseltheorie zurück.

Der Druck, welchen nach obigem meridional strömendes Wasser gegen die seitlichen Röhrenwände ausüben muſs, ist in der Geographie wohlbekannt und hat zur Aufstellung des sog. *Beer'schen Gesetzes* Anlaſs gegeben. Man hat aus diesem — ob mit Recht oder Unrecht, brauchen wir hier nicht zu entscheiden — Änderungen im Laufe der Flüsse ableiten wollen. Entsprechendes würde für einen *Eisenbahnzug**) gelten, welcher mit konstanter Geschwindigkeit vom Äquator nach einem der beiden Pole fährt. Dieser müſste, wenn seine Geschwindigkeit nur groſs genug ist, auf der *nördlichen* Halbkugel von der Fahrrichtung

*) Numerische Angaben hierüber findet man bei A. Ritter, Höhere Mechanik, 1. Teil, pag. 153 u. ff.


Hosted by Google

aus gerechnet nach *rechts*, auf der *südlichen* nach *links* je an einem bestimmten Punkte der Erdoberfläche umwerfen. Denken wir statt an strömendes Wasser an einen meridional zirkulierenden Luftstrom, so gelten auch für diesen ähnliche Betrachtungen. Der Druck, den die Röhrenwände auszuhalten hatten, würde sich jetzt in einer Ablenkung des Luftstromes aus seiner ursprünglichen Richtung äufsern, welcher durch das bekannte *Buys-Ballotsche Gesetz* näher bestimmt wird.

Diese und ähnliche Dinge werden ausführlich in einer interessanten, populär gehaltenen Schrift*) von Jouffret besprochen.

§ 8. Experimenteller Nachweis des Deviationswiderstandes. Der Kreisel von ein und zwei Freiheitsgraden.

Wir werden das Auftreten des Deviationswiderstandes nicht nur theoretisch zu verstehen, sondern auch praktisch zu prüfen wünschen.

Zu diesem Zwecke kann ein einfacher *Handkreisel* dienen, wie er durch die nebenstehende Figur veranschaulicht wird. Er besteht aus einem (in der Figur im Querschnitte sichtbaren) Schwungrade, welches in einem äufseren Ringe, wie wir annehmen wollen, reibungslos gelagert ist. An dem Ringe befindet sich eine Handhabe.

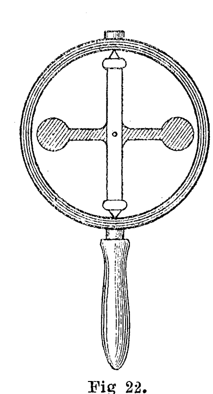


Fig 22.

Denken wir uns die Handhabe festgehalten, so haben wir einen *Kreisel von nur einem Freiheitsgrade* vor uns. Bewegen wir aber, wie es im folgenden geschehen soll, die Handhabe in beliebiger Weise um einen Punkt ihrer Axe, so realisieren wir dadurch den schon im vierten Paragraphen besprochenen Fall eines *Kreisels von nur einem Grade natürlicher und zwei Graden erzwungener Bewegungsfreiheit.* In der That sind wir, nachdem wir das Schwungrad in Rotation versetzt haben, nachträglich (wegen der vorausgesetzten

*) *Théorie élémentaire du mouvement du gyroscope* etc. Revue d'Artillerie, Bd. 4, 1874. Wir bemerken jedoch, dafs die Jouffretschen Formeln nicht überall zuverläfsig sind. Bei der Berechnung des seitlichen Druckes wird nur der erste der pag. 186, 187 erwähnten Umstände berücksichtigt und daher die Gröfse des Widerstandes um den Faktor $\frac{1}{2}$ zu klein gefunden.

Man vgl. auch H. Scheffler: *Imaginäre Arbeit, eine Wirkung der Centrifugal- und Gyralkraft.* Leipzig 1866. Die „Gyralkraft" von Herrn Scheffler stimmt im wesentlichen mit unserem „Deviationswiderstande" überein. Die Anstrengung, welche zur Überwindung des Deviationswiderstandes erforderlich ist, bezeichnet Herr Scheffler, weil sie keine Arbeit im gewöhnlichen Sinne des Wortes bedeutet, eigentümlicherweise als „imaginäre Arbeit".

Hosted by Google

Reibungslosigkeit der Lager) nicht mehr imstande, die Winkelgeschwindigkeit um die Figurenaxe durch Bewegungen der Handhabe zu beeinflufsen.

Wir wollen annehmen, dafs der dem Kreisel ursprünglich erteilte Impuls um die Figurenaxe recht erheblich und jedenfalls sehr viel gröfser ist, als die Impulsänderungen, welche wir durch die folgenden erzwungenen Bewegungen hervorrufen. Schwenken wir nun den Apparat mit der Hand schnell hin und her, so fühlen wir einen kräftigen Zug auf unsere Hand, aus welchem wir erkennen, dafs der Kreisel bei der ihm aufgezwungenen Bewegung einen Widerstand leistet. Dieser Widerstand gehört offenbar in die Kategorie der in den vorangehenden Paragraphen betrachteten Kräfte und hat seinen Grund in den durch die äufsere Bewegung erzwungenen Abänderungen des Rotationsimpulses. Er darf nicht etwa auf Rechnung des gewöhnlichen Trägheitswiderstandes nicht rotierender Körper gesetzt werden, mit dem er schon der Richtung nach nicht übereinstimmt und den er der Gröfse nach ganz bedeutend übertrifft.

Im besonderen können wir die *reguläre Präcession* in der Weise nachahmen, dafs wir den Kreisel mit ausgestrecktem Arm um unsern Körper herumführen. Auch hierbei fühlen wir einen Zug, den wir nach § 6 speziell als Deviationswiderstand ansprechen können. Der Arm wird ein wenig nach oben oder unten gezogen, wenn wir den Kreisel im einen oder anderen Sinne um die Vertikale herumführen. Allerdings wird dieser Zug bei normalen Dimensionen des Apparates nur im Falle einer sehr schnellen Drehung deutlich fühlbar.

Auffällig ist dabei namentlich der *Sinn des Zuges.* Wenn wir die Handhabe in horizontaler Richtung führen, wirkt der Zug in vertikaler Richtung. *Der Kreisel scheint immer senkrecht gegen die augenblickliche Bewegungsrichtung ausweichen zu wollen.* Dieses scheinbar paradoxe Verhalten, welches uns in ähnlicher Weise noch des öfteren begegnen wird, erklärt sich aus dem Begriff des Deviationswiderstandes von selbst. In der That: Die Impulsänderung bei unserer regulären Präcession findet in horizontaler Richtung statt; die Drehkraft des Deviationswiderstandes wirkt daher um eine horizontale Axe und sucht die Handhabe des Kreisels, je nachdem die Präcession eine progressive oder eine retrograde ist, zu heben oder zu senken.

Viel empfindlicher ist folgende Versuchsanordnung. Wir legen den Kreisel mit seiner Handhabe einerseits, mit dem festen Ringe andrerseits auf zwei Fingerspitzen der rechten und linken Hand. Drehen wir nun die Axe des Instruments, indem wir die Fingerspitzen in der horizontalen Ebene etwas gegen einander verschieben, so ver-

Hosted by Google

spüren wir einen deutlichen Druck auf die eine oder andere Hand. Die seitliche Bewegung der Fingerspitzen können wir dabei als den Beginn einer regulären Präcession auffassen, bei welcher die Figurenaxe senkrecht zur Axe der Präcession gelegen ist. Der Druck zeigt uns die Existenz des Deviationswiderstandes an.

An Stelle der Fingerspitzen können auch die beiden Schalen einer Wage treten. Wir legen den Handkreisel, nachdem wir ihn in starke Rotation versetzt haben, mit seiner Handhabe auf die eine, mit seinem Ringe auf die andere Wagschale. Jetzt drehen wir den Tisch, auf welchem die Wage steht. Sofort wird die eine Wagschale ein wenig zu sinken beginnen. —

Sodann behandeln wir einen Kreisel, wie er etwa durch die nebenstehende Figur dargestellt wird. Die Lagerung des (im Querschnitte sichtbaren) Schwungrades, sowie die Lagerung des inneren Ringes werden wir als reibungslos, äufsere Kräfte als nicht vorhanden ansehen. Über die Massenverteilung machen wir, um unsern Apparat als einen einheitlichen starren Körper behandeln zu können, die schon in der Einleitung (vgl. pag. 3) erwähnte Annahme, dafs die Masse des Schwungrades die Masse des inneren Ringes erheblich überwiegt.

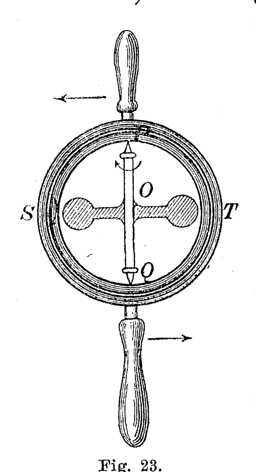


Fig. 23.

Denken wir uns den Stab, an welchem unser Kreisel befestigt ist, im Raume festgestellt, so haben wir einen *Kreisel von zwei Freiheitsgraden.* Verdrehen wir aber, wie es später geschehen soll, den Stab selbst in der Ebene des äufseren Ringes, so kommt zu den *beiden Graden natürlicher Bewegungsfreiheit* noch *ein Grad erzwungener Bewegungsfreiheit* hinzu. Das Interesse, welches der Apparat beanspruchen darf, und welches sein genaueres Studium an dieser Stelle rechtfertigt, besteht namentlich darin, dafs Lord Kelvin seine geistreiche „kinetische Theorie der Materie“, auf welche wir im letzten Kapitel eingehen werden, durch das soeben beschriebene einfache Modell zu stützen und plausibel zu machen sucht.

Wir bezeichnen die Figurenaxe des Schwungrades mit PQ, die Drehungsaxe des inneren Ringes mit ST. Beide Geraden schneiden sich in dem Mittelpunkte O des Kreisels. Bezüglich der Axe PQ sei das Trägheitsmoment des Schwungrades gleich C, bezüglich der Axe ST gleich A. Der innere und der äufsere Ring mögen ursprünglich, wie in der Figur, in eine Ebene fallen.

Zunächst wollen wir uns klar machen, *dafs die natürliche Be-*

Hosted by Google

wegung unseres Kreisels von zwei Freiheitsgraden (bei festgestellter Handhabe) eine reguläre Präcession ist, bei welcher sich das Schwungrad mit gleichförmiger Geschwindigkeit um die Axe PQ und der innere Ring mit davon unabhängiger gleichförmiger Geschwindigkeit um die Axe ST dreht. Das Kriterium für die natürliche Bewegung unseres Kreisels entnehmen wir dem § 4. Während bei der natürlichen Bewegung des kräftefreien Kreisels von *drei* Freiheitsgraden die Änderung des Impulses schlechtweg gleich Null sein muſs, brauchen bei der natürlichen Bewegung unseres kräftefreien Kreisels von *zwei* Freiheitsgraden nur diejenigen Komponenten der Impulsänderung zu verschwinden, welche zu einer möglichen Bewegung desselben gehören, während eine Impulsänderung, welche einer Drehung des festgestellten Stabes entsprechen würde, sich lediglich als Druck auf letzteren bemerkbar macht. Dasselbe Kriterium können wir auch, wenn wir uns der Ausdrucksweise des *D'Alembertschen Prinzipes* bedienen wollen (vgl. pag. 167), folgendermaſsen formulieren: Es muſs sich das System der Trägheitswiderstände aller Massenpunkte mit dem System der äuſseren Kräfte, d. h. in unserem Falle mit dem die Festhaltung des Stabes bewirkenden Mechanismus, das Gleichgewicht halten.

Bei unserer regulären Präcession wird nun der Impuls auf einem Kreiskegel um die Axe ST herumgeführt und liegt beständig in einer Ebene mit den Axen ST und PQ. Folglich steht die Impulsänderung auf diesen beiden Axen beständig senkrecht. Die Axe der Drehung, welche dieser Impulsänderung entspricht, fällt mit der Axe der Impulsänderung selbst zusammen; sie steht also ebenfalls senkrecht auf den beiden möglichen Drehungsaxen PQ und ST. Unser obiges Kriterium ist folglich erfüllt und unsere Behauptung erwiesen.

Wir können daraufhin sagen: Haben wir dem Schwungrade beliebige Winkelgeschwindigkeiten μ und ν um die Axen PQ und ST erteilt, so behalten diese Winkelgeschwindigkeiten dauernd ihre ursprünglichen Werte bei. Die negativ genommene Änderungsgeschwindigkeit des Impulses, d. h. der *Deviationswiderstand der regulären Präcession*, muſs dabei durch den die Feststellung des Stabes bewirkenden Mechanismus dauernd überwunden werden. Der Gröſse nach ist dieser Widerstand in dem vorliegenden Falle $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ (vgl. pag. 175):

$$(1) \qquad |K| = |C\mu\nu|.$$

Der Richtung nach steht er, da zu Beginn der Bewegung die Ebenen des äuſseren und des inneren Ringes zusammenfallen sollten, anfangs auf der Ebene des äuſseren Ringes senkrecht. Dagegen wird er seine Neigung gegen diese Ebene ändern, sobald im Verlaufe der Präcession

Hosted by Google

die Figurenaxe aus der Ebene des äufseren Ringes herausgetreten ist. Um auch den Sinn des Widerstandes anzugeben, nehmen wir an, dafs die Winkelgeschwindigkeiten μ und ν von P und S aus gesehen im Sinne des Uhrzeigers erfolgen. Alsdann ist die Impulsänderung zu Beginn der Bewegung senkrecht aus der Ebene der Zeichnung heraus auf den Beschauer hin gerichtet. Der Deviationswiderstand, welcher der Impulsänderung entgegengesetzt ist, wirkt daher um die vordere Normale der Zeichenebene entgegen dem Sinne des Uhrzeigers und sucht den Stab anfangs so zu bewegen, wie durch die horizontalen Pfeile der Figur angedeutet ist.

Um die Ausdrucksweise zu vereinfachen, wollen wir festsetzen, dafs wir überhaupt nur den Beginn der Bewegung in Betracht ziehen, d. h. nur diejenige Zeit, während deren die Figurenaxe nahezu in der Ebene des äufseren Ringes enthalten ist. Unter dieser Annahme können wir jetzt kurzweg sagen, dafs unser Widerstand auf der Ebene des äufseren Ringes senkrecht steht nnd den Stab in dieser Ebene von vorne gesehen entgegen dem Sinne des Uhrzeigers zu verdrehen strebt.

Wir können hier abermals an die vermeintliche Unveränderlichkeit der Rotationsaxe erinnern. Bei der regulären Präcession unseres Kreisels von zwei Freiheitsgraden wird die instantane Drehungsaxe (wenigstens bei kleinen Werten von $\nu : \mu$) auf einem sehr flachen Kreiskegel um die horizontale Axe ST herumgeführt. Die äufsere Einwirkung, welche hierzu erforderlich ist, besteht in der kontinuierlichen Überwindung des Deviationswiderstandes. *Wir können also lediglich durch Festhalten der Handhabe d. h. ohne die geringste Arbeitsleistung bewirken, dafs die Rotationsaxe aus einer ursprünglichen in eine nahezu entgegengesetzte Lage übergeführt wird.*

Wir werden jetzt umgekehrt annehmen, dafs zu Beginn der Bewegung keine Rotation um die Axe ST vorhanden ist, wohl aber, dafs dem Kreisel eine starke Rotation μ um die Axe PQ erteilt wurde, welche von P aus gesehen im Sinne des Uhrzeigers erfolgt. Wir denken uns für einen Augenblick die Arretierung des Stabes gelöst und erteilen diesem eine erzwungene Bewegung einfachster Art. Wir drehen nämlich den Stab in der Ebene des äufseren Ringes um einen kleinen Winkel v von vorn gesehen im Sinne des Uhrzeigers plötzlich herum, um ihn sogleich wieder festzuhalten.

Der Impuls des Kreisels setzt sich natürlich mit den Drehstöfsen, welche zu unserer Bewegung v gehören, nach dem Parallelogrammsatze zusammen. Nun gehört zur Erzeugung der Bewegung v ein gewisser und zu der unmittelbar darauf folgenden Hemmung dieser Bewegung der entgegengesetzt gleiche Drehstofs. Im ganzen behält also der

Hosted by Google

Impulsvektor seine ursprüngliche Lage im Raume bei. Gleichzeitig ist aber seine Lage im Kreisel geändert worden: während er der Annahme nach ursprünglich in Richtung der Figurenaxe fiel, bildet er jetzt mit dieser Axe den Winkel v. Dabei besitzt die Projektion des Impulsvektors auf die gedrehte Richtung der Figurenaxe bei genügend kleinem v annähernd die Gröſse des ursprünglichen Impulses $C\mu$. Die zur Figurenaxe senkrechte, in die Richtung von ST fallende Komponente des Impulses dagegen hat die Gröſse $C\mu v$.

Der letzteren Impulskomponente entspricht eine Drehgeschwindigkeit ν, welche um die Axe ST von S aus gesehen im Sinne des Uhrzeigers stattfindet und welche durch die Gleichung bestimmt ist

$$A\nu = C\mu v. \tag{2}$$

Mit dieser Geschwindigkeit ν beginnt sich der innere Ring, nachdem wir den äuſseren Ring um v verdreht haben, in Bewegung zu setzen. Das Schwungrad fährt dagegen fort, mit der Winkelgeschwindigkeit μ um seine Figurenaxe zu rotieren, weil die Impulskomponente in Richtung der gedrehten Figurenaxe nach wie vor $C\mu$ beträgt. Wenn wir weiterhin die Stellung des Stabes im Raume nicht mehr ändern, so behalten μ und ν die angegebenen Werte bei. Es hat sich also eine reguläre Präcession genau von der oben betrachteten Beschaffenheit eingestellt.

Bemerken wir noch, daſs die Geschwindigkeit ν sehr klein ausfällt, da wir v als einen sehr kleinen Winkel voraussetzten. Unsere obige Verabredung, daſs wir nur denjenigen Teil der regulären Präcession betrachten wollten, während dessen die Figurenaxe nahezu in der Ebene des äuſseren Ringes enthalten ist, bedeutet daher jetzt keine wesentliche Beschränkung.

Nun sahen wir oben, daſs jede reguläre Präcession (μ, ν) unseres Kreisels bei festgestellter Handhabe einen Deviationswiderstand erzeugt, welcher unter den vorliegenden Umständen den Apparat anfangs in der Ebene des äuſseren Ringes entgegen dem Sinne des Uhrzeigers zu verdrehen strebt. Die Gröſse dieses Widerstandes ist den Gleichungen (1) und (2) zufolge

$$|K| = \frac{C^2\mu^2}{A} v, \tag{3}$$

sie ist also dem Drehwinkel v proportional; dem Sinne nach ist unser Widerstand, wie wir soeben sahen, der ursprünglichen Drehung v entgegengesetzt und strebt die letztere rückgängig zu machen.

Diese merkwürdigen Eigenschaften des Kreisels von zwei Freiheitsgraden werden wir später bei der Darstellung des Kelvinschen Elasticitätsmodelles zu benutzen haben. Wir fassen dieselben hier noch

Hosted by Google

einmal, wie folgt, zusammen, wobei wir uns diejenigen Vereinfachungen der Ausdrucksweise gestatten, welche durch unsere Verabredung einer nicht zu langen Ausdehnung der Beobachtungszeit gegeben sind:

Wenn wir unseren mit einem rotierenden Schwungrade versehenen Stab in der Ebene des äußeren Ringes um einen kleinen Winkel verdrehen, so widersetzt er sich mit einer dem Drehungswinkel proportionalen Kraft. Wir müssen, um den Stab in seiner neuen Stellung zu erhalten, dauernd eine Kraft ausüben. Lassen wir mit dieser Kraft nach, so strebt unser Stab wiederum seiner Anfangslage zu.

Unser Stab besitzt also eine gewisse spezifische Widerstandsfähigkeit gegen Richtungsänderungen, eine Art absoluter Orientierung im Raume.

Hosted by Google

Alexander Ziwet

F. KLEIN UND A. SOMMERFELD,

ÜBER DIE

THEORIE DES KREISELS.

HEFT II.

DURCHFÜHRUNG DER THEORIE IM FALLE DES SCHWEREN SYMMETRISCHEN KREISELS.



LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1898.

Hosted by Google

Anzeige von Heft II der Kreiseltheorie

(aus den Mitteilungen der Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner in Leipzig).

Als Fortsetzung des im Sommer 1897 erschienen ersten Heftes der Kreiseltheorie, welches die allgemeinen kinematischen und kinetischen Grundlagen der Theorie auseinanderzulegen hatte, folgt jetzt das zweite Heft. Dieses stellt sich vor allem die Aufgabe, die Bewegung des symmetrischen Kreisels unter dem Einfluſs der Schwere bei festem Stützpunkte in allen ihren Details zu diskutieren. Einige anschlieſsende Probleme, die Bewegung des allgemeinen Kreisels unter dem Einfluſs der Schwere und die Poinsot-Bewegung, d. h. die Bewegung des kräftefreien Kreisels bei allgemeiner Massenverteilung, sind mehr gestreift und zum Vergleich herangezogen als erschöpfend behandelt.

Nur bei der Besprechung der die Stabilität der Bewegungen betreffenden Fragen wurde der Darstellung eine etwas breitere Basis gegeben, weil die hiermit sich befassende und gerade im Werden begriffene Theorie heutzutage ein besonderes Interesse beanspruchen darf. In diesem Teile wurden nämlich die Definitionen und Formulierungen hinreichend allgemein gehalten, um beliebige mechanische Systeme zu umfassen. Der Kreisel erscheint hier nur als ein besonders instruktives Beispiel oder, wenn man will, als ein „ideenbildendes Moment". Übrigens ist der Begriff von der Stabilität der Bewegung hier wesentlich anders gefaſst, wie in den einschlägigen Lehrbüchern (von Thomson und Tait oder Routh), natürlich aber so, daſs sich darunter der allgemein acceptierte Begriff von der Stabilität des Gleichgewichtes subsumiert.

Was nun den eigentlichen Gegenstand des vorliegenden Heftes, die Bewegung des schweren symmetrischen Kreisels angeht, so wurde eine möglichst allseitige Behandlung des Problems angestrebt. Die Darstellung begnügt sich daher nicht mit der Ermittelung der allgemeinen formellen Behandlung des Problems, sondern sie sucht auch — im Sinne der in der Einleitung auseinandergesetzten Prinzipien — das volle geometrische und mechanische Verständnis der Bewegung anzubahnen, welches ohne Frage einen nicht minder wichtigen Zielpunkt bei der Behandlung eines mechanischen Problems bildet, wie die analytische Beherrschung des Gegenstandes.

Aus diesem Grunde hebt Kap. IV mit einer qualitativen Beschreibung der Bahnkurve der Kreiselspitze an, welche erst später durch eine genaue

Hosted by Google

quantitative Diskussion der Bewegungen kontrolliert wird. Auch die Integration der Differentialgleichungen wird zunächst auf geometrischem Wege bewerkstelligt, wobei sich gewisse bekannte erste Integrale der Bewegung als einfache Eigenschaften des Impulsvektors herausstellen. Von demselben Gesichtspunkte aus wird auch die fraglos beste analytische Methode zur Berechnung der Kreiselbewegung, ihre Darstellung durch elliptische Funktionen bis zum letzten Kapitel dieses Heftes zurückgeschoben zu Gunsten der Darstellung durch elliptische Integrale, welche zwar weniger vollkommen ist, dafür aber der geometrischen Anschauung und der mechanischen Interpretation zunächst näher liegen dürfte, wie jene.

Andrerseits war es erforderlich, wenn wirklich von einer vollständigen Behandlung des Problems die Rede sein konnte, die analytischen Entwickelungen bis zur wirklichen numerischen Berechnung der Kreiselbewegungen durchzuführen. Den Schluſs des vierten Kapitels bildet daher eine Anleitung zur numerischen Berechnung auf Grund der Legendreschen Integraltafeln, sowie eine Methode zur Ableitung von Näherungsformeln, durch welche man, gerade in den praktisch wichtigsten Fällen, die exakten Formeln ersetzen kann. Im Kapitel VI wird die Frage der numerischen Berechnung noch einmal aufgenommen und mit Hülfe der ϑ-Reihen auf die befriedigendste Weise (bis zur Abschätzung der Fehlergrenze incl.) beantwortet.

Kapitel V behandelt in der Hauptsache einige besondere und besonders markante Bewegungstypen. Hervorzuheben sind namentlich zwei Bewegungen, welche als pseudoreguläre Präcession und als aufrechte Kreiselbewegung bezeichnet werden.

Unter der pseudoregulären Präcession wird jene Bewegung verstanden, welche unter den gewöhnlichen experimentellen Bedingungen bei hinreichend groſser Eigenrotation in der Regel Platz greift und welche sich von der wirklichen regulären Präcession, äuſserlich betrachtet, kaum unterscheidet. Das Paradoxe, welches dieser Bewegung anhaftet, wird ausführlich diskutiert und auf eine Ungenauigkeit in der Beobachtung zurückgeführt. Da die meisten populären Erklärungsversuche der Kreiselbewegung gerade die hierher gehörigen Erscheinungen als die praktisch wichtigsten im Auge haben, so folgt hier eine kurze Zusammenstellung und Kritik der populären Kreisellitteratur.

Unter der aufrechten Kreiselbewegung wird sodann die gleichförmige Rotation um die vertikal gestellte Figurenaxe verstanden. Dieselbe ist bekanntlich bei hinreichend groſser Rotationsgeschwindigkeit stabil, bei geringerer Geschwindigkeit labil (wobei noch erst zu diskutieren ist, was unter diesem Wort verstanden sein soll). Unter denjenigen

Hosted by Google

Bewegungen, welche sich durch Störung des labilen Bewegungszustandes ergeben, kommt ein Fall asymptotischer Bewegung vor, welcher im Hinblick auf die anschliefsenden allgemeinen Stabilitätsbetrachtungen von besonderer Wichtigkeit ist.

Bei der Darstellung der Bewegung durch elliptische Funktionen in Kapitel VI tritt die fundamentale Bedeutung, welche die bereits in Kapitel I eingeführten Drehungsparameter $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ für die Formulierung der Schlufsresultate besitzen, in ihr volles Licht. In diesen Parametern wird die Darstellung der Bewegung so einfach und übersichtlich, wie nur irgend möglich.

Übrigens werden alle erforderlichen Entwickelungen aus der Theorie der elliptischen Funktionen mit einiger Vollständigkeit in dem Buche selbst reproduziert, so dafs die bezüglichen Teile der Darstellung geradezu als eine Einleitung in diese Theorie angesehen werden können. Es scheint unter didaktischen Gesichtspunkten nicht unrichtig, eine solche Einleitung, wie es hier geschehen, an ein spezielles Beispiel anzuknüpfen. Von anderen Darstellungen unterscheidet sich die vorliegende dadurch, dafs durch ausführliches Heranziehen der geometrischen Beziehungen der Zusammenhang des Ganzen besonders deutlich herausgearbeitet ist.

Von eigenartigem Interesse dürfte der Schlufsparagraph dieses Heftes sein. Hier wird das Integrationsproblem der Kreiselbewegung noch einmal aufgenommen und zwar auf Grund der mit den Koordinaten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ selbst gebildeten allgemeinen Lagrangeschen Gleichungen. Es zeigt sich, dafs diese Gleichungen sogenannte Hermite-Laméschen Differentialgleichungen sind und dafs ihre Integrale in der Form von elliptischen Funktionen ohne irgend nennenswerte Zwischenrechnungen direkt hingeschrieben werden können. Gleichzeitig ergiebt sich noch aus der Form dieser Gleichungen die merkwürdige Thatsache, dafs die Kreiselbewegung identificiert werden kann mit der Bewegung eines sphärischen Pendels im Raume von vier Dimensionen.

Nachdem somit die reine Theorie der Kreiselbewegung zu einem gewissen Abschlusse gebracht ist, wird in dem dritten und letzten Heft des Buches zu zeigen sein, inwieweit sich diese Theorie mit der Erfahrung deckt, bez. welche Modifikationen daran angebracht werden müssen, damit sie auf eine Reihe von Thatsachen aus der Physik und Astronomie angewandt werden kann. Ferner sollen in jenem dritten Hefte die an dem speziellen Beispiele gewonnenen Gesichtspunkte für die Auffassung der allgemeinen Mechanik verwertet und endlich einzelne Streifzüge in das Gebiet der modernen theoretischen Physik unternommen werden.

Hosted by Google

Kapitel IV.

Die allgemeine Bewegung des schweren symmetrischen Kreisels. Einführung der elliptischen Integrale.

§ 1. Anschauliche Diskussion der zu erwartenden Bewegungsformen; vorläufige Verabredungen.

In diesem Kapitel wenden wir uns zur definitiven Behandlung des *schweren* symmetrischen Kreisels von drei Graden der Freiheit, setzen also durchweg voraus, daſs der Schwerpunkt von dem Unterstützungspunkte verschieden ist.

Wir haben bisher nur einen ganz speziellen Fall der Bewegung des schweren symmetrischen Kreisels untersucht, nämlich die reguläre Präcession desselben (vgl. § 6 des vorigen Kap.). Demgegenüber soll es sich jetzt um seine allgemeine Bewegung (bei beliebiger Wahl des Anfangszustandes) handeln. Bevor wir aber in die etwas weitläufigen *quantitativen* Diskussionen eintreten, welche vollständig nur mit Hülfe der elliptischen Integrale durchgeführt werden können, wollen wir unsere Aufgabe zunächst *qualitativ* fassen und auf anschaulichem Wege einen ersten Überblick über die zu erwartenden Bewegungsformen zu gewinnen suchen. Ein entsprechendes Verfahren wird stets, zumal bei komplizierteren Aufgaben der Mechanik geboten sein, weil man im anderen Falle Gefahr läuft, sich in Einzelheiten zu verlieren und über den Formeln den Gegenstand selbst zu vergessen.*)

Zunächst treffen wir einige vereinfachende Verabredungen.

1. Wir beziehen uns im Folgenden stets auf den *Kugelkreisel*. Dies wird umsomehr gestattet sein, als wir bald lernen werden, die allgemeine Bewegung des schweren symmetrischen Kreisels auf die des schweren Kugelkreisels zurückzuführen. Daſs es überhaupt schwere Kugelkreisel giebt, d. h. Körper von kugelförmigem Trägheitsellipsoid, deren Schwerpunkt von dem Mittelpunkte der Trägheitskugel verschieden

*) Vgl. hierzu die beachtenswerten Bemerkungen, welche Herr Poincaré seinen wichtigen „qualitativen" Untersuchungen über Differentialgleichungen, Journal de Liouville, sér. III t. 7 und 8, 1881, 1882 voranschickt.



ist, wurde bereits pag. 106 durch ein Beispiel erläutert. Den gemeinsamen Wert der Trägheitsmomente unseres Kreisels bezeichnen wir mit A.

2. Wir werden annehmen, dafs bei vertikal aufgerichteter Figurenaxe der Schwerpunkt S *unterhalb des Unterstützungspunktes* O liegt ($P < 0$). Offenbar bedeutet diese Annahme keine Beschränkung der Allgemeinheit, weil wir es ja in der Hand haben, den einen oder den anderen der beiden Halbstrahlen, in welche die Gerade OS durch den Punkt O zerlegt wird, als Figurenaxe zu bezeichnen.

3. Wir müssen uns ferner entscheiden, auf welche Elemente der Kreiselbewegung wir im Folgenden unser Hauptaugenmerk richten wollen. Nach der Poinsotschen Theorie der Drehung hätten wir uns in erster Linie den Ort des Drehungsvektors im Körper und im Raume klar zu machen. Die Gestalt der Polhodie- und der Herpolhodiekurve würde uns alsdann ein vollständiges Bild der Bewegung liefern. Indessen ist es nicht leicht, sich das Abrollen dieser Kurven deutlich zu vergegenwärtigen; aufserdem ist im Experimente der Ort der Drehungsaxe schwer sichtbar und überhaupt nur durch besondere Vorrichtungen (vgl. p. 14) zur Wahrnehmung zu bringen. Viel sinnfälliger ist bei der üblichen Konstruktion unserer Modelle der Ort der Figurenaxe im Raume. Infolgedessen werden wir statt nach Polhodie- und Herpolhodiekurve lieber nach der Kurve fragen, welche irgend ein Punkt der Figurenaxe, z. B. derjenige, welcher von O den Abstand 1 hat, bei der Bewegung beschreibt. Indem wir uns vorstellen, dafs der mit Masse belegte Teil der Figurenaxe (vgl. etwa die Figur von pag. 1) gerade die Länge 1 hat, werden wir den genannten Punkt im Folgenden als Kreiselspitze bezeichnen. Die Kurve, welche diese „Kreiselspitze“ auf der um O beschriebenen Einheitskugel aufzeichnen würde, liefert uns alsdann ein für die Anschauung charakteristisches, wenn auch nicht ganz vollständiges Bild vom Ablauf der Bewegung; letzteres deshalb, weil ja unsere Kurve nur die Bewegung der Figurenaxe im Raume, nicht aber die Drehung des Kreisels um die Figurenaxe zum Ausdrucke bringt.

Um die Kurve der Kreiselspitze graphisch wiedergeben zu können, müssen wir die Einheitskugel, auf welcher sie verläuft, auf eine geeignete Zeichenebene projizieren. Als solche wählen wir die Äquatorebene der Kugel, d. h. die durch den Unterstützungspunkt gehende Horizontalebene. Was die Art der Projektion betrifft, so würde es vielleicht am nächsten liegen, eine orthogonale Parallelprojektion (kurz *„orthographische Projektion“* genannt) zu wählen, also die Kurve so zu zeichnen, wie sie einem von oben her aus unendlicher Entfernung auf die Kugel blickenden Beschauer erscheinen würde. Dies würde aber

Hosted by Google

gewisse Übelstände mit sich bringen, auf welche demnächst aufmerksam gemacht werden soll. Besser ist es, die *stereographische Projektion* anzuwenden, wobei wir den tiefsten Punkt der Kugel, den „Südpol", als Projektionszentrum benutzen werden. Die Zeichnung giebt dann dasjenige Bild wieder, welches ein im Südpol der Kugel befindliches Auge von der Kurve empfängt. Der Äquator der Kugel erscheint in der Zeichnung als Einheitskreis, dessen Mittelpunkt dem höchsten Punkte der Kugel, dem „Nordpol", dessen Inneres der „nördlichen Halbkugel" entspricht.

Sehr viel vollkommener als die genannte orthographische oder auch als die im Folgenden anzuwendende stereographische Projektion sind allerdings die *stereoskopischen Bilder* der Kreiselbewegung, welche die Herren Greenhill und Dewar*) publiziert haben. Hier werden zwei geeignete Zentralprojektionen der Bahnkurve hergestellt, welche, durch das Stereoskop betrachtet, den vollendeten Eindruck der sphärischen Kurve hervorrufen. Die lediglich typographische Schwierigkeit, von einer Raumkurve ein absolut adäquates Bild zu geben, wird hier also durch Hinzuziehung des Stereoskops in glücklichster Weise gelöst. Wir verzichten auf diese Wiedergabe der Bahnkurve nur deshalb, weil wir beim Leser den Besitz eines Stereoskops nicht voraussetzen wollen.

4. Wir können ferner ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit unsere Aufgabe dadurch vereinfachen, dafs wir die *Anfangszeit*, von der aus wir die Bewegung des Kreisels verfolgen, passend auswählen. Die Anfangszeit soll immer so angenommen werden, dafs sich in ihr die Kreiselspitze an einem höchsten oder tiefsten Punkte ihrer Bahn befindet. Die Kurve der Kreiselspitze wird hiernach zu Anfang eine horizontal gerichtete Tangente besitzen, falls sie nicht im Besonderen eine vertikal gerichtete Spitze bildet. Gleichzeitig ist durch unsere Wahl der Anfangszeit die Anfangslage der instantanen Rotationsaxe präjudiziert. Die Rotations- und die mit ihr zusammenfallende Impulsaxe liegen alsdann nämlich ersichtlich in einer durch die Anfangslage der Figurenaxe gehenden Vertikalebene.

5. Der Anfangszustand sowie der Charakter der resultierenden Bewegung sind nun durch drei Daten wesentlich bedingt, durch die anfängliche Neigung der Figurenaxe gegen die Vertikale, durch die Anfangsneigung des Impulsvektors gegen die Vertikale und durch die Länge dieses Vektors. Die sonst etwa in Betracht kommenden Daten z. B. das Azimuth, unter welchem die Figurenaxe von oben gesehen erscheint, sind unwesentlich und haben speziell auf die Gestalt der im

*) Proceedings of the London Math. Soc., Bd. 27, pag. 587 u. ff., 1896, Engineering, Bd. 64 pag. 311, 1897.


Hosted by Google

Folgenden zu entwerfenden Figuren keinen Einfluſs. Die anfängliche Neigung der Figurenaxe gegen die Vertikale messen wir, wie üblich, durch den Winkel ϑ; Lage und Länge des Impulsvektors sind bekannt, wenn wir etwa seine senkrechten Projektionen auf die Vertikale und auf die Figurenaxe angeben. Da wir die Komponenten des Impulsvektors im X, Y, Z-System mit L, M, N bezeichnen, wird die Projektion des Impulsvektors auf die Figurenaxe durch den Buchstaben N zu charakterisieren sein. Führen wir ferner für die Komponenten des Impulsvektors in dem x, y, z-Systeme, dessen z-Axe wie früher verabredet mit der Vertikalen zusammenfallen sollte, die entsprechenden Bezeichnungen l, m, n ein, so wird die Projektion des Impulsvektors auf die Vertikale mit dem Buchstaben n zu belegen sein. Die Impulskomponente N bestimmt die Geschwindigkeit r, mit welcher sich der Kreisel um seine eigene Axe dreht. Es soll daher N kurz als *Eigenimpuls*, die zugehörige Geschwindigkeitskomponente r als *Eigenrotation* bezeichnet werden. Andrerseits stellt die Impulskomponente n einen Drehstoſs von vertikaler Axe dar, welcher einem gewissen auf die Kreiselspitze ausgeübten und horizontal gerichteten gewöhnlichen Stoſse äquivalent ist. Durch diesen Stoſs wird die Geschwindigkeit bedingt, mit der die Kreiselspitze in ihrer Anfangslage seitlich (d. h. in horizontaler Richtung) fortschreitet. Infolgedessen soll die Impulskomponente n kurz als *seitlicher Anstoſs* bezeichnet werden. Zusammenfassend können wir hiernach sagen: Der Charakter der allgemeinen Kreiselbewegung hängt wesentlich nur von drei Konstanten ab, nämlich von der anfänglichen Neigung der Figurenaxe gegen die Vertikale, dem Eigenimpulse und dem seitlichen Anstoſs zu Beginn der Bewegung, d. h. von den Beträgen, welche die Gröſsen ϑ, N und n zur Zeit $t = 0$ besitzen. Es wird sich übrigens im dritten Paragraphen zeigen, daſs die Impulskomponenten n und N ihre Anfangswerte für den ganzen Verlauf der Bewegung beibehalten, so daſs wir statt von den „Anfangswerten“ der Gröſsen n und N schlechtweg von den „Konstanten“ n und N reden können, welchen Umstand wir uns zur Vereinfachung der Ausdrucksweise schon jetzt zu nutze machen werden.

6. Während wir der Konstanten n im Folgenden *alle möglichen Werte* erteilen, wollen wir die Konstante N in diesem Paragraph als *positiv* voraussetzen; wir wollen also annehmen, daſs die Rotation des Kreisels um die Figurenaxe im Sinne des Uhrzeigers erfolgt. Ferner wollen wir den Anfangswert des Winkels ϑ von vornherein in spezieller Weise festlegen. Wir bestimmen nämlich, daſs die Figurenaxe anfangs *horizontal* liegen, der Winkel ϑ also gleich $\frac{\pi}{2}$ sein solle. Die

Hosted by Google

Kurve der Kreiselspitze wird alsdann, von dem Äquator der Einheitskugel auslaufend, in diesem einen höchsten oder tiefsten Punkt besitzen. Inwieweit durch diese Festsetzungen $\left(N > 0 \text{ und } \vartheta = \frac{\pi}{2}\right)$ die folgenden Betrachtungen spezialisiert werden, wird später auszuführen sein. —

Nach diesen Verabredungen werden wir so vorgehen, dafs wir alle möglichen Bewegungsformen unseres Kugelkreisels, welche sich bei beliebiger Wahl der Konstanten n und N ergeben, zwischen einige besonders einfache Spezialfälle einordnen und uns im übrigen einer Art Kontinuitätsprinzipes bedienen, welches wir so formulieren: *Bei stetiger Abänderung des Anfangszustandes (der Werte von n und N) wird sich auch die Bewegung des Kreisels stetig verändern; unstetige Übergänge, welche mechanisch gesprochen auf instabile Bewegungsformen hindeuten würden, werden wir fürs erste als ausgeschlossen ansehen.* Natürlich bedarf dieses Prinzip, sowie unsere ganze qualitative Schlufsweise einer genauen quantitativen Nachprüfung. In der That sollen die folgenden Betrachtungen nicht als absolut stringent, sondern nur als plausibel hingestellt werden; wir werden sie später nach verschiedenen Richtungen hin zu ergänzen haben. Übrigens sind die Figuren, welche wir für die Kurve der Kreiselspitze geben, nicht nur qualitativ, sondern auch quantitativ richtig gezeichnet.

Die Gesamtheit der Fälle, welche wir zu überblicken haben, stellt, entsprechend den unendlich vielen Werten, welche wir den Konstanten N und n beilegen können, eine zweifach unendliche Mannigfaltigkeit dar. (Man vgl. hierzu das Schema in Figur 36 von pag. 215.) Wir müssen uns im Folgenden natürlich begnügen, aus dieser Mannigfaltigkeit eine Reihe einzelner charakteristischer Typen herauszuheben.

Betrachten wir zunächst die Spezialfälle, auf welche wir hindeuteten. Es sind dieses die *reguläre Präcession* einerseits und die *Pendelbewegung* andrerseits.

Nach pag. 178, 179 giebt es bei gegebener Massenverteilung des Kreisels, sowie bei gegebenen Werten des (konstanten) Winkels ϑ und der Geschwindigkeitskomponente μ zwei mögliche Werte der zugehörigen Geschwindigkeitskomponente ν, welche zu einer *regulären Präcession* Anlafs geben. Im Falle des Kugelkreisels sind diese Werte beide reell und werden durch die folgenden Gleichungen gegeben:

$$\text{a)}\quad \nu = \frac{P}{A\mu}, \qquad \text{b)}\quad \nu = \pm\infty.$$

Es ist leicht, zumal in dem vorliegenden Falle $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, von den Präcessionskonstanten ν und μ zu unseren Impulskomponenten n und N

Hosted by Google

überzugehen. Die Gröfsen ν und μ bedeuten (vgl. z. B. die Figuren von pag. 48) die Parallelprojektionen des Drehungsvektors auf die Vertikale und die Figurenaxe. Steht nun die Figurenaxe auf der Vertikalen senkrecht, so sind diese Parallelprojektionen mit den bez. Normalprojektionen des Drehungsvektors, welche wir nach früherem mit ϱ und r zu bezeichnen haben, identisch. Aus ϱ und r berechnen sich aber bei unserem Kugelkreisel die Impulskomponenten n und N durch Multiplikation mit dem Werte des Trägheitsmomentes, welchen wir mit A bezeichnen. Wir haben also in a) und b) für ν und μ bez. einzutragen $\frac{n}{A}$ und $\frac{N}{A}$. Infolgedessen beträgt die Gröfse des seitlichen Anstofses n, welche zusammen mit dem Eigenimpulse N zu einer regulären Präcession $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ Anlafs giebt:

$$\text{a)} \quad n = \frac{AP}{N} \quad \text{bez.} \quad \text{b)} \quad n = \pm\infty .$$

Der Fall a), die früher sog. „langsame Präcession“, tritt, da wir oben $P < 0$ und $N > 0$ voraussetzten, für einen seitlichen Anstofs ein, welcher von der Vertikalen gesehen entgegen dem Sinne des Uhrzeigers wirkt ($n < 0$); im Falle b), der sog. „schnellen Präcession“ ist der Sinn des seitlichen Anstofses unbestimmt ($n = \pm\infty$).

Wir haben uns sodann über den zweiten der oben genannten Spezialfälle, die *Pendelbewegung*, zu unterrichten. Der Kreisel bewegt sich wie ein gewöhnliches Pendel, wenn wir ihm in der Anfangslage weder einen Eigenimpuls noch einen seitlichen Anstofs erteilen ($N = n = 0$), also kurz gesagt, wenn der Impulsvektor anfangs die Länge Null hat. Obwohl diese Aussage von selbst einleuchtend ist, wollen wir sie dennoch im Einzelnen durch unsere Impulsbetrachtungen beweisen.

Wenn der Kreisel bei horizontal gestellter Figurenaxe dem Einflufs der Schwere überlassen wird, so erzeugt diese während des ersten Zeitmomentes dt einen unendlich kleinen Impulsvektor von der Gröfse $P \sin\vartheta\, dt = P\, dt$, welcher die Knotenlinie OK (vgl. Fig. 24) zur Axe hat. Der Kreisel beginnt sich also um diese Axe zu drehen, wobei sich der Winkel ϑ verkleinert. Die Lage der Knotenlinie wird bei dieser Drehung nicht geändert. Im nächsten Moment wirkt daher der Zusatzimpuls der Schwerwirkung um dieselbe Axe OK und addiert sich mit dem vorhandenen Impulse algebraisch; die Drehgeschwindigkeit des Kreisels um diese Axe wird entsprechend beschleunigt; die Knotenlinie behält ihre ursprüngliche Lage. Durch Wiederholung dieser Betrachtung erkennt man: Der Impuls des Kreisels fällt beständig in die Richtung OK; die Bewegung besteht in jedem Augenblicke aus einer Drehung um diese Axe; die Figurenaxe bewegt sich in einer festen

Hosted by Google

Vertikalebene; die Kurve der Kreiselspitze ist ein vertikal gestellter Kreisbogen. Die Bahngeschwindigkeit der Kreiselspitze berechnet sich dabei durch die Bedingung, dafs die Änderungsgeschwindigkeit des Impulses jederzeit gleich sein mufs der äufseren Drehkraft $P \sin \vartheta$ oder, wenn wir uns der Ausdrucksweise des D'Alembertschen Prinzipes bedienen wollen, dafs diese Drehkraft dem bei unserer Bewegung auftretenden Trägheitswiderstande das Gleichgewicht halten mufs.

Es erübrigt nur noch zu zeigen, dafs die Kreiselspitze nach Überschreitung des höchsten Punktes der Kugel um ebensoviel herabsinkt, wie sie vorher gestiegen ist, d. h. bis zu einem Punkte des Äquators herunterfällt und dann umkehrt. Fassen wir zu dem Zwecke denjenigen Moment auf, wo die Kreiselspitze den höchsten Punkt der Kugel passiert. Würden wir in diesem Momente den Sinn des vorhandenen Impulsvektors und also die Geschwindigkeit sämtlicher Kreiselpunkte umkehren, so würde die Kreiselspitze nach einem allgemeinen Grundsatze der Mechanik ihre bisherige Bahn im umgekehrten Sinne durchlaufen also einen Kreisquadranten beschreiben. Aus dieser Bahn ergiebt sich aber die Bahn, welche die Kreiselspitze bei Fortsetzung ihres ursprünglichen Bewegungssinnes beschreibt durch Spiegelung an der Vertikalebene OK, wie aus der Symmetrie des die Bewegung beeinflussenden Kraftsystems hervorgeht. Infolgedessen besteht die Fortsetzung der Bahn wieder aus einem Kreisquadranten, welcher bis zu dem mit dem Ausgangspunkte A diametralen Äquatorpunkte B herabreicht. Da die Kreiselspitze in B mit der Geschwindigkeit Null ankommt, haben wir jetzt genau dieselben Verhältnisse, wie zu Beginn der Bewegung in A. Infolgedessen wird die Fortsetzung der Bahnkurve aus dem im umgekehrten Sinne durchlaufenen Halbkreise AB bestehen und so fort. Die Bewegung ist hierdurch in der That als einfache Pendelbewegung charakterisiert.

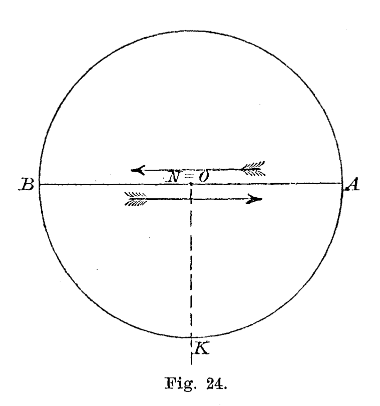


Fig. 24.

Bei der stereographischen Projektion erscheint unsere Bahnkurve (vgl. die nebenstehende Figur) einfach als ein Durchmesser (AB) des Einheitskreises, welcher abwechselnd im Sinne des oberen oder unteren Pfeiles durchlaufen wird.

An diese Figur, welche wie erwähnt durch die Werte $n = N = 0$ charakterisiert ist, knüpfen wir in erster Linie an, um uns allgemeinere Fälle der Bewegung zu veranschaulichen. Zunächst werden wir eine

Serie von Figuren geben, bei welcher der seitliche Anstoſs fortgesetzt gleich Null ist $(n = 0)$, während der Eigenimpuls (N) successive vermehrt werden soll.

§ 2. Anschauliche Diskussion der zu erwartenden Bewegungsformen; Fortsetzung und Schluſs.

Indem wir jetzt zur wirklichen Ausführung unserer qualitativen Diskussion übergehen, nehmen wir, wie verabredet, zunächst $n = 0$ und setzen überdies in der ersten der zu entwickelnden Figuren (Fig. 25) den Eigenimpuls verhältnismäſsig klein voraus gegen die Änderung, welche die Schwerewirkung in der Länge des Impulsvektors etwa während der Zeiteinheit hervorruft, so daſs die Kontinuität mit der vorhergehenden Figur gewahrt bleibt. Um die resultierende Änderung der Bahnkurve beurteilen zu können, wollen wir vorderhand die Kreiselspitze künstlich in der früheren Bahn mit der früheren Geschwindigkeit entlang führen und gleichzeitig dafür sorgen, daſs der Eigenimpuls N seinen Anfangsbetrag beibehält. Praktisch wäre dieses etwa so zu realisieren, daſs man eine Rinne von der Gestalt und Lage der vorherbeschriebenen Bahnkurve herstellte, in welcher die Kreiselspitze ohne Reibung entlang gleiten könnte.

Bei dieser erzwungenen Bewegung ist das Gleichgewicht zwischen der Schwerkraft und dem Trägheitswiderstande, welcher bei der freien Pendelschwingung $N = 0$ bestand, nicht mehr vorhanden. In der That werden ja nur die Änderungen der Horizontal-Komponente des Impulses durch die Schwerkraft kompensiert, während die Änderungen des Eigenimpulses, welcher, wie wir voraussetzten, seine Länge beibehält, seine Richtung im Raume aber zugleich mit der Figurenaxe wechselt, unausgeglichen bleiben. Infolgedessen ergiebt sich ein Widerstand, welchen wir, da er auf der instantanen Rotationsaxe senkrecht steht, nach § 5 des vorigen Kapitels als Deviationswiderstand bezeichnen können. In unserem Beispiele würde sich derselbe als seitlicher Druck auf die Rinne äuſsern.

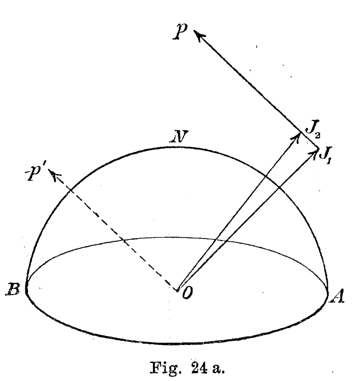


Fig. 24 a.

Der Sinn dieses Druckes ist leicht aus obenstehender Hülfsfigur zu ersehen. Dieselbe stellt den Eigenimpuls in zwei benachbarten Lagen OJ_1, OJ_2 während der ersten Phase der Bewegung dar, d. h. während die Kreiselspitze auf dem vertikalen Kreise

ANB von A nach B pendelt. Der Sinn der Impulsänderung ist durch den Pfeil p gegeben. Um die Axe dieses oder des parallel durch O gezogenen Pfeiles p' wirkt der Deviationswiderstand, welcher dem Sinne der Impulsänderung entgegengesetzt ist, von p oder p' aus gesehen entgegen dem Sinne des Uhrzeigers. Er sucht also die Kreiselspitze während der ganzen ersten Phase der Bewegung in unserer Figur nach hinten hin abzulenken. Ebenso erkennt man, dafs während der zweiten Bewegungsphase, d. h. während die Kreiselspitze von B nach A pendelt, ein Deviationswiderstand auftritt, welcher die Kreiselspitze in der Figur nach vorne überzudrehen strebt. Allgemeingültig können wir sagen: *die Kreiselspitze sucht infolge des Deviationswiderstandes von ihrer Fortschreitungsrichtung aus gerechnet nach rechts hin abzuweichen;* es würde also im Sinne der Bewegung gesprochen die rechte Wand der Rinne einen gewissen Druck auszuhalten haben. Die Gröfse dieses Druckes, welche dem nicht kompensierten Teil der Änderungsgeschwindigkeit des Impulses gleich ist, wird, wie gleichfalls aus unserer letzten Figur hervorgeht, der Gröfse des Eigenimpulses direkt proportional.

Lassen wir nun die Figurenaxe frei, indem wir die Führung der Kreiselspitze aufheben. Der Erfolg ist dieser: *Die Kreiselspitze wird dem Deviationswiderstande entsprechend von der Bahnkurve aus nach rechts hin ausweichen.* Die gerade Linie, durch welche wir die Pendelschwingung in Fig. 24 darstellten, wird bei Benutzung der früheren graphischen Darstellungsweise in einen Bogen übergehen, welcher nach derjenigen Seite hin geöffnet ist, nach welcher die ablenkende Kraft des Deviationswiderstandes wirkt. Da wir den Eigenimpuls einstweilen verhältnismäfsig klein voraussetzten, wird auch die Abweichung unseres Bogens von der geraden Linie verhältnismäfsig gering sein (vgl. Fig. 25).

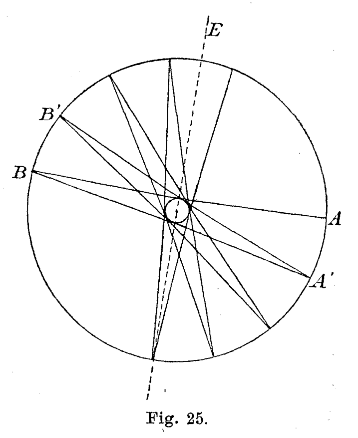


Fig. 25.

Es ist leicht zu sehen, dafs die Kreiselspitze von ihrer Anfangslage A aus im Raume und daher auch in unserem stereographischen Bilde senkrecht gegen den Äquator fortschreiten mufs. Wir brauchen uns zu dem Zwecke nur die ungefähre Lage des Impulsvektors klar zu machen. Anfangs liegt der Impulsvektor, weil wir $n = 0$ voraussetzten, horizontal. Die folgenden Lagen unseres Vektors ergeben sich aus dieser Anfangslage, indem wir successive den Zusatzimpuls der Schwere geometrisch hinzufügen. Die Axe dieses Zusatzimpulses liegt aber gleichfalls beständig horizontal. Also mufs der

Hosted by Google

Impulsvektor während der ganzen Dauer der Bewegung eine horizontale Axe haben (im Gegensatz zu der in Fig. 24a dargestellten erzwungenen Bewegung, wo sich der Impulsvektor allmählich aufrichtete). In dieser Betrachtung liegt, nebenbei bemerkt, bereits der Beweis unserer obigen Behauptung, dafs die Impulskomponente n ihren anfänglichen Wert $n = 0$ dauernd beibehält, worauf wir im nächsten Paragraphen unter allgemeineren Voraussetzungen zurückkommen werden. Gleichzeitig mit der Impulsaxe liegt aber bei unserem Kugelkreisel auch die Rotationsaxe horizontal. Da nun die Kreiselspitze in jedem Momente senkrecht gegen die Richtung der Rotationsaxe fortschreitet, so wird sich diese von ihrer auf dem Äquator angenommenen Anfangslage aus in vertikaler Richtung fortbewegen müssen. Die Bahnkurve der Kreiselspitze steht also zu Beginn der Bewegung senkrecht auf dem Äquator, wie behauptet wurde. Übrigens ist die Fortschreitungsgeschwindigkeit im ersten Momente Null, weil die Rotationsaxe anfangs durch die Kreiselspitze selbst hindurchgeht.

Um den Gesamtverlauf unserer Bahnkurve zu überblicken, haben wir uns nur noch die Symmetrieverhältnisse derselben zu überlegen. Fassen wir zu dem Zwecke denjenigen Moment ins Auge, wo die Kreiselspitze auf der Kugel ihre höchste Lage (H) erreicht hat. Nach unserem Kontinuitätsprinzipe wird dieser höchste Punkt von dem höchsten Punkte, den die Kreiselspitze bei der Pendelbewegung erreicht, dem Nordpole, nur wenig abweichen. Das stereographische Bild derselben wird also nicht weit vom Mittelpunkte der Figur entfernt sein. Durch O und H legen wir die Vertikalebene E hindurch, deren Durchschnitt mit der Äquatorebene uns die Lage des instantanen Impulsvektors angiebt. Darauf argumentieren wir ebenso wie oben bei der einfachen Pendelbewegung:

Wenn wir in dem betrachteten Momente den Sinn des Impulsvektors umkehren würden, so würde die Kreiselspitze ihre bisherige Bahn AH in umgekehrter Richtung durchlaufen und in A mit der Geschwindigkeit Null ankommen. Gleichzeitig berücksichtigen wir, dafs in je zwei hinsichtlich der Ebene E symmetrischen Lagen des Kreisels das Drehmoment der Schwere dasselbe ist. Hieraus ist zu schliefsen, dafs die Kreiselspitze bei Fortsetzung der ursprünglichen Bewegungsrichtung von H aus den zu AH hinsichtlich der Vertikalebene E symmetrischen Bogen HB beschreiben wird und dafs sie in B mit der Geschwindigkeit 0 ankommt. Der Bogen AB unserer Bahnkurve besteht daher aus zwei spiegelbildlich gleichen Hälften.

In B angekommen befindet sich die Kreiselspitze genau unter den gleichen Bedingungen wie in A. Infolgedessen mufs der weitere Ver-

Hosted by Google

lauf der Bahnkurve derselbe sein, wie zu Anfang der Bewegung. Es setzt sich also im Punkte B ein neuer Bogen BA' an, welcher seinerseits aus zwei symmetrischen Hälften besteht und welcher dem Bogen AB kongruent ist. Aus letzterem kann er durch eine Drehung um die Vertikale erzeugt werden. Bei B entsteht auf solche Weise ersichtlich eine Spitze. Für den Punkt A' gilt darauf dieselbe Betrachtung, wie für B. Auch in A' bildet die Bahnkurve eine Spitze und setzt sich von hier aus mit einem dem Bogen AB kongruenten Bogen $A'B'$ fort. Alle diese Bögen AB, BA', $A'B'$ ... werden wegen ihrer kongruenten Gestalt und ähnlichen Lage je in ihrem bezüglichen höchsten Punkte H einen gewissen Parallelkreis auf der Kugel berühren, welcher in unserem Falle den Nordpol enge umschliefst. Zusammenfassend können wir daraufhin den Verlauf unserer Bahnkurve folgendermafsen beschreiben:

Die Bahnkurve der Kreiselspitze stellt in unserem Falle eine Zickzackkurve vor, welche um die Vertikale entgegen dem Sinne des Uhrzeigers herumläuft, ohne sich im allgemeinen zu schliefsen; sie besteht aus einer Serie kongruenter Bögen oder, wenn wir wollen, aus einer Serie von Halbbögen, welche unter einander abwechselnd symmetrisch gleich und kongruent sind. Die Kurve ist ganz innerhalb zweier Parallelkreise enthalten, nämlich in unserem Falle zwischen dem Äquator und einem Parallelkreise in der Nähe des Nordpoles. Letzteren Kreis berührt unsere Kurve, wo sie ihn trifft; auf ersterem sitzt sie mit Spitzen auf.

Im Anschlufs hieran noch ein Wort über die Vorzüge der von uns gewählten Projektionsmethode. Hätten wir statt der stereographischen die orthographische Projektion benutzt, so würden, wie die in orthographischer Projektion hergestellte Fig. 25a zeigt, statt der Spitzen scheinbar regulär verlaufende Kurvenbögen auftreten. In der That bietet jede in eine Spitze auslaufende Raumkurve, aus der Tangentenrichtung der Spitze betrachtet, einen Anblick dar, der dem Auge das Vorhandensein einer Singularität in keiner Weise verrät. Statt der im Original vorhandenen Spitze haben wir im Bilde nur mehr eine sog. „maskierte Singularität“.

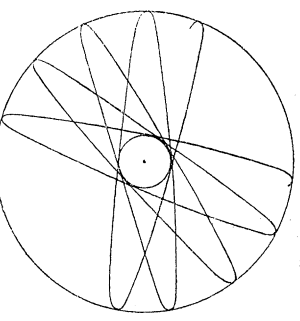


Fig. 25a.

Hiernach ist klar, dafs wir bei Benutzung der orthographischen Projektion das Charakteristische der Bahnkurve verwischen würden. Wir werden daher auch die folgenden Figuren stets in stereographischer Projektion herstellen.

Hosted by Google

Wir wollen nun, wie bereits in Aussicht genommen, die Gröſse des Eigenimpulses successive wachsen lassen und gleichzeitig den seitlichen Anstoſs wie bisher gleich Null nehmen. Machen wir wiederum das orientierende Experiment von pag. 204, indem wir die Kreiselspitze auf der Bahn der Pendelschwingung entlang führen, so werden wir hierbei einen stärkeren Deviationswiderstand wie früher konstatieren, welcher die Figurenaxe von der Bewegungsrichtung nach rechts abzulenken strebt. In der That ergab sich aus der Figur 24a, daſs dieser Widerstand der Gröſse des Eigenimpulses proportional ist. Gehen wir daher von der erzwungenen Pendelbewegung zu der freien Kreiselbewegung über, so wird die Krümmung der einzelnen Bögen, aus denen sich die Bahnkurve zusammensetzt, um so gröſser, ihre Spannweite um so geringer werden, je gröſser wir den Wert des Eigenimpulses N bemessen. Gleichzeitig wird sich der höchste Punkt des einzelnen Bogens von dem Nordpole successive entfernen; der begrenzende Parallelkreis, welcher die sämtlichen höchsten Punkte der Bögen enthält, muſs sich also mit wachsendem N erweitern.

Die folgenden Figuren bringen diese Verhältnisse in drei Schritten zum Ausdrucke. In Figur 26 ist der Eigenimpuls circa dreimal, in

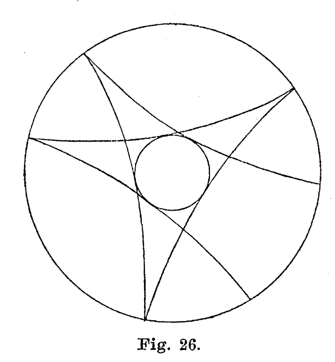


Fig. 26.

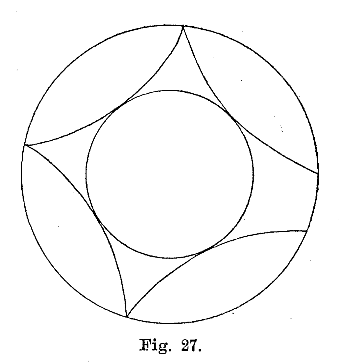


Fig. 27.

Figur 27 neunmal so groſs gewählt, wie in Figur 25. Die Figur 28 stellt den Grenzfall eines sehr groſsen N dar. Während die Figuren 26 und 27 den Zusammenhang mit der Figur der Pendelbewegung noch deutlich erkennen lassen, zeigt Figur 28 eine Bahnkurve, die von einem kontinuierlich durchlaufenen Kreise nur noch sozusagen mikroskopisch verschieden ist. Sie hat mit der Figur der Pendelbewegung die denkbar geringste Ähnlichkeit, eher scheint sie bei ungenauem Hinsehen mit dem zweiten der vorangestellten Spezialfälle, der regulären Präcession, übereinzustimmen. Diese Übereinstimmung betrifft aber, wie wir betonen müssen, nur den *Ort* der Kreiselspitze, nicht

Hosted by Google

ihre *Geschwindigkeit und Geschwindigkeitsrichtung.* Während bei der regulären Präcession die Fortschreitungsgeschwindigkeit der Kreiselspitze längs des ganzen Kreises konstant ist, variiert sie in unserem Falle innerhalb sehr kurzer Zeitintervalle fortgesetzt zwischen dem Werte Null, der auf dem Äquator statthat, und einem maximalen Werte, der im Berührungspunkt mit dem zweiten begrenzenden Parallelkreise erreicht wird. Wir werden diese höchst bemerkenswerte Bewegungsform passend eine *pseudoreguläre Präcession* nennen können.

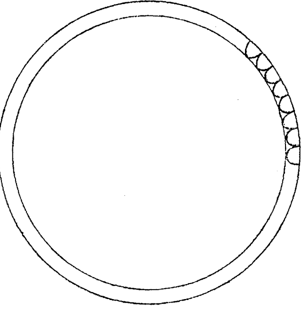


Fig. 28.

Im Experimente ist dieser letzte Fall sogar die Regel, da die Vorrichtungen zum Aufziehen des Kreisels meist einen gegenüber der Schwerewirkung sehr starken Eigenimpuls erzeugen. Untersucht man daher die Kreiselbewegung nur experimentell, so kommt man leicht zu der paradoxen Auffassung, daſs die Kreiselspitze sich von Anfang an senkrecht gegen die Richtung der wirkenden Kraft, der Gravitation, bewegt, einer Auffassung, welche den Prinzipien der Mechanik natürlich direkt zuwiderläuft, welche aber nichtsdestoweniger in der Litteratur häufig vertreten wird.*) Wir betonen deshalb ausdrücklich: *Unter den bisher vorausgesetzten Anfangsbedingungen* ($n = 0$) *ist unsere Bahnkurve allemal eine Spitzenkurve; eine wirkliche reguläre Präcession ist durchaus unmöglich.*

Für die Anstellung der Experimente entnehmen wir unserer letzten Figur noch die Regel, daſs wir den Eigenimpuls des Kreisels möglichst gering wählen müssen, wenn wir überhaupt eine im Einzelnen kontrollierbare Bahnkurve beobachten wollen; es empfiehlt sich daher, den Kreisel statt durch die Schnur mit der Hand in Rotation zu versetzen, wobei die Stärke des Impulses bequem reguliert werden kann. —

Während wir bisher den Eigenimpuls des Kreisels schrittweise wachsen lieſsen, den seitlichen Anstoſs aber beständig gleich Null annahmen, werden wir jetzt umgekehrt den seitlichen Anstoſs variieren und den Eigenimpuls festhalten. Dabei entwickelt sich aus jeder der bisherigen eine ganze Serie neuer Figuren.

So entsteht z. B. aus der gewöhnlichen Pendelbewegung in Fig. 24 durch Hinzufügung eines seitlichen Anstoſses jedesmal ein Fall der *Bewegung des sog. sphärischen Pendels*, bei welcher sich die Kreiselspitze ebenso verhält, wie ein schwerer Massenpunkt, welcher am Ende eines

*) Vgl. unsere Kritik der populären Kreisellitteratur im folgenden Kapitel (§ 3).

um O beweglichen, starren und masselosen Stabes befestigt ist und welchem in seiner Anfangslage ein horizontal gerichteter Anstofs erteilt wird. Wir brauchen uns bei dieser bekannten und leicht zu beobachtenden Bewegung hier nicht aufzuhalten. Wir erwähnen nur des Folgenden wegen, dafs sich die Rückkehrpunkte (Spitzen), welche in unserer Figur bei der gewöhnlichen Pendelbewegung am Äquator auftraten, in abgeflachte Bögen auflösen, welche den Äquator berühren und dafs sich die Spannweite der Bögen, welche ursprünglich zwei Rechte betrug, etwas erweitert. In der That mufs die Kreiselspitze, da sie in ihrer Anfangslage und ebenso in jeder folgenden Lage, wo sie den Äquator erreicht, dem seitlichen Anstofse n ausgesetzt ist, momentan in Richtung des Äquators fortschreiten und zwar je nach dem Vorzeichen von n, von der Vertikalen aus gesehen, im Sinne des Uhrzeigers oder im entgegengesetzten Sinne.

Gehen wir andrerseits von der pseudoregulären Präcession in Fig. 28 aus, so entsteht aus dieser durch Hinzufügung irgend eines seitlichen Anstofses eine Bewegung, welche, im Groben betrachtet, von der früheren nicht sehr verschieden ist und welche (in erweitertem Sinne) abermals als pseudoreguläre Präcession bezeichnet werden kann. Hierbei werden sich unsere mikroskopischen Spitzenbögen in kleine Schleifen bez. in abgeflachte Bögen auflösen, je nachdem wir den anfänglichen horizontalen Anstofs im Sinne des Uhrzeigers oder im entgegengesetzten Sinne um die Vertikale wirken lassen. Die Beobachtung giebt von dieser Modifikation der Bahnkurve natürlich keine deutliche Rechenschaft.

Wesentlich neue Typen werden sich dagegen aus den Figuren 25—27 ergeben. Speziell wollen wir den Fall eines verhältnismäfsig geringen Eigenimpulses näher betrachten, also diejenige Figurenserie entwickeln, die aus 25 durch Variation von n entsteht. Zunächst lassen wir n von dem Werte Null in Fig. 25 nach dem Negativen abnehmen, erteilen also der Kreiselspitze in der Anfangslage einen Anstofs, der sie entgegen dem Sinne des Uhrzeigers umzutreiben sucht.

Wir erinnern daran, dafs sich bei einem gewissen, oben berechneten negativen Werte $n = \frac{AP}{N}$ die reguläre Präcession einstellen mufs. Die Bahnkurve der Kreiselspitze wird in diesem Falle einfach der entgegen dem Uhrzeigersinne durchlaufene Äquator (vgl. unten Fig. 31). Der Vergleich der Figuren 25 und 31 wird uns nun einen Anhalt liefern, um die Gestalt der Bahnkurve für die zwischenliegenden Werte von $n \left[0 > n > \frac{AP}{N}\right]$ beurteilen zu können. Wir dürfen nämlich auf Grund unseres Kontinuitätsprinzipes vermuten, dafs diese Bahnkurven

Hosted by Google

sich stetig zwischen die Figuren 25 und 31 einordnen müssen. Auf dasselbe Prinzip bez. auf unsere früheren Überlegungen gestützt, werden wir ferner voraussetzen, daſs die allgemeinen Symmetrieverhältnisse der Bahnkurve 25, die Kongruenz der Teilbögen u. s. w., bei Hinzufügung eines seitlichen Anstoſses erhalten bleiben.

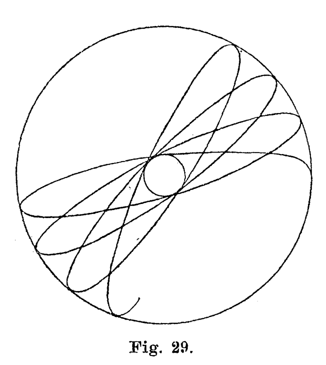


Fig. 29.

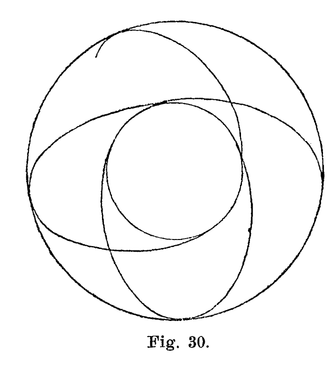


Fig. 30.

In Figur 25 waren nun die einzelnen kongruenten Kurvenbögen zwischen dem Äquator und einem kleineren, in der Nähe des Nordpols befindlichen Parallelkreise enthalten; in Figur 31, können wir sagen, ist dieser zweite Parallelkreis mit dem Äquator zusammengefallen, da die Bahnkurve selbst in diesen übergegangen ist. Wir schlieſsen hieraus, daſs für zwischenliegende Werte von n jener zweite begrenzende Parallelkreis stetig anwachsen wird. Infolgedessen werden sich die Teilbögen der Bahnkurve nach dem Äquator hin ausbauchen und gleichzeitig bei abnehmendem n successive in die Länge strecken müssen. Überdies ist klar, daſs, ebenso wie beim Übergange vom gewöhnlichen zum sphärischen Pendel, die Spitzen der Figur 25 sich in abgeflachte Bögen auflösen werden, da ja, überall wo die Kreiselspitze den Äquator erreicht, der tangential zum Äquator gerichtete seitliche Anstoſs n wirksam ist.

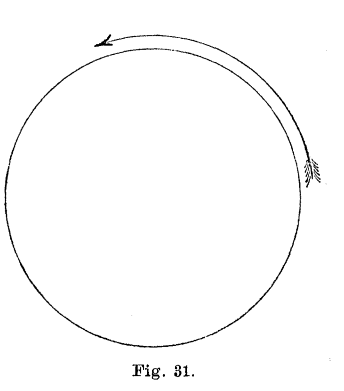


Fig. 31.

Wir zeichnen daraufhin die drei Figuren 29, 30, 31, von denen die erste einem kleinen Werte des seitlichen Anstoſses entspricht, so daſs die Kontinuität mit Figur 25 augenfällig ist, (in der Figur wurde speziell $n = -N$ gewählt), die zweite einem gröſseren Werte von n (und zwar in der Figur einem 5-mal so groſsen Werte wie im vorhergehenden Falle); die dritte Figur ist der Spezialfall der langsamen regulären

Präcession $n = \frac{AP}{N}$; (unter den in der Zeichnung zu Grunde gelegten Verhältnissen tritt dieser Fall wieder für ein 5-mal so grofses n ein, wie der Fall der Figur 30).

Den Gesamtcharakter der Bahnkurven unter den vorliegenden Bedingungen eines konstanten N und eines von Null bis $\frac{AP}{N}$ abnehmenden Wertes von n können wir daraufhin folgendermafsen schildern:

Die Bahnkurve läuft fortgesetzt entgegen dem Sinne des Uhrzeigers um die Vertikale herum, ohne sich im allgemeinen zu schliefsen; sie besteht allemal aus einer Serie unter sich symmetrisch gleicher oder kongruenter Halbbögen, deren Spannweite bei abnehmendem n successive wächst und die sich mehr und mehr dem Äquator anschmiegen. Die Bahnkurve ist ganz innerhalb zweier Parallelkreise enthalten, welche sie überall, wo sie sie trifft, berührt, nämlich des Äquators einerseits und eines mit abnehmendem n sich stetig vergröfsernden Parallelkreises andrerseits.

Wir gehen nun abermals zu Figur 25 zurück und lassen jetzt n unter Festhaltung von N im positiven Sinne wachsen; wir erteilen also der Kreiselspitze im Anfangszustande einen seitlichen Anstofs im Sinne des Uhrzeigers. Der Erfolg wird dabei gewissermafsen der umgekehrte sein, wie vorher. Während sich der zweite begrenzende Parallelkreis bei von Null aus abnehmendem n, wie wir sahen, erweiterte, wird er sich bei wachsendem n zunächst verengern; während die Spannweite des einzelnen Teilbogens früher zunahm, nimmt sie jetzt zunächst ab. Im übrigen bleibt der Gesamtcharakter der Bewegung ein ähnlicher wie in Figur 25; insbesondere mufs die Bahnkurve bei genügend kleinem positiven n gleichfalls im Ganzen betrachtet entgegen dem Sinne des Uhrzeigers um die Vertikale herumlaufen. Andrerseits wird sich aber die Kreiselspitze in der Anfangslage und ebenso in jedem späteren Momente, wo sie den Äquator erreicht, wegen des positiven Vorzeichens von n in der Richtung des Äquators und zwar im Sinne des Uhrzeigers bewegen. Wir schliefsen hieraus, dafs es auf jedem Teilbogen Punkte geben mufs, wo die Kreiselspitze, in radialer Richtung fortschreitend, ihren Umlaufungssinn der Vertikalen ändert und erkennen so die Notwendigkeit des Auftretens von Schleifen. Die Spitzen der Figur 25, welche in Figur 29 in abgeflachte Bögen übergingen, lösen sich also jetzt in Schleifen auf, wie dieses ja in der Geometrie eine häufige Erscheinung ist. Alle diese Bemerkungen werden durch die folgende Figur 32 bestätigt, welche einem sehr kleinen positiven Werte von n entspricht (wir haben $n = 0{,}4\,N$ gewählt).

Hosted by Google

Wenn wir n weiter wachsen lassen, kommen wir bald zu einem Werte, wo sich der innere Parallelkreis auf den Nordpol der Einheitskugel zusammengezogen hat (vgl. Fig. 33). Nebenbei bemerkt entspricht dieser Fall, wie wir später sehen werden, dem Werte $n = N$. Die Punkte, in denen sich bei der vorigen Figur der Umlaufungssinn der Vertikalen änderte, sind jetzt in den Nordpol der Kugel zusammengerückt.

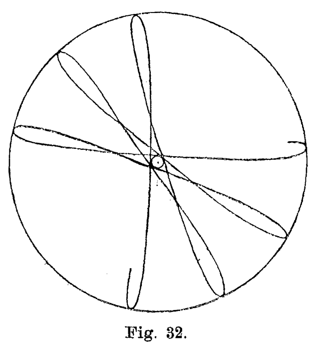


Fig. 32.

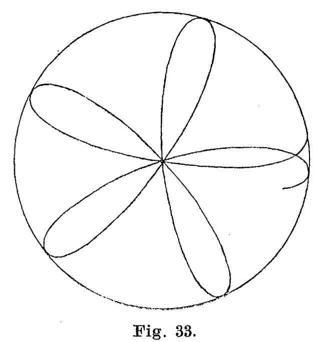


Fig. 33.

Um die Gestaltung der Bahnkurven bei fortgesetzt wachsendem n zu überblicken, ziehen wir endlich den Grenzfall $n = \infty$ heran, bei welchem nach pag. 202 die Bewegung wieder eine reguläre Präcession wird. Während sich also im Falle $n = N$ der innere Parallelkreis auf einen Punkt reduzierte, fällt er im Falle $n = \infty$ mit dem äufsern Begrenzungskreise zusammen. Wir werden abermals auf Grund unseres Kontinuitätsprinzipes vermuten, dafs der fragliche Parallelkreis bei wachsenden Werten von n $(N < n < \infty)$ sich stetig erweitern wird. Während er aber vorher von der Bahnkurve von aufsen berührt wurde, wird er jetzt von dieser umfafst. Die Kurve läuft jetzt durchweg im Sinne des Uhrzeigers und zwar bei wachsendem n mit wachsender Geschwindigkeit um die Vertikale; sie wird durch den sich erweiternden inneren Parallelkreis immer mehr an den Äquator herangedrängt; die Spannweite der kongruenten Bögen, aus denen sie sich zusammensetzt, wird gröfser und gröfser. Ein Beispiel für diese Gestaltung der Bahnkurve liefert Figur 34, in welcher nebenbei bemerkt $n = 5\,N$ genommen ist. Der Grenzfall $n = \infty$, die schnelle reguläre Präcession, möge schematisch durch die Figur 35 angedeutet werden. Dem doppelten

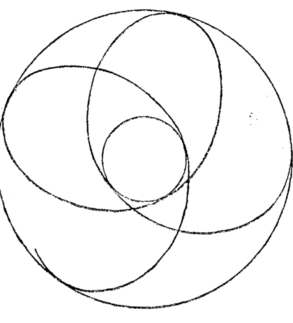


Fig. 34.

Sinne des Durchlaufungspfeiles entsprechend können wir die letzte Figur ebensowohl auffassen als Grenzfall der Bahnkurve bei unendlich wachsendem positiven, wie bei unendlich abnehmendem negativen n.

Wollen wir das Verhalten der Bahnkurven bei wachsendem positiven n zusammenfassend schildern, so können wir etwa folgendermaſsen sagen:

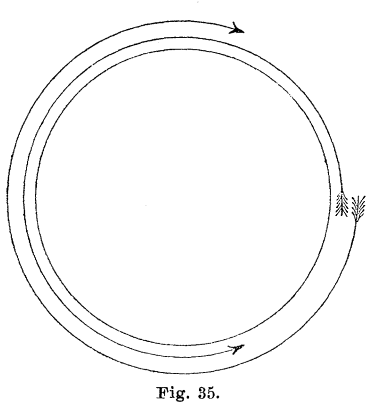


Fig. 35.

Bei positivem n verläuft die Bahnkurve in der Nähe des Äquators allemal im Sinne des Uhrzeigers, kehrt aber bei nicht zu groſsen Werten von n innerhalb jedes der kongruenten Teilbögen, aus denen sie sich zusammensetzt, zweimal ihren Umlaufungssinn um. Charakteristisch für diese Bahnkurven ist das Auftreten von Schleifen. Der innere Begrenzungskreis wird anfangs von der Bahnkurve ausgeschlossen, nachdem aber der höchste Punkt der Kugel einmal überschritten ist, von auſsen umfaſst. Die Spannweite der einzelnen Teilbögen nimmt gleichzeitig von da ab immer mehr zu und wird im Grenzfalle $n = \infty$ unendlich groſs.

Es erübrigt nur noch den Übergang zu suchen von der langsamen Präcession $n = \frac{AP}{N}$ in Figur 31 zu der schnellen $n = \pm \infty$ in Figur 35. Wir sahen, daſs sich der bewegliche Parallelkreis mit abnehmendem $n < \frac{AP}{N}$ dem Äquator successive nähert, um im Falle der regulären Präcession mit diesem zusammenzufallen. Bei weiter abnehmendem n wird er zunächst seine Bewegungsrichtung beibehalten, also sich von dem Äquator wieder entfernen und auf die südliche Hälfte der Einheitskugel bez. im stereographischen Bilde in das Äuſsere des Einheitskreises übergehen. Dementsprechend würde im Bilde fortan der Äquator der innere, der bewegliche Parallelkreis der äuſsere Begrenzungskreis werden. Indessen hält die genannte Bewegungstendenz nicht lange vor; es giebt nämlich für unseren beweglichen Parallelkreis eine tiefste (bez. im Bilde eine äuſserste) Lage. Nachdem diese für ein gewisses n erreicht ist, strebt der Parallelkreis bei weiter abnehmendem n wieder dem Äquator zu, mit dem er ja im Falle $n = -\infty$ zusammenfallen muſs. Aber selbst in der genannten extremen Lage liegt unser Parallelkreis unter den in unseren Figuren vorausgesetzten Verhältnissen dem Äquator so nahe, daſs er mit dem Auge überhaupt nicht von jenem zu unterscheiden sein würde. Dementsprechend wird auch die Bahn-

Hosted by Google

kurve der Kreiselspitze dem Äquator dauernd außerordentlich nahe bleiben, so daß wir auf ihre graphische Wiedergabe verzichten müssen. Im stereographischen Bilde würde sie den Äquator in nahezu kreisförmigen Windungen umschließen, welche den großen negativen Werten von n entsprechend entgegen dem Sinne des Uhrzeigers mit großer Geschwindigkeit durchlaufen werden.

Der Kreis der Möglichkeiten, welche sich bei festgehaltenem N und variabelm n darbieten, hat sich hiermit geschlossen.

Wir könnten nun, ähnlich wie wir bisher an die Figur 25 anknüpften, aus den Figuren 26 und 27 durch Hinzufügung eines seitlichen Anstoßes entsprechende Figurenserien entwickeln. Indessen müssen wir uns damit begnügen, später (vgl. § 7) auf die hierbei auftretenden Abweichungen von der vorhergehenden Serie hinzuweisen.

Zum Schlusse wollen wir in einem Schema, in welchem n als Abscisse, N als Ordinate aufgetragen wird, die vorstehend verzeichneten Figuren durch Eintragung ihrer Nummer lokalisieren.

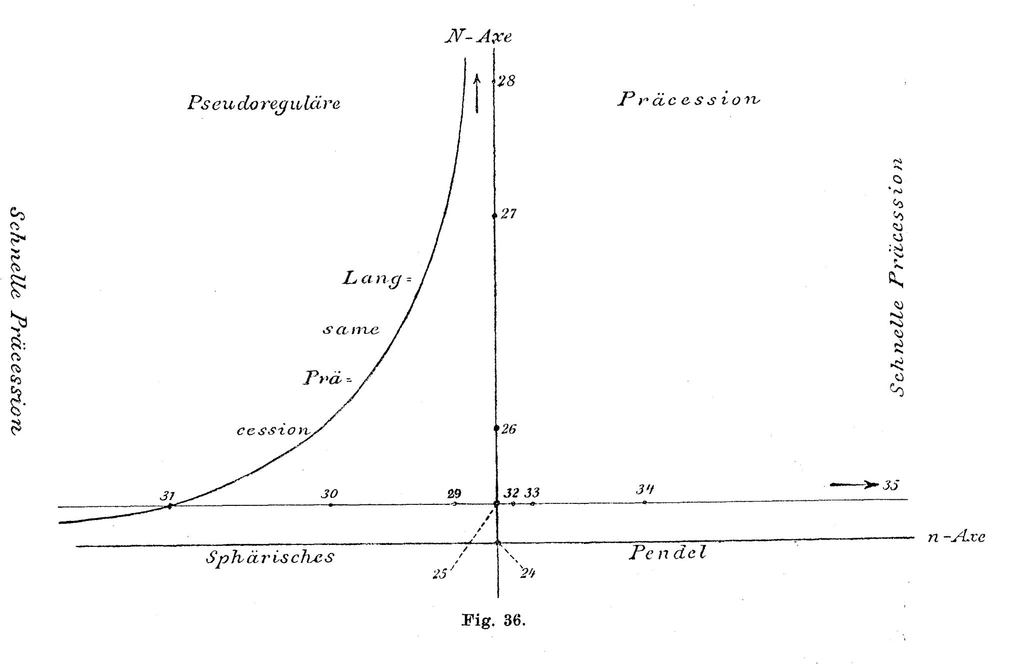


Fig. 36.

Die Ordinatenaxe unseres Schemas enthält die Figuren 24 bis 28; die Abscissenaxe entspricht den sämtlichen Fällen der gewöhnlichen oder sphärischen Pendelbewegung. Die Figuren 29 bis 35 liegen auf einer der Abscissenaxe parallelen und wenig von ihr entfernten Geraden. Gehen wir parallel der Ordinatenaxe ins Unendliche, so kommen wir

Hosted by Google

allemal in das Gebiet der pseudoregulären Präcession; schreiten wir in der Richtung der Abscissenaxe ins Unendliche fort, so finden wir den Fall der schnellen regulären Präcession vor. Die langsame reguläre Präcession bestimmt, wie aus der Formel $nN = PA$ hervorgeht, eine gleichseitige Hyperbel von der eingezeichneten Lage. Die zweifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit, welche durch die Gesamtheit aller Bahnkurven bei horizontaler Anfangslage der Figurenaxe und bei positivem Betrage des Eigenimpulses gebildet wird, findet so in unserem Schema eine anschauliche Darstellung.

§ 3. Quantitative Behandlung der allgemeinen Bewegung des schweren symmetrischen Kreisels. Ausführung der erforderlichen sechs Integrationen.

Wir gehen nun von der angenäherten qualitativen Diskussion zu einer genauen quantitativen Behandlung über, wobei wir die Beschränkung auf den Kugelkreisel zunächst fallen lassen und einen beliebigen symmetrischen Kreisel von den Trägheitsmomenten A und C betrachten. Es handelt sich hierbei in letzter Linie darum, das System von Differentialgleichungen, welches die Bewegung des Kreisels reguliert, zu integrieren.

Zunächst stellen wir einige Impulsbetrachtungen von geometrischem Charakter an, welche die Ausführung der gedachten Integrationen teilweise zu ersetzen vermögen. Dabei stützen wir uns wesentlich auf den Fundamentalsatz IIa von pag. 115, nach welchem die Änderungsgeschwindigkeit des Impulses im Raume gleich der von den äufseren Kräften herrührenden Drehkraft, d. h. in unserem Falle gleich dem Drehmoment der Schwerkraft ist. Wir suchen vor allem, ähnlich wie pag. 123 beim kräftefreien Kreisel, Näheres über die Gestalt der beiden „Impulskurven“ auszusagen, d. h. derjenigen Kurven, welche der Endpunkt des Impulsvektors relativ gegen den Raum bez. relativ gegen den Körper beschreibt.

Erstens bemerken wir, dafs das Drehmoment der Schwere, welches ja seiner Axe nach in die Knotenlinie fällt, beständig senkrecht auf der Vertikalen steht. Nach unserem Impulssatze schreitet also auch der Endpunkt des Impulses im Raume beständig senkrecht gegen die Vertikale vorwärts. Wir sehen hieraus:

Der Endpunkt des Impulses bewegt sich relativ gegen den Raum in einer horizontalen Ebene; unsere erste Impulskurve ist also eine ebene Kurve; die Projektion des Impulses auf die Vertikale, d. h. die früher als „seitlicher Anstofs“ bezeichnete Gröfse, hat eine unveränderliche Länge.

Hosted by Google

Nennen wir die Komponenten des Impulses im xyz-System (die Koordinaten seines Endpunktes), wie pag. 200 verabredet, l, m, n, so haben wir hiernach:

$$n = \text{const.} \tag{1}$$

Dieses Resultat wurde schon im vorigen Paragraphen erwähnt und in einem speziellen Falle, ähnlich wie soeben geschehen, begründet.

Zweitens fassen wir die Kurve ins Auge, welche der Endpunkt des Impulses relativ gegen den Kreisel beschreibt. Dabei werden wir statt von dem Impulssatze IIa, welcher die Anderungsgeschwindigkeit des Impulses im Raume bestimmt, von dem Impulssatze IIb von pag. 145 ausgehen, durch welchen die relativen Anderungen des Impulses gegen den Kreisel festgelegt wurden. Nach diesem letzten Satze ist die Änderungsgeschwindigkeit des Impulses relativ gegen den Kreisel nach Richtung und Gröfse gleich der von den äufseren Kräften herrührenden Drehkraft vermehrt um die sogenannte centrifugale Drehkraft. Letztere wurde l. c. gleich gefunden dem vektoriellen Produkt aus Impuls- und Rotationsvektor; ihre Axe steht mithin senkrecht auf diesen beiden Vektoren und also, da beim symmetrischen Kreisel diese beiden Vektoren mit der Figurenaxe in einer Ebene liegen, auch senkrecht auf der Figurenaxe. Da überdies auch die Drehkraft der Schwere auf der Figurenaxe senkrecht steht, so sehen wir, dafs der Impuls-Endpunkt im Kreisel beständig senkrecht gegen die Figurenaxe fortschreiten mufs. Wir haben also den Satz:

Der Endpunkt des Impulses bewegt sich relativ gegen den Kreisel in einer der Aquatorebene parallelen Ebene; auch unsere zweite Impulskurve ist eine ebene Kurve; die Projektion des Impulses auf die Figurenaxe, d. h. die oben als Eigenimpuls eingeführte Gröfse, hat eine unveränderliche Länge.

Bezeichnen wir die Impulskomponenten im XYZ-System, wie früher, mit L, M, N, so gilt hiernach die Gleichung:

$$N = \text{const.} \tag{2}$$

Wir haben damit ein ebenfalls schon im vorigen Paragraphen erwähntes Resultat allgemein abgeleitet.

Neben den Impulskurven können wir diejenigen Kurven betrachten, welche der Endpunkt des Rotationsvektors relativ gegen den Raum und gegen den Kreisel beschreibt, d. h. die *Herpolhodie-* und die *Polhodiekurve.* Von diesen zeigt aber nur die Polhodiekurve ein entsprechend einfaches Verhalten, wie die Impulskurven. *In der That liegt die Polhodiekurve in einer zur Figurenaxe senkrechten Ebene;* ihre Punkte haben von der Äquatorebene den festen Abstand.

$$r = \frac{N}{C}.$$

Hosted by Google

Versuchen wir dagegen den entsprechenden Übergang von unserer ersten Impulskurve zur Herpolhodiekurve zu machen, welcher, wie wir wissen, in einer Deformation nach den Axen X, Y, Z besteht, so kommen wir wegen der veränderlichen räumlichen Lage dieser Axen zu keinem so einfachen Resultat; *die Herpolhodiekurve ist* (von dem Falle des Kugelkreisels abgesehen) *keine ebene, sondern*, wie wir demnächst zeigen werden, *im allgemeinen eine sphärische Kurve.*

Diese Bemerkung kann abermals dazu dienen, die Vorzüge, welche in kinetischer Hinsicht der Impulsvektor vor dem Rotationsvektor darbietet, ins rechte Licht zu stellen. Es führt offenbar zu Unzuträglichkeiten, wenn man den kinematisch definierten Rotationsvektor auch in kinetischen Fragen voranstellen will. Vielmehr ist hier der Impulsvektor das einfachste, die Bewegung regulierende Element.

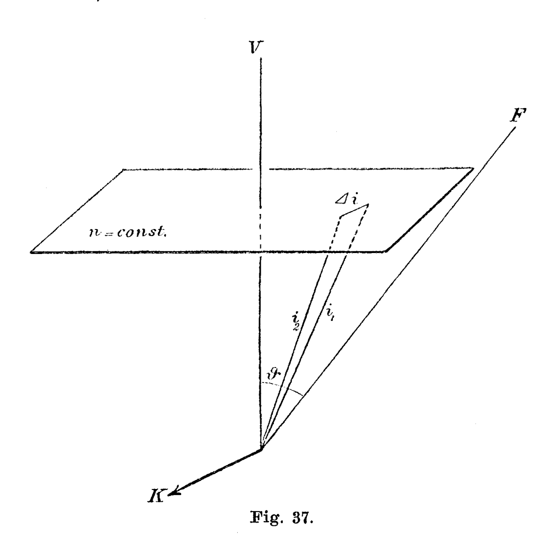


Fig. 37.

Während wir unsere bisherigen Schlüsse aus der Richtung der Impulsänderung gezogen haben, wollen wir nun auch ihre Gröſse betrachten. Wir werden so zu einer weiteren Eigenschaft der allgemeinen Kreiselbewegung geführt werden.

Es handle sich um zwei benachbarte Lagen i_1 und i_2 des Impulsvektors, welche dieser am Anfang und am Ende des Zeitintervalles Δt inne hat. Die Endpunkte von i_1 und i_2 geben eine Verbindungslinie Δi, welche nach unserem Impulssatze der Knotenlinie K parallel ist und bei hinreichend kleinem Δt die Länge hat

(a) $$|\Delta i| = P \sin\vartheta\,\Delta t.$$

Gleichzeitig wird nach dem Pythagoräischen Lehrsatz (vgl. die Figur)

(b) $$\begin{aligned} |i_2|^2 - |i_1|^2 &= |\Delta i|^2 - 2\,|i_1|\,|\Delta i| \cos(i_1, \Delta i) \\ &= |\Delta i|^2 + 2\,|i_1|\,|\Delta i| \cos(i_1, K). \end{aligned}$$

Nun bedeutet $|i_1| \cos(i_1, K)$ die Projektion des Impulsvektors auf die Knotenlinie, welche bis auf den Faktor A mit der Projektion des Drehungsvektors auf diese Gerade übereinstimmt. Eine Drehung um die Knotenlinie bringt aber in der Zeit Δt eine Änderung des

Hosted by Google

Winkels ϑ hervor von solchem Betrage, dafs $\Delta\vartheta : \Delta t$ gleich der Gröfse der genannten Drehung wird. Wir haben also

$$|i_1| \cos(i_1, K) = A \frac{\Delta\vartheta}{\Delta t}$$

und wegen (a)

(c) $$|\Delta i|\,|i_1| \cos(i_1, K) = AP \sin\vartheta\,\Delta\vartheta.$$

Gehen wir in Gleichung (b) zur Grenze $\Delta t = 0$ über, so fällt das Glied zweiter Ordnung $|\Delta i|^2$ fort und wir erhalten mit Rücksicht auf (c)

$$d(|i|^2) = 2AP \sin\vartheta\, d\vartheta = -d(2AP\cos\vartheta).$$

Mithin behält der Ausdruck

$$|i|^2 + 2AP\cos\vartheta$$

bei der Bewegung seine ursprüngliche Gröfse bei. Bezeichnen wir diese feste Gröfse mit k, so haben wir:

(3) $$|i|^2 + 2AP\cos\vartheta = k.$$

Diese Beziehung hätten wir ohne weiteres hinschreiben können, wenn wir uns aufser auf unsern allgemeinen Impulssatz auch auf den Satz der lebendigen Kraft berufen hätten, welcher ja im zweiten Kapitel seinerseits aus unserem Impulssatze gefolgert wurde. In der That sehen wir sofort, dafs die Gleichung (3) mit Rücksicht auf (2) in den Satz der lebendigen Kraft übergeht. Statt (3) können wir nämlich schreiben:

$$L^2 + M^2 + N^2 + 2AP\cos\vartheta = k.$$

Dividieren wir nun mit $2A$ und führen wir rechts eine neue Konstante h ein, welche mit der früheren durch die Formel:

(3a) $$h = \frac{k}{2A} + \frac{N^2}{2}\left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\right)$$

zusammenhängt, so entsteht

(3b) $$\frac{1}{2}\left(\frac{L^2 + M^2}{A} + \frac{N^2}{C}\right) + P\cos\vartheta = h.$$

Hier bedeutet der erste Term der linken Seite die kinetische Energie T des Kreisels

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{L^2 + M^2}{A} + \frac{N^2}{C}\right) = \frac{1}{2}\left(A(p^2 + q^2) + Cr^2\right);$$

der zweite Term stellt die potentielle Energie U im Falle der Schwerewirkung dar. Es ist nämlich nach der Definition von pag. 117, 118 $dU = -dA$, wo dA die von den äufseren Kräften an unserem System bei einer unendlich kleinen Verrückung geleistete Arbeit ist, d. h. in unserem Falle

$$dA = P\sin\vartheta\, d\vartheta.$$

Hosted by Google

Mithin folgt in der That

$$U = P \cos \vartheta,$$

so dafs wir statt (3 b) wieder schreiben können

$$(3') \qquad T + U = h.$$

Die vorstehende geometrische Überlegung müssen wir also auffassen als einen *neuen, auf den schweren symmetrischen Kreisel zugeschnittenen Beweis vom Satze der lebendigen Kraft.*

Wir wollen uns nun die analytische Bedeutung unserer bisherigen Resultate klar machen. Wir werden sehen, dafs wir in den Gleichungen (1), (2) und (3) drei erste Integrale der Differentialgleichungen des schweren symmetrischen Kreisels gefunden haben.

Zu diesem Zwecke werden wir diese Gleichungen neuerdings aus den Differentialgleichungen durch Integration ableiten. Am bequemsten legen wir die letzteren in der Form der allgemeinen Lagrangeschen Gleichungen, wie sie auf pag. 154 angegeben sind, zu Grunde. Hier haben wir für T den Ausdruck (6) von pag. 156 einzutragen

$$T = \frac{A}{2}(\sin^2 \vartheta \cdot \psi'^2 + \vartheta'^2) + \frac{C}{2}(\varphi' + \cos \vartheta \cdot \psi')^2,$$

aus welchem folgt:

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = \frac{\partial T}{\partial \psi} = 0.$$

Andrerseits ist die Arbeit, welche die Schwerkraft bei der unendlich kleinen Verrückung $d\varphi$, $d\psi$, $d\vartheta$ leistet, wie eben benutzt wurde:

$$dA = \Phi\, d\varphi + \Psi\, d\psi + \Theta\, d\vartheta = P \sin \vartheta\, d\vartheta.$$

Die Komponenten Φ, Ψ, Θ der äufseren Kraft in Richtung der Koordinaten φ, ψ, ϑ sind also

$$\Phi = \Psi = 0, \quad \Theta = P \sin \vartheta.$$

Daraufhin gehen die beiden ersten Lagrangeschen Gleichungen über in

$$\frac{d[\Phi]}{dt} = \frac{d[\Psi[}{dt} = 0;$$

wir haben also für die ganze Dauer der Bewegung

$$[\Phi] = \text{const}, \quad [\Psi] = \text{const}.$$

Nun sind aber nach pag. 109 die Impulskomponenten $[\Phi]$ und $[\Psi]$ nichts anderes als die senkrechten Projektionen des Impulsvektors auf die Figurenaxe und die Vertikale, also bez. gleich N und n. Unsere vorstehenden Gleichungen sind also mit (1) und (2) identisch. Die festen Werte unserer beiden Impulskomponenten werden wir daraufhin als zwei erste Integrationskonstanten bezeichnen können.

Hosted by Google

Natürlich können wir dieselben Integrale auch aus den Eulerschen Gleichungen von pag. 141, 142 ableiten. Hier haben wir $A = B$ zu setzen und für $\mathsf{\Lambda}$, M, N bez. die Werte einzutragen:

$$\mathsf{\Lambda} = P \sin \vartheta \cos (K, X), \quad \mathsf{M} = P \sin \vartheta \cos (K, Y), \quad \mathsf{N} = P \sin \vartheta \cos (K, Z).$$

Dabei ist zunächst

$$\cos (K, Z) = 0,$$

weil die Knotenlinie auf der Figurenaxe senkrecht steht; da wir ferner (vgl. Fig. 3 auf pap. 18) den von der Knotenlinie aus gezählten Winkel, welchen dieser Halbstrahl mit der positiven X-Axe bildet, mit φ bezeichnen, so wird

$$\cos (K, X) = \cos \varphi, \qquad \cos (K, Y) = -\sin \varphi.$$

Es ergiebt sich also

$$\mathsf{\Lambda} = P \sin \vartheta \cos \varphi, \quad \mathsf{M} = -P \sin \vartheta \sin \varphi, \quad \mathsf{N} = 0.$$

Die dritte der Gleichungen (3″) von pag. 142 lautet daher einfach

$$C \frac{dr}{dt} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{dN}{dt} = 0,$$

so dafs sich wieder die Gleichung (2) ergiebt.

Die Ableitung von (1) aus den Eulerschen Gleichungen würde eine etwas längere Umrechnung erfordern, welche wir hier unterdrücken wollen.

Unsere Gleichung (3) schliefslich können wir nach der gewöhnlichen analytischen Beweismethode des Satzes von der lebendigen Kraft aus den Lagrangeschen oder Eulerschen Gleichungen finden, indem wir diese mit geeigneten Faktoren multiplizieren und addieren; hierbei tritt als dritte Integrationskonstante unsere obige Gröfse h, die Konstante der lebendigen Kraft, auf, welche unserer obigen Konstanten k äquivalent ist.

Aufser den drei Integralgleichungen (1) bis (3) verlangt die vollständige Integration unseres Problems die Aufstellung von drei weiteren Beziehungen zwischen den Lagenkoordinaten des Kreisels und der Zeit mit je einer willkürlichen Integrationskonstanten. Diese Beziehungen lassen sich nicht, wie unsere drei ersten Integrale, in elementarer Form angeben; dementsprechend dürfte es kaum gelingen, sie durch direkte geometrische Betrachtungen abzuleiten. Immerhin ist ihr analytischer Charakter sehr einfach; sie lassen sich nämlich durch blofse Quadraturen herstellen.

Wir müssen jetzt neben den Eulerschen die sog. kinematischen Gleichungen (9) von pag. 45 bez., was bequemer ist, neben den La-

Hosted by Google

grangeschen Gleichungen (1) von pag. 154 die Gleichungen (2) (s. ebendaselbst)

$$[\Phi] = \frac{\partial T}{\partial \varphi'}, \quad [\Psi] = \frac{\partial T}{\partial \psi'}, \quad [\Theta] = \frac{\partial T}{\partial \vartheta'},$$

berücksichtigen. In den beiden ersten dieser Gleichungen tragen wir links die konstanten Werte N und n ein; die rechten Seiten berechnen wir nach dem oben angegebenen Ausdrucke von T. Wir finden so

$$C(\varphi' + \cos\vartheta \cdot \psi') = N,$$
$$C\cos\vartheta \cdot \varphi' + (A\sin^2\vartheta + C\cos^2\vartheta)\,\psi' = n.$$

Durch Kombination dieser beiden Gleichungen ergiebt sich zunächst

$$(4) \qquad \psi' = \frac{n - N\cos\vartheta}{A\sin^2\vartheta};$$

sodann folgt aus der ersten Gleichung:

$$(5) \qquad \varphi' = N\left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\right) + \frac{N - n\cos\vartheta}{A\sin^2\vartheta}.$$

Die Integration nach t läfst sich in dieser Form natürlich noch nicht ausführen. Gehen wir aber mit den gefundenen Werten von φ' und ψ' in die Gleichung (3′) der lebendigen Kraft hinein, so ergiebt sich:

$$\frac{A}{2}\left\{\vartheta'^2 + \left(\frac{N\cos\vartheta - n}{A\sin\vartheta}\right)^2\right\} + \frac{C}{2}\left\{\frac{N^2}{C^2}\right\} + P\cos\vartheta = h.$$

Hier führen wir die wichtige Hülfsvariable

$$u = \cos\vartheta$$

ein; die vorstehende Gleichung schreibt sich dann, nachdem wir sie mit $2A\sin^2\vartheta$ multipliziert haben:

$$A^2u'^2 + (Nu - n)^2 + \frac{A}{C}N^2(1-u^2) + 2APu(1-u^2) = 2Ah(1-u^2).$$

Somit wird

$$(6) \qquad \frac{du}{dt} = \sqrt{U},$$

wo U eine Abkürzung für den folgenden etwas komplizierten Ausdruck bedeutet:

$$(7) \quad U = \frac{1}{A^2}\left[2Ah(1-u^2) - (Nu-n)^2 - \frac{A}{C}N^2(1-u^2) - 2APu(1-u^2)\right],$$

In U führen wir statt der Konstanten h unsere frühere Gröfse k ein; da nach Gleichung (3a)

$$2Ah - \frac{A}{C}N^2 = k - N^2$$

wird, so ergiebt sich:

$$(7') \qquad U = \frac{1}{A^2}\left[-(Nu - n)^2 + (k - N^2 - 2APu)(1 - u^2)\right]$$

oder, nach Potenzen von u geordnet:

$$(7'')\quad U = \frac{1}{A^2}\left[2APu^3 - ku^2 + 2(nN - AP)u + (k - N^2 - n^2)\right].$$

Da U lediglich von unserer Hülfsvariabeln u abhängt, läſst sich die Integration in (6) unmittelbar ausführen. Wir haben nur zu schreiben:

$$(6')\qquad dt = \frac{du}{\sqrt{U}}.$$

Tragen wir diesen Wert von dt in (4) und (5) ein, so gehen letztere Gleichungen über in

$$(4')\qquad d\psi = \frac{n - Nu}{A(1-u^2)}\,\frac{du}{\sqrt{U}}$$

und

$$(5')\qquad d\varphi = N\left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\right)dt + \frac{N - nu}{A(1-u^2)}\,\frac{du}{\sqrt{U}}.$$

Nunmehr führen wir die Quadraturen in (4′), (5′) und (6′) aus und bekommen:

$$(8)\qquad \begin{cases} t = \displaystyle\int\frac{du}{\sqrt{U}}, \\ \psi = \displaystyle\int\frac{n - Nu}{A(1-u^2)}\,\frac{du}{\sqrt{U}}, \\ \varphi = \displaystyle\int\frac{N - nu}{A(1-u^2)}\,\frac{du}{\sqrt{U}} + N\left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\right)t, \end{cases}$$

wobei U durch (7), (7′) oder (7″) definiert ist.

Die drei additiv hinzutretenden Integrationskonstanten haben wir nicht hinzugeschrieben, weil sie für den geometrischen Charakter der zugehörigen Bewegung belanglos sind. Diese Integrationskonstanten sind etwa die Werte t_0, ψ_0, φ_0, welche wir dem Werte von u an der unteren Grenze der Integrale zuordnen mögen. Sie können durch passende Wahl des Zeitpunktes, von dem aus wir t, sowie durch passende Bestimmung der Axen x und X, von denen aus wir ψ und φ messen, herausgeschafft werden. Immerhin konstatieren wir, daſs wir in den drei wesentlichen Konstanten n, N und k (oder h), sowie in den drei unwesentlichen Konstanten t_0, ψ_0 und φ_0 die erforderliche Anzahl von *sechs willkürlichen Gröſsen* bekommen haben, welche zu der allgemeinen Bewegung eines Systems von drei Freiheitsgraden gehören.

Daſs wir in solcher Weise durch bloſse Quadraturen zum Ziel gelangten, werden wir an dieser Stelle als einen Glücksfall ansehen, der übrigens nicht vereinzelt dasteht. In der That werden wir im letzten Kapitel eine umfassende Klasse wichtiger mechanischer Probleme,

Hosted by Google

die Bewegungen der sogenannten cyklischen Systeme, kennen lernen, welche sich genau so wie unser Kreiselproblem durch bloſse Quadraturen teilweise oder vollständig behandeln lassen. Der Kreisel wird dort als ein instruktives Beispiel zur Theorie der cyklischen Systeme erscheinen. Gleichzeitig wird die hier befolgte Integrationsmethode durch Vergleich mit den allgemeineren Problemen eine neue Beleuchtung erfahren.

In historischer Hinsicht bemerken wir schlieſslich, daſs man die Aufstellung der obigen Integralformeln Lagrange*) verdankt, der das Problem des schweren symmetrischen Kreisels zum erstenmale allgemein in Angriff genommen hat.

§ 4. **Allgemeine Periodicitätseigenschaften der Bewegung. Vorläufiges über das Verhalten der elliptischen Ingrale bei Umlaufung des Integrationssegmentes. Integraldarstellung der α, β, γ, δ.**

Die im vorigen Paragraphen aufgestellten Integrale für t, ψ und φ bezeichnet man, da sie die Quadratwurzel aus einem Ausdrucke dritten Grades unter dem Integralzeichen führen, als *elliptische Integrale*. Bekanntlich lassen sich solche Integrale im allgemeinen nicht durch elementare Funktionen ersetzen. Sie definieren vielmehr eine Klasse transcendenter Funktionen, welche von den Mathematikern seit 100 Jahren mit Vorliebe untersucht worden ist.

Es soll unsere nächste Aufgabe sein, aus der Form dieser Funktionen die allgemeinsten und augenfälligsten Eigenschaften der Bewegung des schweren Kreisels abzulesen. Insbesondere wollen wir auf analytischem Wege begründen, daſs die Kreiselspitze fortgesetzt zwischen zwei Parallelkreisen der Einheitskugel auf- und abschwankt und daſs ihre Bahnkurve aus lauter kongruenten oder symmetrisch gleichen Stücken besteht. Diese Thatsachen wurden bereits in den ersten Paragraphen dieses Kapitels auf mechanisch-geometrischem Wege dargethan. Abgesehen von der genaueren Begründung der früheren etwas unsicheren Schlüsse werden wir durch das Folgende die Möglichkeit erreichen, die Gestalt der Bahnkurven im einzelnen durch numerische Rechnung zu kontrollieren.

Wir haben dabei im Grunde dieselben Betrachtungen anzustellen, die sonst in der Theorie der elliptischen Funktionen entwickelt werden. Indem wir diese Betrachtungen an unser konkretes Beispiel anknüpfen, hoffen wir geradezu eine bequeme erste Einführung in diese Theorie zu geben, welche wir hier nicht als bekannt voraussetzen werden.

---

*) In der *Mécanique analytique sec. partie*, sect. IX, Nr. 35. Ges. W. Bd. XII.

Hosted by Google

Wir stellen uns fürs Erste durchaus auf den Standpunkt der älteren Autoren, etwa auf den Legendres, und betrachten nur reelle Werte der Integrationsvariabeln u, welche wir uns auf einer Geraden, der „u-Axe", repräsentieren werden. Wegen der geometrischen Bedeutung von u ($u = \cos\vartheta$) kommt von dieser Axe für die Mechanik direkt nur das Stück zwischen -1 und $+1$ in Betracht.

Auch dieses Stück wird bei den Kreiselbewegungen im allgemeinen nur teilweise von u bestrichen. Da nämlich das Inkrement von t sicher eine reelle Gröſse sein muſs, so darf u wegen der Beziehung

$$dt = \frac{du}{\sqrt{U}}$$

nur solche Werte annehmen, für welche $\sqrt{U}$ reell, also U positiv ist. Nun wird aber U in den Punkten $u = \pm 1$ im allgemeinen negativ und niemals positiv. Wir haben nämlich nach Gleichung (7′) des vorigen Paragraphen

$$\text{für} \quad u = +1 \cdot \cdot \cdot \cdot \; U = -\frac{1}{A^2}(N-n)^2,$$

$$\text{für} \quad u = -1 \cdot \cdot \cdot \cdot \; U = -\frac{1}{A^2}(N+n)^2,$$

d. h. $U < 0$, sofern nicht gerade $N = \pm n$ und also $U = 0$ ist. Daher erscheint die Variable u auf ein gewisses Intervall zwischen -1 und $+1$ eingeschränkt, in welchem U positiv ist. Ein solches Intervall muſs stets vorhanden sein; wäre es nämlich nicht vorhanden, so müſsten wir sagen, daſs die in U eingehenden Integrationskonstanten n, N und h im Sinne der Mechanik unzulässig gewählt sind, weil ihnen keine reelle Bewegung entspricht. Die Grenzen unseres Intervalles werden durch zwei Punkte gebildet, in denen U verschwindet. Es seien dieses die Punkte $u = e$ und $u = e'$.

Auſser diesen beiden Wurzeln besitzt die Gleichung $U = 0$ noch eine dritte Wurzel, welche notwendig reell ist und auſserhalb des Intervalles -1 bis $+1$ liegt. Wir bezeichnen sie mit e''*) und zeigen leicht, daſs je nachdem $P >$ oder < 0 ist, $e'' > +1$ oder < -1 wird. In der That nimmt U bei unendlich groſsem u das Vorzeichen des in u höchsten Gliedes, also nach Gleichung (7′) des vorigen Paragraphen das Vorzeichen von Pu^3 an. Dieses Vorzeichen ist im Falle $P > 0$ positiv für $u = +\infty$, im Falle $P < 0$ für $u = -\infty$; U wechselt also im ersteren Falle sein Vorzeichen zwischen $+\infty$ und $+1$, im

*) Weierstrass bezeichnet die drei Wurzeln des Ausdrucks dritten Grades unter dem Integralzeichen durchweg mit e_1, e_2, e_3. Wir haben die obige abweichende Bezeichnung gewählt, weil bei uns nicht die Weierstrassische Normierung des Integrales vorliegt.

Hosted by Google

letzteren zwischen $-\infty$ und -1. Die fragliche dritte Wurzel liegt also sicher auf unserer u-Axe und zwar im Falle $P > 0$ rechterhand von $u = +1$, im Falle $P < 0$ linkerhand von $u = -1$.

Wir müssen weiterhin zwischen den beiden Vorzeichen von $\sqrt{U}$ gut unterscheiden. Es ist deshalb bequem, statt der einfachen u-Axe eine *Doppelaxe* zu Grunde zu legen, oder, wie wir auch sagen können, die u-Axe *doppelt überdeckt* zu denken. Je zwei übereinanderliegende Punkte dieser Doppelaxe (vgl. Fig. 38) repräsentieren uns dann denselben Wert von u und U, aber entgegengesetzte Werte von $\sqrt{U}$. In den Verschwindungspunkten von U sind diese beiden entgegengesetzten Werte nicht verschieden. Dasselbe gilt von der Stelle $u = \pm\infty$, wo $\sqrt{U}$ die beiden funktionentheoretisch nicht verschiedenen Werte $\pm\infty$ annimmt. Wir bringen dieses in der Figur dadurch zum Ausdruck, dafs wir an diesen Stellen die beiden Überdeckungen der Axe in einen Punkt zusammenlaufen lassen. Die vier Punkte e, e', e'', ∞ bezeichnen wir auch, indem wir die übliche Terminologie der *Riemannschen Fläche* vorbereiten, als *Verzweigungspunkte*. Überhaupt entspricht die Mafsnahme der doppelten Überdeckung unserer u-Axe bereits dem von Riemann in die Funktionentheorie eingeführten Ideenkreise, dem wir aber erst im sechsten Kapitel näher treten können.

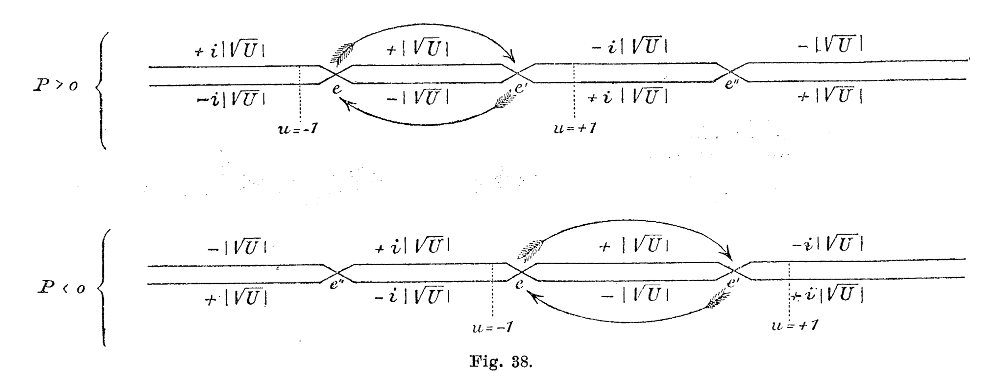


Fig. 38.

Wie wir im übrigen die positiven und negativen Werte der Quadratwurzel auf die beiden Überdeckungen verteilen, ist von dem hier eingenommenen Standpunkte der reellen Integrationsvariabeln aus bis zu einem gewissen Grade in unser Belieben gestellt. Natürlich werden wir die Wertefolge von $\sqrt{U}$ in den beiden Überdeckungen so einrichten, dafs sie eine stetige Folge wird, dafs also ein Vorzeichenwechsel nur in den Verzweigungspunkten ($U = 0$ oder $U = \infty$) eintritt. Dabei bleibt in jedem der Intervalle ee', $e'e''$ u. s. w. noch je eine Vorzeichenwahl willkürlich. Erst später, wenn wir von komplexen

Hosted by Google

Werten der Gröfse u sprechen werden, wird sich auch hierfür eine bestimmte Regel ergeben. Vorläufig haben wir die in den vorstehenden Figuren enthaltene Vorzeichenbestimmung als eine willkürliche Festsetzung anzusehen.

Wir untersuchen jetzt das für t aufgestellte elliptische Integral in seiner Abhängigkeit von u etwas näher. Dabei benutzen wir die evidente Thatsache, dafs in der Mechanik die Zeit nicht nur eine reelle, sondern auch eine beständig wachsende Gröfse bedeutet, dafs also dt notwendigerweise positiv sein mufs.

Als untere Grenze des Integrales nehmen wir den kleineren der beiden zwischen -1 und $+1$ enthaltenen Wurzelwerte von $U = 0$, welchen wir (wie in den Figuren) mit e bezeichnen. Von hier aus müssen wir u in das mechanisch allein brauchbare Intervall zwischen e und e' eintreten lassen und zwar, nach dem vorangestellten Prinzipe, in die obere Überdeckung dieses Intervalles, damit wir für

$$dt = \frac{du}{\sqrt{U}}$$

einen positiven Wert erhalten. Darauf haben wir u, beständig in der oberen Überdeckung bleibend, wachsen zu lassen bis zum Punkte $u = e'$. In diesem angekommen, müssen wir umkehren, damit dt reell, und wir müssen in die untere Überdeckung übergehen, damit dt positiv bleibt. Sind wir zu e zurückgelangt, so müssen wir aus demselben Grunde in die obere Überdeckung übergehen. Es wiederholt sich dann fortgesetzt dasselbe Spiel.

Der Weg, den wir der Variabeln u bei der Integration zuweisen müssen, besteht also aus der kontinuierlichen Umlaufung des Segmentes ee' in bestimmtem Sinne.. (Vgl. die Pfeile in den vorstehenden Figuren.)

Dieser Satz liefert sofort eine erste wichtige Eigenschaft der allgemeinen Kreiselbewegung. Er besagt nämlich:

Die Bahnkurve der Kreiselspitze oscilliert beständig zwischen zwei Parallelkreisen $\cos\vartheta = e$ *und* $\cos\vartheta = e'$ *auf der Einheitskugel hin und her.*

Zugleich lernen wir hierdurch die Lage der beiden Parallelkreise berechnen. Wir haben zu dem Zwecke die kubische Gleichung $U = 0$ zu lösen; *ihre beiden zwischen -1 und $+1$ gelegenen Wurzeln liefern uns die fraglichen Werte von* $\cos\vartheta$.

Ferner können wir nunmehr die Zeit angeben, welche verstreicht, während die Kreiselspitze von ihrer tiefsten zu der nächstfolgenden höchsten Lage übergeht. Wir bezeichnen sie mit ω und haben

$$(1) \qquad \omega = \int_e^{e'} \frac{du}{\sqrt{U}}.$$

Hosted by Google

Ebenso grofs ist die Zeitdauer, in welcher die Kreiselspitze zu ihrer tiefsten Lage zurückgelangt; sie ist nämlich wegen des für die untere Überdeckung festgesetzten negativen Vorzeichens von $\sqrt{U}$:

$$\int_{e'}^{e} \frac{du}{-|\sqrt{U}|} = \omega .$$

Während also u einen vollen Umlauf um das Integrationssegment ee' ausführt, vergeht jedesmal die Zeit 2ω. Hierauf beruht es, dafs man 2ω als die *Periode des elliptischen Integrals* bezeichnet (πεϱίοδος = Umlauf).

Auf dasselbe Zeitintervall 2ω kommen wir, wenn wir u, von *irgend* einem Werte des Integrationsintervalles beginnend, das Segment ee' umlaufen und zu dem Ausgangspunkt zurückkehren lassen. Umgekehrt wird also auch zu je zwei Zeitpunkten, welche sich um 2ω oder um ein Vielfaches dieser Gröfse unterscheiden, derselbe Wert von u, d. h. dieselbe Vertikal-Erhebung der Kreiselspitze über die Äquatorebene der Einheitskugel gehören. *Die Bewegung der Kreiselspitze stellt daher, was ihre Vertikalkomponente betrifft, einen in der Zeit periodischen Vorgang dar.*

Dasselbe gilt aber auch von der Horizontal-Komponente dieser Bewegung. Letztere wird uns durch die wechselnden Werte des Winkels ψ bestimmt. Ursprünglich bedeutete ja ψ den von der x-Axe aus gemessenen Winkel nach der Knotenlinie. Die Knotenlinie aber steht auf der Figurenaxe und auch auf ihrer (orthographischen oder stereographischen) Projektion in der Äquatorebene beständig senkrecht. Da nun die Gröfse von ψ in unserer Integraldarstellung von pag. 223 sowieso nur bis auf eine additive Integrationskonstante definiert ist, so können wir, indem wir diese Konstante speziell wählen, ψ auch direkt auffassen als den Winkel, den die Projektion der Figurenaxe mit der x-Axe bildet. Die Gleichung

$$\psi = \psi(u),$$

in welcher die Funktion ψ das oben angegebene elliptische Integral bedeutet, liefert uns darauf direkt die Gleichung der Bahnkurve in Polarkoordinaten. Wir haben nur noch nötig, u durch den von O aus gezählten Radius-Vektor ϱ des Bildes der Kreiselspitze auszudrücken, indem wir, je nachdem es sich um das orthographische oder das stereographische Bild handelt, setzen:

$$u = \sqrt{1-\varrho^2} \quad \text{oder} \quad u = \frac{1-\varrho^2}{1+\varrho^2}.$$

Es ist nun klar, dafs das Integral $\psi = \psi(u)$ ganz ähnliche Periodicitätseigenschaften zeigen wird, wie das Integral für t, welches wir

Hosted by Google

soeben untersuchten. Zunächst haben wir den Weg der Variabeln u in unserem Integrale wegen des Faktors $\frac{du}{\sqrt{U}}$ und wegen seiner Bedeutung als Inkrement der Zeit ebenso zu bestimmen, wie oben geschehen. Gehen wir dementsprechend von der unteren Grenze e aus, so liefert die Integration, einmal bis zum Punkte e' ausgedehnt, denjenigen charakteristischen Zuwachs, welchen ψ während der Zeit ω erfährt. Wir bezeichnen denselben mit ψ_ω und haben

$$\psi_\omega = \int\limits_e^{e'} \frac{n - Nu}{A(1-u^2)} \frac{du}{\sqrt{U}}. \tag{2}$$

Das Doppelte dieses Zuwachses erhalten wir, wenn wir über den Punkt e' hinaus in der unteren Überdeckung weiter integrieren und zum Ausgangspunkte zurückkehren. In der That wird, wegen des für die untere Überdeckung festgesetzten Vorzeichens von $\sqrt{U}$, wieder

$$\int\limits_{e'}^{e} \frac{n - Nu}{A(1-u^2)} \cdot \frac{du}{-|\sqrt{U}|} = \psi_\omega.$$

Derselbe Wert $2\psi_\omega$ ergiebt sich natürlich, wenn wir, in *irgend* einem Punkte unseres Segmentes beginnend, die Integrationsvariable dieses einmal vollständig umlaufen lassen. Die Gröfse $2\psi_\omega$ stellt daher denjenigen Zuwachs dar, welchen das Azimuth der Kreiselspitze erfährt, während diese von irgend einem Punkte aus nach Überschreitung einer höchsten und einer tiefsten Lage zu einem in gleicher Höhe über der Äquatorebene gelegenen Punkte zurückkehrt. Dieser Zuwachs ist mithin derselbe für alle Punkte der Bahnkurve. Mit anderen Worten:

Die Bahnkurve der Kreiselspitze kommt mit sich zur Deckung, wenn wir sie um die Vertikale durch den Winkel $2\psi_\omega$ herumdrehen. Sie besteht daher aus einer (im allgemeinen unendlichen) Serie unter sich kongruenter Bögen, deren jeder in der Zeit 2ω durchlaufen wird. Die Bewegung der Kreiselspitze stellt, räumlich wie zeitlich betrachtet, einen periodischen Vorgang dar.

Die soeben ausgesprochene Kongruenz der einzelnen Kurvenbögen haben wir schon früher geometrisch erkannt; unsere jetzige analytische Ergänzung lehrt nun darüber hinaus, die Spannweite der Bögen mittelst der Gleichung (2) wirklich zu berechnen.

Wir wollen sodann analytisch verifizieren, was wir gleichfalls schon früher erkannt haben, dafs nämlich jeder Bogen der Bahnkurve in zwei symmetrisch gleiche Halbbögen zerfällt. Wir konstatieren zu dem Zwecke, dafs, unter u irgend einen Wert zwischen e und e' ver-

Hosted by Google

standen, die beiden Integrale

$$\int_u^{e'} d\psi \quad \text{und} \quad \int_{e'}^u d\psi,$$

von denen wir uns das erste in der oberen, das zweite in der unteren Überdeckung ausgeführt denken, denselben Wert (etwa ψ_0) haben. Nun gehören auf einem bestimmten unserer kongruenten Bögen zu dem Werte u je zwei Punkte, welche bez. die Azimuthe ψ_1 und ψ_2 haben mögen, wobei

$$\psi_1 = \psi_\omega - \psi_0, \qquad \psi_2 = \psi_\omega + \psi_0.$$

Wir sehen hieraus, dafs je zwei zu demselben u gehörige aufeinanderfolgende Punkte unseres Bahnkurvenbildes hinsichtlich der Geraden $\psi = \psi_\omega$ spiegelbildlich liegen. *Jeder einzelne unserer kongruenten Bögen zerfällt daher,* wie behauptet wurde, *in zwei spiegelbildlich gleiche Halbbögen.*

Schliefslich gelten genau dieselben Schlüsse auch hinsichtlich des Integrales, durch welches wir φ dargestellt haben. Wir können direkt sagen: Auch die φ-Koordinate nimmt bei einem vollen Umlauf der Variabeln u um das Integrationssegment je um eine bestimmte additive Gröfse $2\varphi_\omega$ zu. *Infolgedessen besitzt auch die Bewegung des Kreisels um die Figurenaxe einen periodischen Charakter. Diese Bewegung wiederholt sich in demselben Tempo, in dem sich die Bahnkurve periodisch reproduziert.* Die φ-Koordinate ist allerdings für den geometrischen Charakter der Bewegung weniger wichtig, wie die ψ-Koordinate; speziell kommt sie in unserer früheren graphischen Darstellung der Kreiselbewegung überhaupt nicht zum Ausdruck.

Wir haben unsere bisherige Diskussion an die Ausdrücke für die Eulerschen Winkel ψ und φ angeschlossen, welche auch in der That, wegen ihrer anschaulichen Bedeutung, bei geometrischen Fragen am bequemsten sind. Wir bemerken aber, dafs zum Zwecke einer eingehenden analytischen Behandlung unsere Parameter α, β, γ, δ entschieden den Vorzug verdienen. Dies wird im sechsten Kapitel klar hervortreten. Hier begnügen wir uns damit, aus den obigen Ausdrücken der t, ψ und φ entsprechende Integraldarstellungen für die Logarithmen unserer Parameter abzuleiten.

Wir knüpfen dabei an die ursprüngliche Definition der α, β, γ, δ in den Gleichungen (8) von pag. 21 an, wonach beispielsweise

$$\alpha = \cos\frac{\vartheta}{2} \cdot e^{\frac{i(\varphi+\psi)}{2}}$$

Hosted by Google

war. Wir berechnen nun $\lg \alpha$, indem wir für $\cos \frac{\vartheta}{2}$ seinen Wert in u, d. h. $\sqrt{\frac{u+1}{2}}$ eintragen und erhalten so:

$$\lg \alpha = \frac{1}{2} \lg (u+1) + \frac{i}{2} (\varphi + \psi) - \frac{1}{2} \lg 2.$$

Jetzt setzen wir für φ und ψ die Integrale von pag. 223 ein, schreiben auch $\lg (u+1)$ in ein Integral um und gestatten uns, die rechts stehende additive Konstante wegzuwerfen, indem wir sie mit der nicht hingeschriebenen willkürlichen Integrationskonstanten vereinigt denken. Nach gehöriger Zusammenziehung ergiebt sich für $\lg \alpha$ der folgende Ausdruck, dem wir sogleich die in entsprechender Weise gewonnenen Darstellungen für $\lg \beta$, $\lg \gamma$, $\lg \delta$ hinzufügen:

$$(3) \quad \begin{cases} \lg \alpha = \int \left\{ \frac{A\sqrt{U} + i(n+N)}{2A(u+1)} + \frac{iN}{2}\left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\right) \right\} \frac{du}{\sqrt{U}}, \\ \lg \beta = \int \left\{ \frac{A\sqrt{U} - i(n-N)}{2A(u-1)} - \frac{iN}{2}\left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\right) \right\} \frac{du}{\sqrt{U}}, \\ \lg \gamma = \int \left\{ \frac{A\sqrt{U} + i(n-N)}{2A(u-1)} + \frac{iN}{2}\left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\right) \right\} \frac{du}{\sqrt{U}}, \\ \lg \delta = \int \left\{ \frac{A\sqrt{U} - i(n+N)}{2A(u+1)} - \frac{iN}{2}\left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\right) \right\} \frac{du}{\sqrt{U}}. \end{cases}$$

Zunächst möchte es scheinen, als ob diese Ausdrücke komplizierter sind, wie die Integraldarstellungen für φ und ψ. In Wirklichkeit zeigen sie aber ein viel einfacheres funktionentheoretisches Verhalten. Wir werden später sehen, daſs die Gröſsen $\lg \alpha$, $\lg \beta$, $\lg \gamma$, $\lg \delta$ sogenannte Normalintegrale dritter Gattung sind, während sich die ψ und φ nur additiv aus solchen einfachsten Elementen zusammensetzen lassen.

§ 5. Über den Zusammenhang zwischen den Bewegungen verschiedener Kreisel, welche dieselbe Impulskurve liefern, und über die Bewegung des Kugelkreisels.

Wir werden in diesem Paragraphen zeigen, daſs wir uns, wie früher schon gelegentlich erwähnt wurde, fernerhin nur noch mit der Bewegung des Kugelkreisels zu befassen brauchen. Zu dem Zwecke stellen wir zunächst eine etwas allgemeinere Überlegung an.

Wir betrachten einen bestimmten „ersten“ symmetrischen Kreisel und fassen die Kurve ins Auge, welche der Impuls-Endpunkt bei irgendeiner natürlichen Bewegung im Raume beschreibt. Darauf fragen wir uns: *Können wir diese Kurve in mehrfacher Weise als Impulskurve auffassen,* d. h. entsteht dieselbe Kurve als Ort der Endpunkte des

Hosted by Google

Impulsvektors im Raume etwa noch bei einer passend gewählten Bewegung eines „zweiten“ symmetrischen Kreisels? Wir werden sehen, daſs diese Frage zu bejahen ist.

Die auf die Massenverteilung und die Bewegung unseres ersten und zweiten Kreisels bezüglichen Konstanten mögen durch den Index 1 und 2 unterschieden werden, so daſs also A_1, C_1, P_1 bez. A_2, C_2, P_2 die Trägheits- und Schweremomente des ersten bez. zweiten Kreisels bedeuten. Dabei wollen wir den zweiten Kreisel speziell so annehmen, daſs er dasselbe äquatoriale Hauptträgheitsmoment und dasselbe Drehmoment der Schwere aufweist, wie der erste Kreisel, daſs also

$$A_1 = A_2, \quad P_1 = P_2;$$

das Trägheitsmoment um die Figurenaxe kann dagegen verschieden sein. Ferner wollen wir die Anfangslage unseres zweiten Kreisels so bestimmen, daſs seine Figurenaxe mit der des ersten Kreisels zusammenfällt, daſs also zu Beginn der Bewegung

$$\vartheta_1 = \vartheta_2.$$

Endlich werden wir auch die Anfangslage und Gröſse des Impulses in beiden Fällen gleich bestimmen müssen, da wir ja erreichen wollen, daſs beide Kreisel zu derselben Impulskurve Anlaſs geben. Wir werden also setzen

$$n_1 = n_2, \quad N_1 = N_2, \quad k_1 = k_2$$

und werden übrigens bei den hiernach als gleich vorausgesetzten Konstanten A, P, n, N, k die Indices fortlassen können.

Die oben gestellte Frage läſst sich nun, wenn wir uns auf unsere expliciten Integralformeln berufen wollen, äuſserst leicht entscheiden. Wir brauchen nur zu bemerken, daſs der Ausdruck von U in Gleichung (7′) von pag. 222, ebenso wie die Formeln für t und ψ in den Gleichungen (8) von pag. 223, lediglich von den für beide Kreisel als gleich vorausgesetzten Impulsgröſsen n, N und k, sowie von A und P abhängen, dagegen von dem als verschieden vorausgesetzten Hauptträgheitsmomente C unabhängig sind. Infolgedessen werden t und ψ für beide Kreisel dieselben Funktionen von u, d. h. die Bahnkurve der Kreiselspitze wird nach ihrer räumlichen Gestalt und ihrer zeitlichen Durchlaufung bei beiden Kreiseln identisch. Daſs alsdann auch die Impulskurven identisch werden, ergiebt sich direkt aus der Gleichheit der Impulskomponenten n und N, sowie aus der Gleichheit der Länge des Impulses, welche bei entsprechend gleichen Werten von $\cos\vartheta$ durch den Satz der lebendigen Kraft in der Form der Gleichung (3) von pag. 219 ausgesprochen wird.

Unsere obige Frage ist daher in folgendem Sinne zu beantworten: *Zu einer bestimmten möglichen Impulskurve gehören unendlich viele mit*

Hosted by Google

demselben Anfangsimpuls und derselben Anfangslage der Figurenaxe vor sich gehenden Bewegungen aller derjenigen symmetrischen Kreisel hinzu, welche dasselbe Drehmoment der Schwere und dasselbe äquatoriale Hauptträgheitsmoment besitzen. Zugleich mit der Impulskurve wird auch die Bahnkurve der Kreiselspitze bei allen solchen Bewegungen identisch.

Wir können uns aber auch unmittelbar geometrisch von diesem eigentümlichen Zusammenhang zwischen den Bewegungen verschiedener Kreisel Rechenschaft geben

Wir vergleichen zu dem Zwecke den Verlauf der Impulskurve bei unserem ersten und zweiten Kreisel, indem wir den Anfangsimpuls successive mit dem unendlich kleinen Drehstoſse der Schwere zusammensetzen. Dabei ergiebt sich wegen der Gleichheit von P und wegen der Gleichheit des Anfangsimpulses und der Anfangslage der Figurenaxe im ersten Momente für beide Kreisel dieselbe Änderung des Impulses. Insbesondere, können wir sagen, behält die Differenz $|i_1|^2 - |i_2|^2$ zunächst ihren Anfangswert Null bei oder, genauer gesagt, der Differentialquotient dieser Differenz nach der Zeit ist in der Anfangslage gleich Null.

Wir berücksichtigen ferner, daſs zwischen der Länge des Impulses und der Neigung der Figurenaxe für die Bewegung beider Kreisel die unveränderliche Relation (3) von pag. 219 besteht:

$$|i_1|^2 + 2AP\cos\vartheta_1 = k, \quad |i_2|^2 + 2AP\cos\vartheta_2 = k.$$

Aus diesen beiden Gleichungen schlieſsen wir, daſs die Neigung der Figurenaxe gegen die Vertikale sich anfangs in beiden Fällen in gleicher Weise ändert. Bilden wir nämlich die Differenz der vorstehenden Gleichungen, so folgt durch Differentiation nach t:

$$2AP\frac{d}{dt}(\cos\vartheta_1 - \cos\vartheta_2) = -\frac{d}{dt}(|i_1|^2 - |i_2|^2) = 0.$$

Nehmen wir zu der Gleichheit des Neigungswinkels ϑ im ersten Moment noch die Gleichheit der Projektion N des Impulsvektors auf die Figurenaxe hinzu, so ergiebt sich mit Notwendigkeit, daſs die anfangs vereinigt gelegenen Figurenaxen zunächst vereinigt bleiben.

Wir sind damit auf dieselben Bedingungen, die zu Anfang der beiden Bewegungen galten, zurückgeführt. Durch Wiederholung unseres Schlusses sehen wir daher, daſs je zwei symmetrische Kreisel, welche dieselbe Anfangslage der Figurenaxe und denselben Anfangsimpuls besitzen, bei gleichen Werten von A und P dauernd denselben Impuls und dieselbe Lage der Figurenaxe aufweisen müssen. Dies ist aber wieder der oben ausgesprochene Satz.


Hosted by Google

Je zwei der hier verglichenen Bewegungen sind natürlich nicht völlig identisch. Sie unterscheiden sich beispielsweise durch die Gestalt der Herpolhodiekurve, wie wir unten noch näher ausführen werden. Offenbar fällt nämlich bei gleicher Impulskurve und gleicher Bahnkurve der Kreiselspitze, aber ungleichen Werten des Hauptträgheitsmomentes C Lage und Gröfse des Rotationsvektors verschieden aus. Diese Verschiedenheit der instantanen Drehung kann aber nur in der bez. Bewegung der beiden Kreisel um die Figurenaxe, d. h. in den Werten des Winkels φ, zum Ausdrucke kommen, da ja die Bewegung der Figurenaxe selbst, wie wir sahen, dieselbe sein mufs. In der That kommt denn auch C in der Integralformel für φ (s. Gl. (8) von pag. 223) explicite vor.

Nach derselben Gleichung können wir aber sagen, dafs

$$\varphi - N\left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\right) t \tag{1}$$

für je zwei Kreisel unserer Serie dauernd denselben Wert besitzt. Es differieren also die Rotationskomponenten φ' bei zwei solchen Kreiseln nur je um einen konstanten Betrag, dessen Gröfse von der Verschiedenheit der Trägheitsmomente C abhängt.

Insbesondere findet sich unter der Serie unserer mit gleicher Impuls- und Bahnkurve ausgestatteten Kreisel ein *Kugelkreisel.* Diesen werden wir mit Vorliebe, wenn irgend ein „erster“ symmetrischer Kreisel gegeben ist, zum Vergleich heranziehen. Sein Trägheitsmoment, welches wir mit A bezeichnen, haben wir nach dem Vorstehenden so zu bestimmen, dafs $A = A_1$.

Nehmen wir ferner die Gröfsen P, n, N, k, sowie die Anfangslage der Figurenaxe den entsprechenden Gröfsen des vorgelegten symmetrischen Kreisels bez. gleich, so sind wir sicher, dafs die Bahnkurve des Kugelkreisels mit der des symmetrischen Kreisels identisch wird, während sich gleichzeitig die beiden Winkelgeschwindigkeiten φ' nur um eine konstante Gröfse unterscheiden. *Kugelkreisel und symmetrischer Kreisel sind also für unsere Zwecke nicht wesentlich von einander verschieden.* Hat man die Bewegung des ersteren allgemein behandelt, so läfst sich die Bewegung des letzteren sofort angeben.

Die Möglichkeit der Reduktion des allgemeinen Kreiselproblems auf den Kugelkreisel ist zuerst von Herrn Darboux*) bemerkt worden.

Eine erste Anwendung, welche wir von dieser Reduktion machen, soll darin bestehen, dafs wir über die Herpolhodiekurve des symmetrischen Kreisels einen schon pag. 218 erwähnten Satz beweisen. Wir wollen

*) Mouvement d'un corps pesant de révolution, Journ. de Liouville, sér. IV, t. 1, 1885.

zeigen: *Die Herpolhodiekurve des symmetrischen Kreisels ist eine sphärische Kurve.*

Wir gehen dabei von der Thatsache aus, daſs die Herpolhodiekurve des zugehörigen Kugelkreisels *eben* ist. In der That wird ja beim Kugelkreisel die Herpolhodiekurve der Impulskurve, d. h. derjenigen Kurve, welche der Endpunkt des Impulsvektors im Raume beschreibt, ähnlich. Daſs aber letztere eine ebene Kurve ist, wurde pag. 216 ausführlich dargethan.

Die Koordinaten der Herpolhodiekurve, welche wir wie früher mit π, $\varkappa$, ϱ bezeichnen, haben wir pag. 45 durch die Werte von φ, ψ, ϑ und ihre Differentialquotienten dargestellt; insbesondere ergab sich für die dritte Koordinate:

$$\varrho = \psi' + \cos\vartheta \cdot \varphi'.$$

Nun hat ϱ beim Kugelkreisel vom Trägheitsmomente A den konstanten Wert $\frac{n}{A}$. Ferner sind die Werte von ψ und ϑ beim symmetrischen Kreisel, wie wir eben sahen, den entsprechenden Werten bei dem zugehörigen Kugelkreisel bez. gleich, während sich nach (1) die Winkelgeschwindigkeit φ' beim symmetrischen Kreisel aus der entsprechenden Gröſse beim Kugelkreisel durch Hinzufügung von $N\left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\right)$ berechnet. Wir haben daher, unter φ' den Wert dieser Winkelgeschwindigkeit beim Kugelkreisel, unter ϱ den Wert der dritten Herpolhodiekoordinate beim symmetrischen Kreisel verstanden:

$$\frac{n}{A} = \psi' + \cos\vartheta \cdot \varphi',$$

$$\varrho = \psi' + \cos\vartheta \cdot \varphi' + N\left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\right)\cos\vartheta$$

oder

$$\varrho = \frac{n}{A} + N\left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\right)\cos\vartheta. \tag{2}$$

Wir drücken ferner die Länge des Drehungsvektors bei der Bewegung des symmetrischen Kreisels einmal durch seine Koordinaten π, $\varkappa$, ϱ, das andere Mal durch die Koordinaten p, q, r aus, wobei wir statt r auch schreiben können $\frac{N}{C}$. So erhalten wir:

$$\pi^2 + \varkappa^2 + \varrho^2 = p^2 + q^2 + \frac{N^2}{C^2}. \tag{3}$$

Der Satz der lebendigen Kraft in der Form der Gleichung (3) von pag. 219 gestattet uns sodann $p^2 + q^2$ noch in anderer Weise zu berechnen. Setzen wir nämlich in der genannten Gleichung

$$|i|^2 = L^2 + M^2 + N^2 = A^2(p^2 + q^2) + N^2,$$

so ergiebt sich:

$$A^2(p^2+q^2)+N^2+2AP\cos\vartheta=k$$

oder

$$p^2+q^2=\frac{k-N^2-2AP\cos\vartheta}{A^2}.$$

Gleichung (3) geht mithin über in

$$(4)\qquad \pi^2+\varkappa^2+\varrho^2=\frac{k-2AP\cos\vartheta}{A^2}+N^2\left(\frac{1}{C^2}-\frac{1}{A^2}\right).$$

Schliefslich eliminieren wir $\cos\vartheta$ aus (2) und (4) und finden eine Gleichung, in der aufser π, $\varkappa$, ϱ nurmehr konstante Gröfsen vorkommen, nämlich:

$$(5)\qquad \pi^2+\varkappa^2+\varrho^2=\frac{k}{A^2}-\frac{2CP(A\varrho-n)}{AN(A-C)}+N^2\left(\frac{1}{C^2}-\frac{1}{A^2}\right)$$

oder

$$(5')\quad \pi^2+\varkappa^2+\left(\varrho+\frac{CP}{N(A-C)}\right)^2=\frac{k}{A^2}+\frac{2CPn}{AN(A-C)}+\frac{C^2P^2}{N^2(A-C)^2}+N^2\left(\frac{1}{C^2}-\frac{1}{A^2}\right).$$

Dies ist aber die Gleichung einer Kugel. Ihr Mittelpunkt liegt auf der Vertikalen im Abstande $\frac{CP}{N(A-C)}$ vom Unterstützungspunkte; ihr Radius ist gleich der Quadratwurzel aus der rechten Seite in (5′). *Die Herpolhodiekurve ist also in der That eine sphärische Kurve.*

Die Verschiedenheit der Herpolhodiekurve für verschiedene Kreisel unserer Serie folgt auch unmittelbar daraus, dafs Lage und Gröfse der Kugel von dem Trägheitsmomente C abhängen. Speziell wird für den in unserer Serie enthaltenen Kugelkreisel wegen des Nenners $A-C$ der Radius unendlich grofs; gleichzeitig rückt sein Mittelpunkt ins Unendliche. Die sphärische Kurve geht also für diesen Spezialfall in eine ebene Kurve über, wie es sein mufs.

Die Einführung des Kugelkreisels empfiehlt sich namentlich auch wegen eines eigentümlichen *Reciprocitätsgesetzes*, welches für die Bewegung des Kugelkreisels Platz greift. Wir behaupten:

Die umgekehrte Bewegung, d. h. die relative Drehung des Raumes gegen den als fest gedachten Kreisel, ist beim Kugelkreisel wieder eine Kreiselbewegung.

Geometrisch sehen wir die Richtigkeit dieses Satzes ein, wenn wir uns im Einzelnen überlegen, dafs bei der direkten Bewegung des Kugelkreisels Figurenaxe und Vertikale dieselbe Rolle spielen, wie bei der umgekehrten Bewegung Vertikale und Figurenaxe oder, genauer gesagt, wie die zur Vertikalen und zur Figurenaxe diametralen Halbstrahlen.

Hosted by Google

Der analytische Beweis besteht in Folgendem: Wir setzen in den Gleichungen (7′) und (8) von pag. 222, 223 $C = A$ und vertauschen n mit $-N$ und N mit $-n$, was einer Vertauschung der Vertikalen mit dem zur Figurenaxe diametralen Halbstrahle u. s. w entspricht, während wir unsere dritte Integrationskonstante k ungeändert lassen. Alsdann bleibt der Ausdruck U und mithin auch die Funktion t von u ungeändert. Gleichzeitig geht ψ in $-\varphi$ und φ in $-\psi$ über. Wir wissen aber aus dem ersten Kapitel (s. pag. 30, 31), daſs die Umänderung von ϑ, ψ, φ in $\vartheta, -\varphi, -\psi$ dem Übergange von der direkten zu der umgekehrten Drehung entspricht. Die umgekehrte Bewegung ist also in der That wieder eine Kreiselbewegung; sie ist durch die wesentlichen Konstanten $-N, -n, k$ charakterisiert, wenn die entsprechenden Konstanten der direkten Bewegung n, N, k lauten.

Dieses Reciprocitätsgesetz ist natürlich nur durch die besonderen Symmetrieverhältnisse des Kugelkreisels bedingt. Bei allgemeineren Systemen hat die umgekehrte Bewegung einen ganz anderen kinetischen Charakter wie die direkte, worauf bereits pag. 12 hingewiesen. Schon bei dem symmetrischen Kreisel verliert unser Reciprocitätsgesetz seine Gültigkeit, weil in diesem Falle bei der Konstruktion des Drehungsvektors aus dem Impulsvektor die Figurenaxe und die Vertikale nicht gleichberechtigt auftreten. Analytisch kommt dieses darin zum Ausdrucke, daſs in dem Ausdrucke von φ in Gleichung (8) von pag. 223 das Glied

$$N\left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\right) t$$

auftritt, welches bei der Vertauschung von n, N mit $-N$, $-n$ nicht ungeändert bleibt.

Wir werden später aus dem somit festgestellten Reciprocitätsgesetze des Kugelkreisels einen namhaften Vorteil bei der Berechnung unserer Impulskurven bez. unserer Polhodie- und Herpolhodiekurven ziehen. Wenn wir nämlich etwa die Polhodiekurve oder, was beim Kugelkreisel auf dasselbe herauskommt, die „zweite Impulskurve“ irgendwie gefunden haben, so können wir die Gleichungen der Herpolhodiekurve oder die der „ersten Impulskurve“ unmittelbar herstellen. Es liegt nämlich, wie pag. 14 bemerkt, die Polhodiekurve der direkten Bewegung hinsichtlich des Unterstützungspunktes diametral zur Herpolhodiekurve der umgekehrten Bewegung. Aus der Herpolhodiekurve der umgekehrten Bewegung entsteht aber die Herpolhodiekurve der direkten auf Grund unseres Reciprocitätsgesetzes durch Vertauschung von n, N mit $-N$, $-n$. Mithin können wir folgende Regel zur Ableitung der Herpolhodiekurve aus der als bekannt vorausgesetzten Polhodiekurve aussprechen:


Hosted by Google

Man kehre die Koordinaten p, q, r der Polhodiekurve, welche als Funktionen der Zeit und der Integrationskonstanten n, N und k gefunden sein mögen, im Vorzeichen um und schreibe $-N$, $-n$ an Stelle von n, N. Dann gehen die Koordinaten p, q, r der Polhodiekurve in die Koordinaten π, $\varkappa$, ϱ der Herpolhodiekurve über. In derselben Weise ergeben sich aus den Koordinaten L, M, N der zweiten Impulskurve die Koordinaten l, m, n der ersten.

Wir stellen hierunter die wichtigsten der bisher gewonnenen Formeln für den Spezialfall des Kugelkreisels zum leichteren Gebrauch zusammen.

Aus den Gleichungen (4) und (5) von pag. 222 folgt für einen Kugelkreisel vom Trägheitsmomente A:

$$\psi' = \frac{n - Nu}{A(1-u^2)}, \quad \varphi' = \frac{N - nu}{A(1-u^3)}, \quad u = \cos\vartheta; \tag{6}$$

die Gleichungen (8) von pag. 223 gehen über in

$$\begin{cases} t = \int \frac{du}{\sqrt{U}}, \\ \psi = \int \frac{n - Nu}{A(1-u^2)} \frac{du}{\sqrt{U}}, \\ \varphi = \int \frac{N - nu}{A(1-u^2)} \frac{du}{\sqrt{U}}, \end{cases} \tag{7}$$

$$A^2 U = -(Nu - n)^2 + (k - N^2 - 2APu)(1-u^2); \tag{7'}$$

die Integraldarstellungen der $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ endlich lauten jetzt nach pag. 231:

$$\begin{cases} \lg\alpha = \int \frac{A\sqrt{U} + i(n+N)}{2A(u+1)} \frac{du}{\sqrt{U}}, \\ \lg\beta = \int \frac{A\sqrt{U} - i(n-N)}{2A(u-1)} \frac{du}{\sqrt{U}}, \\ \lg\gamma = \int \frac{A\sqrt{U} + i(n-N)}{2A(u-1)} \frac{du}{\sqrt{U}}, \\ \lg\delta = \int \frac{A\sqrt{U} - i(n+N)}{2A(u+1)} \frac{du}{\sqrt{U}}. \end{cases} \tag{8}$$

Der Übergang zu einem symmetrischen Kreisel vom Trägheitsmomente $C \gtrless A$ wird hinterher einfach dadurch bewerkstelligt, daſs wir den vorstehenden Werten von φ bez. $\lg\alpha$, $\lg\beta$, $\lg\gamma$, $\lg\delta$ den Term

$$N\left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\right)t \text{ bez. } \pm\frac{i}{2}N\left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\right)t \tag{9}$$

hinzufügen.

Hosted by Google

§ 6. Kontrolle der in den ersten Paragraphen entwickelten Bewegungsformen des Kugelkreisels; die charakteristischen Kurven dritter Ordnung im Falle $e = 0$.

Nachdem wir im vierten Paragraphen die allgemeinen Periodicitätseigenschaften der Bewegung festgestellt und damit eine erste Kontrolle für die anschaulichen Entwickelungen der ersten Paragraphen erhalten haben, wollen wir nun eine detailliertere Einsicht in die Gestalt der Bahnkurven zu gewinnen suchen, soweit dieses auf analytisch-algebraischem Wege ohne ein näheres Eingehen auf die Theorie der elliptischen Integrale möglich ist. Wir werden zu dem Zwecke untersuchen, wie die Gestalt der Bahnkurven von den Konstanten n, N und k abhängt. Dabei können wir uns nach dem vorigen Paragraphen auf den Fall eines Kugelkreisels, dessen Trägheitsmoment wir mit A bezeichnen, beschränken.

Zunächst wollen wir in der Wahl der Integrationskonstanten eine Änderung vornehmen. Wir wollen nämlich statt der Konstanten k, welche keine hinreichend einfache geometrische Bedeutung hat und welche überdies, damit die zugehörige Bewegung reell ausfällt, gewissen ziemlich komplizierten Ungleichungen zu unterwerfen ist, eine neue Konstante einführen, welche uns die Anfangslage der Figurenaxe gegen die Vertikale angiebt. Und zwar wählen wir die Anfangszeit, von der aus wir die Bewegung verfolgen, wie bereits pag. 199 verabredet, so daſs in ihr die Kreiselspitze einen höchsten oder tiefsten Punkt ihrer Bahnkurve auf der Einheitskugel einnimmt. Die Anfangsneigung (ϑ_0) der Figurenaxe ist alsdann nach pag. 227 bestimmt durch eine der zwischen -1 und $+1$ gelegenen Wurzeln der kubischen Gleichung $U = 0$. Bezeichnen wir diese Wurzel mit e, so haben wir $\cos\vartheta_0 = e$.

Wir können nun die Konstante k aus U eliminieren und statt ihrer e einführen. Dies geschieht folgendermaſsen. Nach der Gleichung (7′) des vorigen Paragraphen haben wir:

$$\frac{A^2 U}{1-u^2} = -\frac{(Nu-n)^2}{1-u^2} + k - N^2 - 2APu.$$

Setzen wir $u = e$, so soll die linke Seite verschwinden; es besteht also die weitere Gleichung:

$$0 = -\frac{(Ne-n)^2}{1-e^2} + k - N^2 - 2APe.$$

Nehmen wir die Differenz der beiden Gleichungen, so ergiebt sich als Resultat der Elimination von k:

$$A^2 U = -(Nu-n)^2 + \frac{(Ne-n)^2(1-u^2)}{1-e^2} - 2AP(u-e)(1-u^2).$$

Hosted by Google

Da die rechte Seite für $u = e$ verschwinden mufs, so können wir $u - e$ als Faktor herausziehen. Wir setzen dementsprechend, indem wir auf gleichen Nenner bringen:

$$(1) \qquad U = \frac{u-e}{A^2(1-e^2)} U_1,$$

wo U_1, wie man leicht nachrechnet, folgenden Wert hat:

$$(2) \quad U_1 = -(u+e)(n^2+N^2) + 2Nn(1+eu) - 2AP(1-e^2)(1-u^2).$$

Indem wir so eine der Wurzeln unserer kubischen Gleichung $U = 0$ als vorgegeben ansehen (indem wir, wie man sich ausdrückt, diese Wurzel adjungieren), hängt die Bestimmung der übrigen nur noch von einer quadratischen Gleichung $U_1 = 0$ ab. Von ihren beiden Wurzeln bestimmt uns diejenige, welche zwischen -1 und $+1$ gelegen ist, den anderen Parallelkreis $u = e'$, welcher zusammen mit dem bekannten Parallelkreise $u = e$ die Bahnkurve der Kreiselspitze auf der Einheitskugel eingrenzt.

Die Einführung der Konstanten e bringt also einen doppelten Vorteil mit sich: 1) wird die wenig anschauliche Konstante k durch eine Gröfse ersetzt, welche in der Anfangslage der Figurenaxe und in der Gestalt der Bahnkurve unmittelbar zum Ausdruck kommt, 2) wird die kubische Gleichung $U = 0$ durch eine leicht lösbare quadratische Gleichung $U_1 = 0$ ersetzt. Wir werden daher im Folgenden n, N und e als die wesentlichen Elemente der Kreiselbewegung ansehen und gelegentlich als Integrationskonstanten bezeichnen.

Indem wir nun zu einer genaueren Untersuchung der Bahnkurvengestalten übergehen, werden wir vor allem zu wissen wünschen, wie die Lage des zweiten Begrenzungskreises $u = e'$ von der Wahl der Integrationskonstanten abhängt. Da es unsere nächste Absicht ist, die Serie der Figuren 24 bis 35 einer näheren Kontrolle zu unterziehen, nehmen wir, wie im ersten Paragraphen, durchweg an, dafs die Figurenaxe anfangs horizontal steht, und setzen dementsprechend für's erste $e = 0$.

In den Figuren 24 bis 28 hatte n den festen Wert null, während N variirt wurde. Setzen wir also $e = n = 0$ und etwa $N = v$, so stellt uns die Gleichung $U_1 = 0$ die fragliche Abhängigkeit zwischen u und v, d. h. zwischen der Lage des Begrenzungskreises $u = e'$ und der Gröfse des Eigenimpulses $v = N$ dar. Diese Gleichung lautet jetzt folgendermafsen:

$$(3) \qquad uv^2 = -2AP(1-u^2).$$

Während sie in u vom zweiten Grade ist, erhöht sich ihr Grad wieder

auf 3, sobald wir, wie es jetzt geschehen mufs, u und v gleichzeitig als Variabele ansehen. Um die Abhängigkeit zwischen diesen Gröfsen bequem übersehen zu können, deuten wir sie als rechtwinklige Koordinaten in einer uv-Ebene, u als Abscisse, v als Ordinate und erhalten so als Bild der Gleichung $U_1 = 0$ *eine Kurve dritter Ordnung* („eine C_3“).

Die Gestalt dieser C_3 ist leicht zu übersehen. Zu jeder Abscisse u gehört ein Paar entgegengesetzt gleicher (nicht notwendig reeller) Werte $\pm v$; die Gerade $u =$ const. schneidet also die Kurve in zwei zur Abscissenaxe spiegelbildlich gelegenen Punkten; die Kurve selbst liegt zu dieser Axe symmetrisch. Zusammenrücken können zwei solche Punkte nur, wenn $\pm v = 0$ oder $= \infty$ wird, in welchem Falle die betr. Gerade $u =$ const. unsere C_3 berührt. Nun haben wir nach Gleichung (3) $v = 0$, wenn $u = \pm 1$, und $v = \infty$, wenn $u = 0$ oder $= \infty$ wird. Unsere Kurve besitzt hiernach in den Punkten $u = \pm 1$, $v = 0$ je eine vertikale Tangente und hat die Ordinatenaxe zur Asymptote.

Bemerken wir ferner, dafs rechts von der Ordinatenaxe die linke Seite unserer Gleichung (3) positiv ist. Die rechte Seite ist aber, da wir wie in § 1 $P < 0$ voraussetzen wollen, nur solange positiv, als $u < 1$ ist. Infolgedessen giebt es rechts von der Geraden $u = +1$ keine reellen Kurvenpunkte. In entsprechender Weise sieht man, dafs innerhalb des Streifens links von der Ordinatenaxe und rechts von Geraden $u = -1$ keine Kurvenpunkte liegen können. Die Kurve mufs daher (vgl. Fig. 39) an der Stelle $u = +1$, $v = 0$ nach links hin geöffnet sein und wird sich von hier aus der Geraden $u = 0$ asymptotisch nähern. Desgleichen wird die Kurve an der Stelle $u = -1$, $v = 0$ nach links hin geöffnet sein, von wo aus sie parabelähnlich ins Unendliche verläuft. Unsere C_3 besteht also aus zwei getrennten Zügen, welche wir als „paaren“ und „unpaaren“ Zug unter-

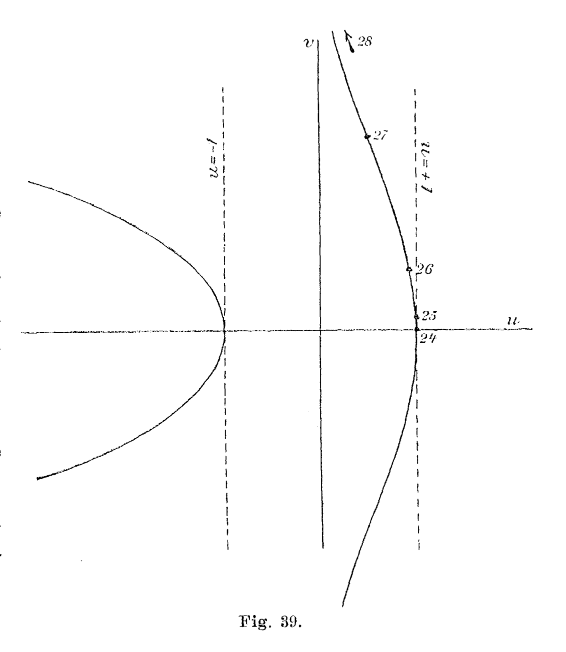


Fig. 39.

scheiden. Der unpaare Zug ist der in dem Streifen $0 < u < 1$ enthaltene, der paare Zug ist unser parabelähnlicher Ast.

Auf Grund dieser Figur können wir unsere früheren Schlüsse über die Abänderung des Parallelkreises $u = e'$ bei wachsendem N vollkommen bestätigen. Natürlich kommen für die Mechanik nur solche Abscissenwerte v in Betracht, welche zwischen -1 und $+1$ enthalten sind. Sehen wir also von dem isolierten Punkte $u = -1$ ab, welchem, wie wir im folgenden Kapitel sehen werden, eine ganz besondere Art der Bewegung entspricht, so haben wir uns mit dem unpaaren Zuge zu beschäftigen. Wir ziehen die Parallele zur u-Axe $v = N$ und lassen N von Null aus wachsen. Die Abscisse des Schnittpunktes dieser Geraden mit dem unpaaren Zuge giebt uns den zu N gehörigen Wert von e'. Dem Falle $N = 0$ entspricht die gewöhnliche Pendelbewegung, bei der $e' = 1$ ist, bei der sich also der Parallelkreis e' auf den Nordpol der Einheitskugel reduziert. Bei wachsendem N nimmt e', wie die Figur zeigt, successive ab, unser Parallelkreis erweitert sich also und nähert sich für $N = \infty$ asymptotisch dem Äquator. Die Bewegung geht dabei, in Übereinstimmung mit Fig. 28, in unsere pseudoreguläre Präcession über.

Wir verifizieren auch leicht das Auftreten von Spitzen in den Figuren 25 bis 28. Nach Gleichung (2) des vorigen Paragraphen haben wir im Falle $n = 0$:

$$\frac{d\psi}{du} = \frac{-Nu}{A^2(1-u^2)} \frac{1}{\sqrt{U}}.$$

Auf dem Äquator $u = 0$ wird die rechte Seite null, weil $\sqrt{U}$ von niederer Ordnung verschwindet wie u. Hier mufs also die Bahnkurve im stereographischen Bilde radial verlaufen; da sie aber den Äquator nicht überschreiten kann, mufs sie auch in radialer Richtung zurücklaufen, so dafs sie in der That eine Spitze bildet.

Hieran mögen sich einige Angaben über die den Figuren 25 bis 28 zu Grunde liegenden numerischen Werte schliefsen, soweit sie sich auf die Lage der begrenzenden Parallelkreise beziehen. Wir haben bei der Herstellung dieser Figuren $A = 1$, $P = -1$ angenommen, Werte, welche sich übrigens durch Wahl geeigneter Einheiten für die Messung von Länge und Zeit stets erreichen lassen. Die numerischen Werte von N und die zugehörigen Werte von e' werden durch die folgende Tabelle geliefert bez. durch unsere obige Kurve, in welcher die Nummern der betr. Figuren an den repräsentierenden Stellen (u, v) des unpaaren Zuges eingetragen sind.

Hosted by Google

Fig. 24	$e' = 1$	$N = 0$
„ 25	$\frac{99}{100}$	$\sqrt{\frac{398}{9900}} = 0{,}20$
„ 26	$\frac{9}{10}$	$\sqrt{\frac{19}{45}} = 0{,}65$
„ 27	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3} = 1{,}73$
„ 28	0	∞

Bei einem negativen Werte von N ergiebt sich, wegen der symmetrischen Lage unserer C_3 gegen die Abscissenaxe, genau dieselbe Gröfse des Parallelkreises und dieselbe Bahnkurve wie bei positivem N, was übrigens auch mechanisch evident ist. Insoweit war also die im ersten Paragraphen festgehaltene Beschränkung auf positive Werte von N wohlbegründet.

Unsere bisherigen Betrachtungen geben uns gleichzeitig Aufschlufs über die Bewegung des Kugelkreisels im Falle $N = 0$ bei variablem n. In der That bestimmt sich nach Gleichung (2) — in Übereinstimmung mit dem Reciprocitätsgesetz des vorigen Paragraphen — die Lage des Parallelkreises in diesem Falle wiederum durch die Gleichung (3) bez. durch unsere Fig. 39, in welcher alsdann v die Impulskomponente n bedeuten wird. Wir haben diese durch $N = 0$ charakterisierten Bahnkurven des Kugelkreisels als Bahnkurven des sphärischen Pendels bezeichnet. Wir können diese Bezeichnung nachträglich auf Grund des vorigen Paragraphen rechtfertigen.

Ein Pendel ist allerdings kein Kugelkreisel, sondern ein symmetrischer Kreisel von spezieller Beschaffenheit. Es ist nämlich bei diesem das Trägheitsmoment um die Figurenaxe, d. h. um die Axe des Stabes, an dessen Ende der Massenpunkt befestigt ist, gleich null, während das Trägheitsmoment um eine dazu senkrechte Axe gleich ml^2 ist, wo m die Masse des Punktes, l die Länge des Stabes bedeutet. Gleichzeitig mit dem Trägheitsmoment um die Figurenaxe ist natürlich auch der Eigenimpuls des Pendels notwendig gleich null. Nun sahen wir aber, dafs ein symmetrischer Kreisel dieselbe Bahnkurve beschreibt, wie ein Kugelkreisel von gleichem Schwere- und äquatorialem Trägheitsmoment und gleichen Impulskonstanten N, n, k. Infolgedessen sind wirklich im Falle $N = 0$ die Bahnkurven unseres Kugelkreisels zugleich Bahnkurven eines gewissen sphärischen Pendels.

Wir wollen hiermit die in dem Schema 36 auf den Axen $n = 0$ bezw. $N = 0$ gelegenen Figuren als erledigt ansehen und wenden uns nun zu den Fällen, wo keine unserer beiden Impulskomponenten n, N verschwindet, insbesondere also zu den Figuren 29 bis 35.

Hosted by Google

In diesen Figuren haben wir den Wert von N festgehalten und den von n variiert. Wir wollen dementsprechend in Gleichung (2) $n = v$ und übrigens wie früher $e = 0$ setzen. Alsdann wird die gegenseitige Abhängigkeit zwischen der Lage des Begrenzungskreises $u = e'$ und dem seitlichen Anstoſse $v = n$ durch die Gleichung gegeben:

$$(4) \qquad u(v^2 + N^2) - 2Nv + 2AP(1 - u^2) = 0,$$

welche uns wieder eine *Kurve dritter Ordnung* repräsentiert.

Um ihre Gestalt zu bestimmen, suchen wir wie oben die vertikalen Tangenten auf. Zwei derselben haben die Gleichung $u = \pm 1$; in der That schneiden diese Geraden unsere C_3 in zwei zusammenfallenden Punkten, da sich für $u = \pm 1$ die Gleichung (4) auf

$$(v \mp N)^2 = 0$$

reduziert. Die Berührungspunkte liegen hiernach an den Stellen $u = \pm 1$, $v = \pm N$. Auſser diesen zwei (zusammenfallenden) Schnittpunkten müssen aber die Geraden $u = \pm 1$ mit unserer C_3 noch einen dritten Schnittpunkt haben, welcher nur im Unendlichen liegen kann. Die Kurve erstreckt sich also in vertikaler Richtung ins Unendliche. Asymptote wird die Gerade $u = 0$. Tragen wir nämlich diesen Wert in (4) ein, so ergiebt sich nur ein zugehöriger Ordinatenwert

$$v_1 = \frac{AP}{N}.$$

Die Gerade $u = 0$ muſs daher die C_3 im Unendlichen berühren.

Wir fragen sodann, ob es auſser den gefundenen drei noch weitere vertikale Tangenten giebt. Das allgemeine Kriterium für das Auftreten vertikaler Tangenten wird dieses sein, daſs die Gleichung $U_1 = 0$, als Gleichung in v aufgefaſst, eine Doppelwurzel ergiebt, wenn für u der betr. Abscissenwert einer vertikalen Tangente eingetragen wird. In v ist die Gleichung $U_1 = 0$ quadratisch. Die Bedingung für das Auftreten einer Doppelwurzel bei der quadratischen Gleichung $av^2 + 2bv + c = 0$ wird aber durch Nullsetzen der Discriminante $ac - b^2$ geliefert. Die Ausrechnung dieser Bedingung giebt in unserem Falle:

$$(1 - u^2)(N^2 - 2APu) = 0.$$

Wir sehen also, daſs auſser den Geraden $u = \pm 1$ auch

$$u_2 = \frac{N^2}{2AP}$$

eine vertikale Tangente ist. Ihr Berührungspunkt hat die Ordinate

$$v_2 = -\frac{b}{a} = \frac{N}{u_2} = \frac{2AP}{N}.$$

Es kommt nun wesentlich auf die Lage dieser Tangente gegen die vorher gefundenen an. Jedenfalls liegt sie, da wir $P < 0$ voraussetzen,

Hosted by Google

linkerhand von der Asymptote $u = 0$. Es fragt sich aber ferner, ob sie auch links oder rechts von der Tangente $u = -1$ verläuft. Da es uns hier nur auf eine Kontrolle der Figuren des ersten Paragraphen ankommt, legen wir die pag. 242, 243 genannten Zahlenwerte $A = -P = 1$, $N = 0{,}20$ zugrunde und behalten uns vor, im folgenden Paragraphen die Gestalt der C_3 unter allgemeineren Annahmen zu untersuchen. Der numerische Wert der Abscisse unserer vierten Tangente wird daraufhin

$$u_2 = -0{,}02 > -1.$$

Wir können jetzt in das von unseren vier vertikalen Tangenten gebildete Gerüst die Kurve dritter Ordnung eintragen. Beginnen wir die Zeichnung im Punkte $u = 1$, $v = N$. Die Kurve verläuft hier vertikal und nähert sich nach oben hin asymptotisch der Ordinatenaxe. Setzen wir sie nach unten hin fort, so überschreitet sie die Ordinatenaxe im Punkte $u = 0$, $v = v_1$, berührt die Gerade $u = u_2$ im Punkte $v = v_2$ und nähert sich dann asymptotisch der negativen Ordinatenaxe. Aufserdem setzt sich im Punkte $u = -1$, $v = -N$ ein zweiter parabelähnlicher Kurvenast an. Die Kurve besteht also wieder aus einem „paaren" und einem „unpaaren" Zuge von vertikaler Erstreckung, welcher letzterer mechanisch allein wichtig ist. Übrigens haben wir in der Zeichnung (vgl. Fig. 40) wegen des ziemlich kleinen Wertes von N $(N = 0{,}20)$ die Mafseinheit auf der Vertikalen fünfmal so klein wählen müssen, wie auf der Horizontalen.

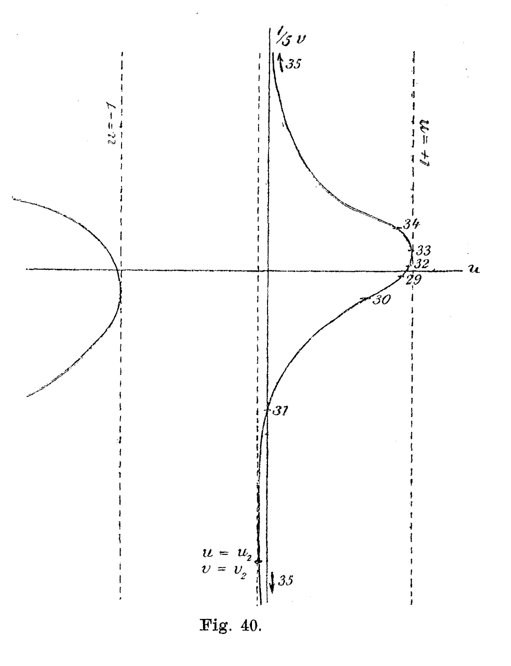


Fig. 40.

Wir haben nun in dieser C_3 ein vollständiges Bild der Veränderungen vor uns, welche die Lage des zweiten Begrenzungskreises bei Veränderung des seitlichen Anstofses erfährt. Ziehen wir nämlich die Parallele $v = n$ zur u-Axe, so trifft diese den unpaaren Zug in einem Punkte, dessen Abscisse die Gröfse des Kreises $u = e'$ angiebt. Geben wir jener Geraden alle möglichen Lagen zwischen $v = -\infty$ und $v = +\infty$, so durchläuft der Schnittpunkt den ganzen unpaaren Zug.

Hosted by Google

Wir wollen diesen Vorgang in derselben Reihenfolge betrachten, in welcher die Figuren 29 bis 35 auf einander folgen.

Wir lassen also n von dem in Fig. 25 dargestellten Falle $n = 0$ aus zunächst abnehmen, verschieben also unsere Parallele zur u-Axe nach unten hin. Der Wert von e' verkleinert sich dabei, d. h. der zweite Begrenzungskreis erweitert sich, bis er (für $e' = e = 0$) mit dem Äquator zusammengefallen ist. Die Bewegung geht dann in den Fall der langsamen Präcession über; der entsprechende Punkt unserer C_3 ist ihr Schnittpunkt mit der Ordinatenaxe, welchem, wie wir oben sahen, die Ordinate

$$v_1 = n = \frac{AP}{N}$$

zukommt; derselbe Wert von n wurde bereits pag. 202 für die langsame Präcession abgeleitet.

Wir gehen jetzt wieder zu der Lage $v = 0$ unserer Geraden zurück und verschieben sie nach oben, indem wir n wachsen lassen. Dabei wächst der Wert von e' eine Zeit lang, d. h. unser Begrenzungskreis verengert sich, bis er sich (für $e' = 1$) auf den Nordpol der Einheitskugel zusammengezogen hat. Der zugehörige Wert von n ist, wie wir unserer C_3 entnehmen,

$$n = N.$$

Von da ab nimmt bei weiter wachsendem n der Wert von e' ab; der Begrenzungskreis erweitert sich und geht für $n = \infty$ asymptotisch in den Äquator über; die Bahnkurve nähert sich mehr und mehr der in Fig. 35 dargestellten schnellen regulären Präcession.

Es bleiben nur noch diejenigen Fälle übrig, welche bei negativem n den Übergang bilden zwischen der langsamen und der schnellen Präcession. Der zweite Begrenzungskreis e' bleibt bei allen diesen Fällen dem Äquator sehr nahe und liegt, wie unsere C_3 zeigt, auf der südlichen Hemisphäre der Einheitskugel ($e' < 0$). Zunächst verengert er sich ein wenig bis zu dem extremen Werte u_2, welcher unter den unseren Figuren zu Grunde liegenden Verhältnissen gleich $-0{,}02$ ist und dem Werte $v_2 = n = -10$ entspricht. Von da ab nimmt er wieder zu und geht für $v = -\infty$ in den Äquator über. In dem Umstande, daſs dieser ganze Teil der C_3 der Ordinatenaxe auſserordentlich nahe liegt, erkennen wir den Grund, warum wir früher (vgl. pag. 214) für die entsprechenden Fälle der Kreiselbewegung keine deutliche Bahnkurve zeichnen konnten.

Die numerischen Daten, welche den Figuren 29 bis 35 zu Grunde liegen, stellen wir in der folgenden Tabelle zusammen; sie sind auch aus der Stellung der bez. Nummern in unserer C_3 zu ersehen.

Hosted by Google

$$A = -P = 1, \quad N = 0{,}20.$$

Fig. 29	$e' = 0{,}96$	$n = -0{,}20$
„ 30	0,67	-1
„ 31	0	$-5 = \frac{AP}{N}$
„ 32	0,9964	$+0{,}08$
„ 33	1	$+0{,}20 = N$
„ 34	0,87	$+1$
„ 35	0	$\pm\infty$.

Wohlgemerkt entspricht unsere C_3, sowie unsere Figurenserie 29—35 nur einem ganz bestimmten und zwar einem kleinen Werte von N. Wenn man diesen Wert wachsen läſst, wird sich auch die Gestalt der C_3, sowie die Serie unserer Bahnkurven verändern. Der Erfolg wird nämlich der sein: Es wird sich bei wachsendem N der oberhalb der Abscissenaxe gelegene Teil der C_3 in die Länge strecken; der untere Teil wird gedrungener werden, indem die vertikale Tangente $u_2 = \frac{N^2}{2AP}$ nach links wandert und gleichzeitig ihr Berührungspunkt $v_2 = \frac{2AP}{N}$ der Abscissenaxe näher rückt. Eine wesentliche qualitative Änderung in dem Verlauf der Bahnkurven wird sich aber erst ergeben, wenn die genannte vertikale Tangente über die Gerade $u = -1$ nach links hinausrückt, worauf wir im folgenden Paragraphen ausführlich eingehen werden.

Wir bemerken hier nur noch, daſs bei einer Vorzeichenumkehr von N die C_3 eine Spiegelung an der Abscissenaxe erleidet. In der That bleibt die Gleichung $U_1 = 0$ ungeändert, wenn wir gleichzeitig N mit $-N$ und n mit $-n$ vertauschen. Infolgedessen ergiebt sich bei einem negativen Werte von N dieselbe Serie der Bahnkurven wie bei dem entsprechenden positiven Werte, nur in umgekehrter Reihenfolge.

Wir erwähnen schlieſslich, daſs auch in dem früher citierten Werke von Routh*) ein Ansatz zur geometrischen Diskussion der Gleichung dritten Grades $U = 0$ gegeben wird.

§ 7. Die charakteristischen Kurven dritter Ordnung bei beliebiger Lage des Ausgangskreises e; Unterscheidung zwischen starken und schwachen Kreiseln.

Wir haben jetzt die Überlegungen des vorigen Paragraphen noch einmal in gröſserer Allgemeinheit anzustellen und namentlich zuzusehen, inwiefern die im zweiten Paragraphen entwickelte Figurenserie wegen

*) Rigid dynamics, advanced part, pag. 114, art. 204.

Hosted by Google

der dort getroffenen besonderen Voraussetzungen (z. B. $e = 0$) zu speziell ausfiel. Wir lassen also jetzt die Lage des Ausgangskreises e beliebig und legen dementsprechend die Gleichung $U_1 = 0$ in der Form von pag. 240 zu Grunde. Da diese Gleichung ungeändert bleibt, wenn wir n und N gegeneinander vertauschen, können wir uns darauf beschränken, die Abhängigkeit der Bahnkurven von einer dieser Gröſsen, z. B. von n zu betrachten und N als einen festen Parameter anzusehen, dessen Gröſse allerdings nicht unwesentlich ist. Wir setzen wieder $n = v$; die Abhängigkeit zwischen u und v wird dann durch die Kurve dritter Ordnung dargestellt:

$$(1)\quad -(u+e)(v^2+N^2)+2Nv(1+eu)-2AP(1-e^2)(1-u^2)=0.$$

Indem wir auch hier nach den vertikalen Tangenten der Kurve fragen, haben wir die Überlegungen von pag. 244 von Neuem anzustellen. Zwei dieser Tangenten (I und II) sind wie früher durch $u = \pm 1$ gegeben; ihr Berührungspunkt ist $v = \pm N$. Ferner giebt es auch hier eine vertikale Gerade (III), welche die Kurve im Unendlichen berührt. Sie hat die Gleichung $u = -e$ und schneidet die Kurve noch in dem Punkte

$$v = \frac{AP}{N}(1-e^2).$$

Eine vierte vertikale Tangente (IV) folgt wie pag. 244 durch Nullsetzen der „Discriminante“, welcher man hier durch eine kleine Rechnung die Form giebt:

$$(N^2 - 2AP(u+e))(1-e^2)(1-u^2).$$

Unsere vierte vertikale Tangente ist also die Gerade

$$(2\text{a})\qquad u = -e + \frac{N^2}{2AP}$$

mit dem Berührungspunkte

$$(2\text{b})\qquad v = Ne + \frac{2AP}{N}(1-e^2).$$

Diese Gerade liegt, bei negativem P, wegen (2a) jedenfalls links, bei positivem P rechts von der Asymptote $u = -e$. Wir müssen aber weiter zwei Unterfälle unterscheiden, je nachdem diese Gerade bei negativem (positivem) P auch links (rechts) von der Geraden $u = -1$ ($u = +1$) liegt oder rechts (links) von derselben. Die Bedingungen hierfür lauten beziehungsweise:

$$P<0\begin{cases}-e+\frac{N^2}{2AP}<-1,\\ -e+\frac{N^2}{2AP}>-1,\end{cases}\qquad P>0\begin{cases}-e+\frac{N^2}{2AP}>+1,\\ -e+\frac{N^2}{2AP}<+1.\end{cases}$$

Hosted by Google

Ob die eine oder andere dieser Ungleichungen erfüllt ist, hängt bei gegebener Massenverteilung und gegebener Anfangslage des Kreisels von der Stärke seines Eigenimpulses ab. *Wir unterscheiden danach zwei Kreiselarten, welche wir als starke und schwache Kreisel bezeichnen;* dieselben sollen im Falle $P < 0$ bez. $P > 0$ durch die mit den vorstehenden *identischen* Ungleichungen definiert sein:

$$(3) \qquad P < 0 \begin{cases} N^2 > -2AP(1-e) \cdots & \text{starker Kreisel,} \\ N^2 < -2AP(1-e) \cdots & \text{schwacher Kreisel;} \end{cases}$$

$$(3') \qquad P > 0 \begin{cases} N^2 > +2AP(1+e) \cdots & \text{starker Kreisel,} \\ N^2 < +2AP(1+e) \cdots & \text{schwacher Kreisel.} \end{cases}$$

Man kann bemerken, dafs unsere Unterscheidung keine absolute ist, sondern von der Anfangslage e des Kreisels abhängt. Beispielsweise ist bei positivem P im Fall $e = -1$, wo die Bahnkurve im Südpole der Kugel beginnt, jeder Kreisel ein starker Kreisel.

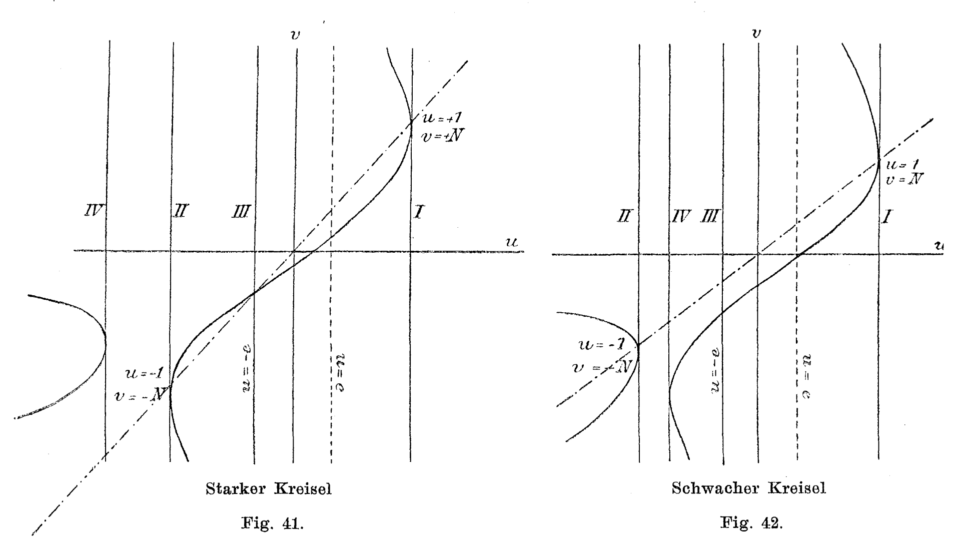
Die Gestalt der C_3 fällt nun, je nachdem ein starker oder ein schwacher Kreisel vorliegt, verschieden aus. Beidemal besteht die Kurve aus einem paaren und einem unpaaren Zuge. Bei dem starken Kreisel durchquert aber der unpaare Zug den ganzen Vertikalstreifen zwischen $u = -1$ und $u = +1$, bei dem schwachen Kreisel ist er auf einen Teil desselben eingeschränkt, welcher durch die Geraden $u = -1$ und $u = -e + \frac{N^2}{2AP}$ $(P < 0)$ bez. durch die Geraden $u = +1$ und $u = -e + \frac{N^2}{2AP}$ $(P > 0)$ begrenzt wird.

(Nur in dem Grenzfalle zwischen dem starken und schwachen Kreisel, wo in (3) und (3′) statt der Zeichen $\gtrless$ das Zeichen $=$ eintritt, verschmelzen die beiden Bestandteile unserer C_3 mittels eines bei $u = \mp 1$, $v = \mp N$ gelegenen Doppelpunktes zu einem einzigen Kurvenzuge. Es wird nicht nötig sein, diesen Grenzfall im Folgenden ausdrücklich zu besprechen. Er vermittelt natürlich den stetigen Übergang zwischen den Bewegungen des starken und des schwachen Kreisels. Im nächsten Kapitel (vgl. namentlich § 8) werden wir nur noch auf diejenige spezielle Bewegung dieses Grenzfalles zurückzukommen haben, welche in der C_3 durch den Doppelpunkt selbst charakterisiert wird und welche im Hinblick auf die Theorie der kleinen Schwingungen ein besonderes Interesse beanspruchen darf.)

Um nicht zu viele Fallunterscheidungen zu haben, werden wir, wie in den ersten Paragraphen, annehmen, dafs $P < 0$ sei. Dieser Annahme entsprechen die Figuren 41 und 42. Der Fall $P > 0$ läfst sich nach pag. 198 dadurch auf $P < 0$ zurückführen, dafs wir die Bezeichnung

Hosted by Google

„Figurenaxe" von dem einen der beiden Halbstrahlen, in welche die Symmetrieaxe der Massenverteilung durch den Unterstützungspunkt zerlegt wird, auf den anderen übertragen. Dabei ändert sich ersichtlich neben dem Vorzeichen von P auch das von N, während die Impulskomponente n ungeändert bleibt. Gleichzeitig geht der Winkel ϑ



Starker Kreisel
Fig. 41.

Schwacher Kreisel
Fig. 42.

über in $\pi - \vartheta$. Es werden also auch die Gröfsen u, e, e', e'' im Vorzeichen umzukehren sein. Hiernach ist klar, dafs wir die charakteristischen Kurven dritter Ordnung im Falle $P > 0$ aus den angezeichneten einfach dadurch erhalten, dafs wir die letzteren an der Ordinatenaxe spiegeln. Auf ihre Wiedergabe können wir füglich verzichten.

Wir machen jetzt unsere Konstruktion zur Auffindung des Begrenzungskreises $u = e'$, verschieben also die Gerade $v = n$ parallel der u-Axe von $v = -\infty$ bis $v = +\infty$ und suchen den Abscissenwert ihres Schnittpunktes mit dem unpaaren Zuge der C_3 auf. Hierbei tritt folgender charakteristischer Unterschied zwischen dem starken und schwachen Kreisel hervor: Bei dem starken Kreisel bestreicht die Projektion des Schnittpunktes auf die Abscissenaxe das ganze Intervall zwischen -1 und $+1$; bei dem schwachen Kreisel durchläuft sie nur ein Stück dieses Intervalles, welches von $u = +1$ und $u = -e + \frac{N^2}{2AP}$ begrenzt wird. Beidemal wird übrigens jeder Wert, der überhaupt erreicht wird, zweimal erreicht. *Dies hat zur Folge, dafs beim starken Kreisel der Parallelkreis e' jede Lage auf der Kugel annehmen kann und zwar jede noch bei zwei verschiedenen Werten des n, dafs er da-*

Hosted by Google

gegen beim schwachen Kreisel von einer gewissen Kugelkalotte ausgeschlossen ist, welche den Südpol der Einheitskugel umgiebt und durch den Kreis $u = -e + \frac{N^2}{2AP}$ *begrenzt wird.*

Wir sehen hieraus, daſs den Figuren 29 bis 35 die Annahme eines schwachen Kreisels zu Grunde lag, weil bei diesen der gröſste Teil der südlichen Halbkugel von Bahnkurven überhaupt freiblieb. In der That ist denn auch für die früher vorausgesetzten Werte

$$N = 0{,}20, \quad A = 1, \quad P = -1, \quad e = 0$$

von den beiden Kriterien (3) das zweite erfüllt.

An der Hand unserer Figuren lassen sich jetzt weiter die verschiedenen ausgezeichneten Fälle, welche bei der Kreiselbewegung vorkommen können, das Auftreten der regulären Präcession, die Spitzenbildung u. s. w. bequem untersuchen. Dies soll im Folgenden unter einer Anzahl verschiedener Nummern geschehen.

1) Wir sehen zunächst zu, was unsere Kurven über die Möglichkeit der *regulären Präcession* aussagen. Reguläre Präcession tritt ein, wenn $e' = e$ wird. Wir ziehen daher die Gerade $u = e$; ihre Schnittpunkte mit der Kurve dritter Ordnung geben, wenn solche vorhanden sind, diejenigen Werte von n, welche für die reguläre Präcession erforderlich sind. Dabei unterscheiden sich wieder der starke und der schwache Kreisel:

Beim starken Kreisel giebt es immer zwei reelle Schnittpunkte auf der Geraden $u = e$ *und daher zwei (im allgemeinen verschiedene) Fälle möglicher Präcessionsbewegung.*

Beim schwachen Kreisel dagegen sind die Schnittpunkte nur dann reell, wenn die Gerade $u = e$ rechts von der Tangente $u = -e + \frac{N^2}{2AP}$ liegt, wenn also die Ungleichung besteht

$$4APe < N^2.$$

Beim schwachen Kreisel giebt es also zwei Fälle oder keinen Fall regulärer Präcession, je nachdem gilt

$$(4) \qquad 4APe < N^2 \quad \text{oder} \quad 4APe > N^2.$$

Wir bemerken noch, daſs bei horizontaler Anfangslage der Figurenaxe ($e = 0$) die erste unserer Ungleichungen von selbst erfüllt ist, falls nicht gerade $N = 0$ wird. Dementsprechend hatten wir im zweiten Paragraphen dieses Kapitels, trotzdem ein schwacher Kreisel vorlag, bei $N > 0$ stets zwei reelle Präcessionsfälle.

Die Werte von n, welche den beiden Fällen der regulären Prä-


Hosted by Google

cession entsprechen, ergeben sich natürlich aus (1), wenn wir $u = e$ setzen und die so entstehende quadratische Gleichung

$$(5) \qquad (v - Ne)(N - ve) = AP(1 - e^2)^2$$

auflösen; wir finden

$$(6) \qquad v = \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{Bmatrix} = \frac{(1 + e^2)\, N \pm (1 - e^2)\sqrt{N^2 - 4APe}}{2e}.$$

(Es wird gut sein, dieses Resultat mit den Entwickelungen von pag. 178, 179 in Beziehung zu setzen. Wir sahen dort, dafs es bei gegebener Massenverteilung, gegebenem Werte von $\cos\vartheta = e$ und *gegebener Geschwindigkeitskomponente* μ zwei Werte der Geschwindigkeitskomponente ν giebt, welche im Falle des Kugelkreisels eine reguläre Präcession bedingen, nämlich

$$\text{(a)} \quad \nu = \frac{A\mu}{P}, \qquad \text{(b)} \quad \nu = \pm\infty.$$

Unser jetziges Resultat lautet, von dem früheren scheinbar abweichend, folgendermafsen: Bei gegebener Massenverteilung, gegebener Gröfse des Parallelkreises e und *gegebener Impulskomponente* N entsteht eine reguläre Präcession des Kugelkreisels bei zwei Werten der Impulskomponente n, welche in (6) angegeben sind. Die Abweichung beruht offenbar darauf, dafs wir das eine Mal die Geschwindigkeitskomponente μ, das andere Mal die Impulskoordinate N festhalten; wir können uns daher nicht wundern, dafs wir für die zugehörigen Werte der Präcessionskonstanten ν bez. n beidemal verschiedene Werte erhalten.

Um die Beziehung zwischen den Wurzeln n_1, n_2 und den früher unterschiedenen Fällen (a) und (b) noch genauer zu verfolgen, bemerken wir, dafs beide Wurzeln n_1, n_2 dem Falle (a) entsprechen. In der That zeigen wir leicht, dafs unsere Gleichung (5) mit der aus der Theorie des Deviationswiderstandes gewonnenen Gleichung $P = A\mu\nu$, welche uns die Wurzel (a) lieferte, identisch ist. Benutzen wir nämlich die pag. 238 in Gleichung (6) angegebenen Werte von ψ' und φ' und berücksichtigen wir, dafs diese bei der regulären Präcession bez. den Konstanten ν und μ gleich werden, so haben wir

$$(7) \qquad \nu = \frac{n - Ne}{A(1 - e^2)}, \quad \mu = \frac{N - ne}{A(1 - e^2)}.$$

Infolgedessen geht die Gleichung (5) wirklich in die Beziehung $P = A\mu\nu$ über, welche aussagt, dafs die Drehkraft der Schwere mit dem Trägheitswiderstand des Kugelkreisels im Gleichgewichte steht.

Wir überzeugen uns ferner, dafs der Fall (b) der Präcession, bei welcher μ einen gegebenen endlichen Wert hat und ν unendlich grofs ist, von einer Ausnahme abgesehen einem unendlich grofsen Werte von

Hosted by Google

N entspricht. Hierzu diene die nebenstehende Figur, in welcher der Endpunkt des Rotationsvektors auf der durch den Endpunkt der Komponente μ gezogenen Parallelen zur Vertikalen in unendlicher Entfernung zu denken ist. Projizieren wir diesen Vektor senkrecht auf die Figurenaxe, so ergiebt sich, unter Ω die Länge des Rotationsvektors verstanden, als Länge der Orthogonalprojektion auf die Figurenaxe $r = \Omega \cos \vartheta = \infty$, so daſs auch die Impulskomponente N unendlich groſs wird.

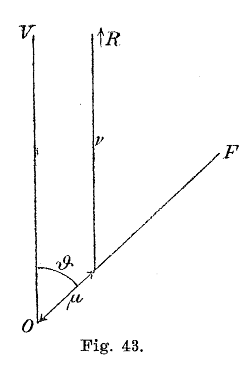


Fig. 43.

Der angedeutete Ausnahmefall ist der Fall $e = 0$, in welchem die Wurzeln (a), (b) bez. den (durch A dividierten) Wurzeln n_1, n_2 gleich werden. In der That sind unter der Annahme $e = 0$ die Parallelkomponenten ν und μ des Rotationsvektors zugleich Orthogonalkomponenten bezüglich der Vertikalen und der Figurenaxe. Dementsprechend finden wir dann aus (6) durch den Grenzübergang $e = 0$ direkt die Wurzeln (a) und (b) wieder, nämlich

$$\text{(a)} \quad \frac{n_1}{A} = \nu = \frac{P}{A\mu}, \qquad \text{(b)} \quad \frac{n_2}{A} = \nu = \pm \infty .$$

Trotz des somit gekennzeichneten Unterschiedes möge es gestattet sein, auch die beiden Fälle regulärer Präcession, welche bei gegebenem N möglich sind, ebenso wie die beiden Fälle, welche zu einem gegebenen μ gehören, je nach der Gröſse von n als *langsame* und *schnelle Präcession* zu bezeichnen. Da wir in Zukunft nicht mehr wesentlich auf die Präcessionskonstanten μ und ν rekurrieren werden, so wird durch diese Zweideutigkeit der Benennung kein Miſsverständnis entstehen.)

2) Sodann wollen wir *den Grenzfall der Kreiselbewegung bei unendlich wachsendem n* untersuchen. Während dieser Grenzfall, wie wir wissen, unter der Annahme $e = 0$ mit der schnellen regulären Präcession zusammenfällt, welche alsdann ihrerseits in eine unendlich schnelle Präcession ausartet, ist er bei allgemeiner Anfangslage wesentlich davon verschieden.

Zunächst können wir aus unsern Kurven dritter Ordnung über diesen Grenzfall Folgendes schlieſsen: Der zweite Begrenzungskreis e' fällt sowohl beim starken wie beim schwachen Kreisel für $n = \infty$ mit dem Parallelkreise $-e$ zusammen; in der That ist $-e$ die Abscisse des auf dem unpaaren Zuge gelegenen unendlich fernen Punktes der C_3.

Im Grenzfall $n = \infty$ oscilliert also die Kreiselspitze um den Äquator als Mittellage herum, indem die Bahnkurve zwischen den Kreisen $+e$ und $-e$ auf und ab schwankt.

Die Gestalt der Bahnkurve wird dabei äufserst einfach. Zur Orientierung betrachten wir vorab einen Kreisel, für welchen $P = N = 0$ ist, also einen schwerelosen Kreisel ohne Eigenimpuls. Die betr. Bewegung gehört (wegen $N = 0$) unter die Bewegungen des sphärischen Pendels; dabei liegt (wegen $P = 0$) der spezielle Fall vor, dafs die Wirkung der Schwere aufgehoben ist. Die Bahnkurve mufs daher dieselbe sein, wie die eines einzelnen Massenpunktes, welcher keinen äufseren Kräften ausgesetzt ist und gezwungen wird, auf einer Kugelfläche zu bleiben. Dieser beschreibt aber auf der Kugel ersichtlich einen gröfsten Kreis mit konstanter Geschwindigkeit.

Wird nun P und N nicht gleich Null gesetzt, dafür aber der seitliche Anstofs n unendlich grofs genommen, so wird die Bahn der Kreiselspitze dieselbe bleiben wie vorher. Es wird nämlich der Einflufs des Anfangsstofses den der Schwere und des Eigenimpulses völlig überwinden.

Mit dieser Überlegung stimmt das Resultat der Rechnung überein. Lassen wir nämlich n unendlich grofs werden, so folgt aus den Gleichungen (1) und (2) von pag. 240 in erster Annäherung:

$$U = -\frac{n^2}{A^2}\frac{u^2 - e^2}{1 - e^2}.$$

Das Integral für t von pag. 238 vereinfacht sich folgendermafsen:

$$(8) \qquad t = \frac{A\sqrt{1-e^2}}{n}\int\frac{du}{\sqrt{e^2-u^2}} = \frac{A\sqrt{1-e^2}}{n}\arcsin\frac{u}{e};$$

hieraus folgt

$$u = e\sin\frac{nt}{A\sqrt{1-e^2}}.$$

Es wird also die Änderungsgeschwindigkeit von u unendlich grofs. Gleichzeitig geht das Integral für ψ von pag. 238 näherungsweise über in

$$\psi = \sqrt{1-e^2}\int\frac{du}{(1-u^2)\sqrt{e^2-u^2}};$$

der Wert desselben wird, wie man leicht verifiziert:

$$(8') \qquad \psi = \arcsin\left(\frac{\sqrt{1-e^2}}{e}\,\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\right).$$

Diese Gleichung können wir, wenn wir $u = \cos\vartheta$, $e = \cos\vartheta_0$ machen, einfacher so schreiben:

$$(9) \qquad \sin\psi\,\mathrm{tg}\,\vartheta = \mathrm{tg}\,\vartheta_0;$$

richtig interpretiert, sagt sie aus, *dafs die Kreiselspitze einen gröfsten Kreis beschreibt.*

Hosted by Google

Die Kreiselspitze hat nämlich im XYZ-System die Koordinaten

$$X = Y = 0, \quad Z = 1;$$

ihre Koordinaten im xyz-System werden daher nach den Substitutionsformeln (5) von pag. 19

$$x = \sin\vartheta \sin\psi, \quad y = -\sin\vartheta\cos\psi, \quad z = \cos\vartheta.$$

Mithin können wir die Gleichung (9) unserer Bahnkurve auch so schreiben:

$$x = \operatorname{tg}\vartheta_0 z.$$

Dies ist aber die Gleichung einer Ebene durch O, welche aus der Einheitskugel den vorgenannten gröfsten Kreis ausschneidet.

Stellen wir insbesondere die Figurenaxe in der Anfangslage horizontal, so geht unser gröfster Kreis in den Äquator über und wir haben wieder die unendlich schnelle reguläre Präcession des ersten Paragraphen, welche sich jetzt mit unserem Grenzfalle confundiert.

Die Verhältnisse der ersten Paragraphen waren also insofern zu partikulär gewählt. *Bei allgemeiner Anfangslage der Figurenaxe giebt es zwischen der schnellen Präcession und unserem Grenzfalle eine Folge von Übergängen, welche uns in den ersten Paragraphen entschlüpft ist.* Die hier erforderliche Ergänzung kann aber leicht angebracht werden.

Wir stellen hierunter die Bahnkurven der schnellen Präcession und des Grenzfalles in den Figuren 44 und 45 stereographisch dar. Bei ersterer ist die Bahnkurve der Kreis $u = e$, bei letzterem der die Kreise $u = +e$ und $u = -e$ berührende stärker ausgezeichnete Kreis.

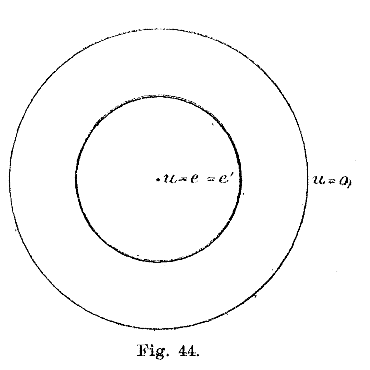


Fig. 44.

Die Übergangskurven zwischen beiden haben folgenden Charakter. Der Begrenzungskreis e' eweitert sich bei wachsendem n allmählich, indem er, von seiner Lage in Fig. 44 ausgehend, den Äquator überschreitet und sich asymptotisch dem Kreise $u = -e$ nähert. Die Bahnkurve, welche zwischen den Kreisen e und e' hin und her laufen mufs, umschliefst in der stereographischen Projektion den ersteren Kreis, während sie von dem letzteren umschlossen wird. Als Typus dieser Bahnkurven können wir etwa die Fig. 30 ansehen, wobei jetzt der innere Kreis den festgehaltenen Ausgangskreis e, der äufsere den Begrenzungskreis e' bedeuten würde. Die Spannweite der einzelnen Teilbögen nimmt mit

Hosted by Google

wachsendem n ab, bis sie für $n = \infty$ sich auf Null reduziert hat, so dafs die Bahnkurve einfach in sich zurückläuft.

Neben den Grenzfall $n = \infty$ bei endlichem N stellt sich der Grenzfall $N = \infty$ bei festgehaltenem n, welcher sich ähnlich wie jener behandeln läfst. Wie erwähnt bleibt die Gleichung $U_1 = 0$ bei Vertauschung von n und N ungeändert, so dafs wir in den Figuren 41 und 42 der Ordinate v ebensowohl die Bedeutung N wie n beilegen

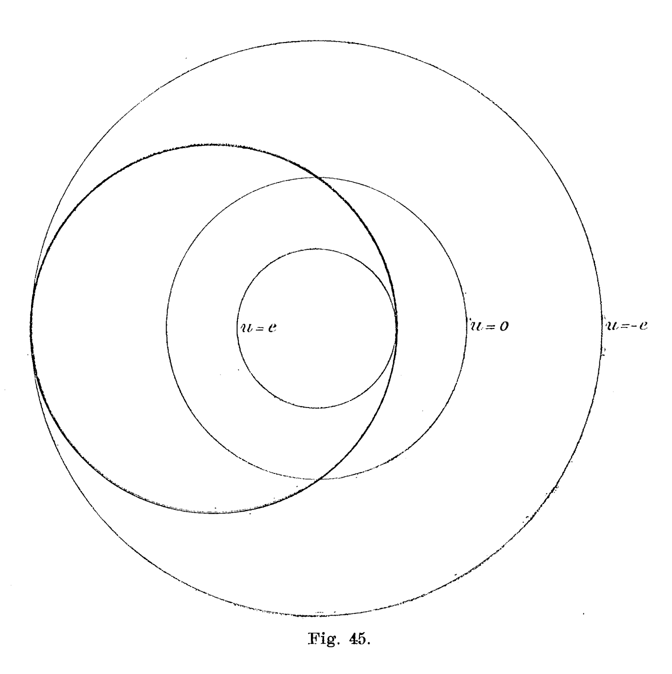


Fig. 45.

können. Hieraus folgt, dafs auch bei wachsendem N und festgehaltenem n der Begrenzungskreis e' asymptotisch in die Lage $-e$ übergeht. Die Kreiselspitze oscilliert also auch in diesem Grenzfalle mit unendlicher Geschwindigkeit zwischen den beiden Kreisen e und $-e$ auf und ab. Nur bei horizontaler Anfangslage der Figurenaxe fallen die beiden Begrenzungskreise zusammen, die Amplitude der Oscillation wird in der Grenze verschwindend klein und wir haben den in Fig. 28 dargestellten Typus der pseudoregulären Präcession. In allen anderen Fällen dagegen wird die Bahnkurve in der Grenze $N = \infty$ ein wesentlich davon verschiedenes Bild darbieten.

Unter welchen Umständen bei allgemeiner Anfangslage der Figurenaxe der besonders interessante Fall der pseudoregulären Präcession zustande kommt, wird im nächsten Kapitel ausführlich darzustellen sein.

3) Wir wollen schliefslich noch die Möglichkeit von *Spitzen- und*

Hosted by Google

Schleifenbildung untersuchen. Die Bahnkurve kann nur dann auf den Parallelkreisen e oder e' mit Spitzen aufsitzen, wenn für $u = e$ oder e' $\frac{d\psi}{du} = 0$ wird. Wir schliefsen daraus, ebenso wie pag. 242, dafs die Bedingung für das Auftreten von Spitzen an den Kreisen e und e' bez. lautet:

$$n - Ne = 0, \quad n - Ne' = 0.$$

Was den Ausgangskreis e betrifft, so zeigt sich also, dafs für ein bestimmtes Verhältnis von $n : N$ allemal Spitzenbildung eintreten wird. Im § 2 lag nur der besondere Fall vor, dafs dieses Verhältnis gleich Null war, dafs also, unabhängig von dem Werte des Eigenimpulses, Spitzenbildung immer dann auftrat, wenn der seitliche Anstofs gleich Null genommen wurde.

Um auch das Auftreten von Spitzen an dem Begrenzungskreise e' bequem übersehen zu können, greifen wir wieder auf unsere Kurven dritter Ordnung zurück. Denken wir uns N festgehalten und n variabel $(n = v)$, so wird unsere obige Bedingung in der uv-Ebene durch die Gerade

$$v - Nu = 0$$

dargestellt, welche die Berührungspunkte der Tangenten $u = \pm 1$ verbindet und in den Figuren 41, 42 strichpunktiert gezeichnet ist. Die Frage ist, ob diese Gerade die C_3 innerhalb des mechanisch gültigen Intervalles schneidet oder nicht.

Zwei Schnittpunkte fallen in die Punkte $u = \pm 1$, $v = \pm N$. Ihnen entspricht aber keine eigentliche Spitzenbildung, weil sich in diesem Falle der Begrenzungskreis e' auf einen einzelnen Punkt, den Nord- oder Südpol zusammengezogen hat. Was den dritten Schnittpunkt betrifft, so zeigt der Anblick unserer Kurven unmittelbar, dafs er auf dem unpaaren Zuge liegt im Falle des starken, auf dem paaren Zuge im Falle des schwachen Kreisels.

Bei dem starken Kreisel giebt es daher einen bestimmten Parallelkreis e', auf welchen sich — bei festgehaltenem N und geeignet gewähltem n — die Bahnkurve mit Spitzen aufsetzt, bei dem schwachen Kreisel giebt es keinen solchen Kreis.

Wie wir sahen, entspricht die im ersten Paragraphen entwickelte Figurenserie 29—35 dem Falle eines schwachen Kreisels, so dafs in diesen Figuren eine Spitzenbildung auf dem Kreise e' nicht vorkommen konnte. Es zeigt sich jetzt überdies, dafs das gleiche Vorkommnis im Falle des schwachen Kreisels auch bei beliebiger Lage des Anfangskreises e ausgeschlossen ist. Die frühere Figurenserie bietet insofern für den schwachen Kreisel ein hinreichend allgemeines Bild der Bahn-

Hosted by Google

kurvenfolge. Es bleibt aber noch die Aufgabe bestehen, beim starken Kreisel die kontinuierliche Einordnung der soeben gefundenen Spitzenkurve in die Bahnkurvenserie klarzustellen. Dies soll am Ende dieses Paragraphen geschehen. Vorher wollen wir noch unseren Kurven dritter Ordnung ein Kriterium über das Auftreten von *Schleifen* entnehmen.

Wenn die Gleichung $n - Nu = 0$ für $u = e$ oder e' erfüllt ist, ergiebt sich, wie wir eben sahen, Spitzenbildung. Ist aber diese Gleichung für einen zwischen e und e' gelegenen Wert von u erfüllt, so läuft die Bahnkurve im stereographischen Bilde jedesmal, wo sie den so bestimmten Parallelkreis u überschreitet, in radialer Richtung. Alsdann folgt, wie pag. 242, das Vorhandensein von Schleifen. Geometrisch erkennen wir daher das Auftreten von Schleifen so: Wir ziehen unsere Parallele $v = n$ zur Abscissenaxe und schneiden diese mit der Geraden $v - Nu = 0$. Liegt die Abscisse des Schnittpunktes zwischen e und e', so treten Schleifen auf, liegt sie aufserhalb jenes Intervalles, so sind Schleifen unmöglich.

Wendet man diese Regel auf die C_3 des schwachen Kreisels an, so sieht man sofort, dafs Schleifenbildung nur in dem Intervalle zwischen der auf dem Ausgangskreise e mit Spitzen aufsitzenden Kurve und derjenigen Bahnkurve auftreten kann, welche durch den höchsten Punkt der Kugel hindurchzieht. Ein Beispiel hierfür bietet die Figur 32 von pag. 213.

Dasselbe Intervall ist auch beim starken Kreisel durch Schleifenbildung ausgezeichnet. Hier findet sich aber noch ein zweites Intervall, welches von dem Schnittpunkte der C_3 mit der Geraden $v - Nu = 0$ bis zu ihrem Berührungspunkt mit der Geraden $u = -1$ reicht. Alsdann befindet sich nämlich (vgl. Fig. 41) der Schnittpunkt von $v = n$ mit der Geraden $v - Nu = 0$ rechts von der C_3 und fällt bei der Projektion auf die Abscissenaxe in das Gebiet ee'. Die betreffenden Schleifenkurven schliefsen sich nach der einen Seite an diejenige Bahnkurve, welche sich auf den Kreis e' mit Spitzen aufsetzt, nach der anderen Seite an die Kurve, welche durch den Südpol der Einheitskugel hindurchzieht, kontinuierlich an.

Bei dem schwachen Kreisel haben wir also ein, bei dem starken zwei Intervalle mit Schleifenbildung. —

Wir wollen zum Schlusse, wie bereits in Aussicht genommen, die Bahnkurvenserie des ersten Paragraphen für den Fall des starken Kreisels dahin ergänzen, dafs wir den Übergang von der langsamen regulären Präcession bis zu dem Grenzfalle $n = \infty$ durch die Fälle der Schleifen- und Spitzenbildung hindurch verfolgen.

Hosted by Google

Wir gehen von der langsamen regulären Präcession aus, geben N einen festen, positiven Wert und lassen n abnehmen. Gleichzeitig mit n nimmt auch der Wert e' zunächst gleichförmig ab, wie aus Fig. 41 ersichtlich.

Die Bahnkurve berührt dabei im stereographischen Bilde den Ausgangskreis von aufsen, indem sie ihn umschliefst, den zweiten Begrenzungskreis von innen. Für einen gewissen oben konstruierten Wert von n tritt an Stelle der Berührung des Kreises e' die Spitzenbildung an diesem Kreise. Bei weiter abnehmendem n lösen sich die Spitzen in Schleifen auf Dieser Charakter der Bahnkurve bleibt bestehen, bis n den Wert $-N$ erreicht hat, wo sich der Kreis e' auf den Südpol zusammenzieht und dementsprechend sein stereographisches Bild unendlich grofs geworden ist. Von jetzt ab erweitert sich der Kreis e' wieder (d. h. er verengert sich im stereographischen Bilde) und strebt asymptotisch dem Parallelkreise $u = -e$ zu. Die Bahnkurve nimmt dabei mehr und mehr die in Fig. 45 verzeichnete einfache Gestalt an.

§ 8. Über die numerische Berechnung der elliptischen Integrale für t und ψ.

Bei einem Probleme der Anwendungen, wie es hier vorliegt, dürfen wir uns nicht damit begnügen, die Möglichkeit der Rechnung in einem allgemeinen Schema darzuthun. Wir müssen vielmehr bis zur wirklichen numerischen Durchführung vorzudringen suchen. Während die älteren Mathematiker bis Gaufs und Jacobi incl. stets bemüht waren, ihre Resultate nicht nur durch konvergente, sondern auch durch gut konvergente, praktikable Prozesse darzustellen, geht die augenblickliche Entwickelung der Mathematik vielfach dahin, die numerische Exekutive über Gebühr zu vernachlässigen. Demgegenüber möchten wir in der numerischen Durchführung einer Theorie geradezu den Schlufsstein des Gebäudes erblicken, dem wir keine geringere Wichtigkeit und kein geringeres Interesse beimessen, wie jedem anderen Bestandteile des Ganzen. Speziell sind wir bei Aufgaben, welche auf elliptische Funktionen führen, dank der hohen Entwickelung dieser Theorie, in der angenehmen Lage, die numerische Auswertung ohne alle Schwierigkeit bewerkstelligen zu können, wie sich in diesem Paragraphen zeigen wird.

Es handle sich zunächst um ein Integral von der Form unseres t:

$$t = \int \frac{du}{\sqrt{U}}, \tag{1}$$

in welchem U irgend ein Polynom dritten oder vierten Grades in u bedeutet. Wir setzen von U nur voraus, dafs die Wurzeln $U = 0$ reell

Hosted by Google

sind. Man bezeichnet ein solches Integral als ein *elliptisches Integral erster Gattung*, weil es sich stets auf diejenige Normalform bringen läſst, die Legendre als „fonction de première espèce" eingeführt hat. Die Bezeichnung überall endliches Integral, welche an das Verhalten von t in der komplexen Ebene anknüpft und somit die Integrale erster Gattung in funktionentheoretischer Hinsicht charakterisiert, kann erst im sechsten Kapitel erläutert werden.

Die Legendresche Normalform des Integrals erster Gattung ist in der Legendreschen Bezeichnung die folgende:

$$F(k, \varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}; \tag{2}$$

hier heiſst φ die Amplitude, k der Modul des Integrals; man setzt voraus $0 \leqq \varphi \leqq \pi/2$, $0 < k < 1$. Wird $\sin^2 \varphi = x$ gesetzt, so können wir auch schreiben:

$$F(k, \varphi) = \frac{1}{2} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(1-k^2 x)}}. \tag{2'}$$

Fast alle Methoden, welche zur Auswertung der elliptischen Integrale erster Gattung angegeben werden, stimmen darin überein, daſs sie zunächst die Transformation des vorgelegten Integrales auf die Legendresche Normalform erfordern. Hiervon machen auch diejenigen Autoren keine Ausnahme, welche wie Schwarz*) und Halphen*) von der Weierstrassischen Theorie ausgehen und die Formeln der älteren Theorie in die Weierstrassischen Bezeichnungen übersetzen. So wichtig aber diese Theorie in theoretischer Hinsicht ist, so scheint sie doch nach der numerischen Seite über die ältere Theorie keinen eigentlichen Fortschritt gemacht zu haben. Wir möchten daher vorschlagen, bei numerischen Fragen direkt auf die Legendreschen Bezeichnungen und Begriffe zurückzugreifen, anstatt sie jedesmal durch die Weierstrassischen zu umschreiben.

Um die Transformation des Integrales (1) auf die Legendresche Normalform ausführen zu können, muſs man die Wurzeln der Gleichung $U = 0$ aufsuchen. Wir beschränken uns auf den beim Kreisel vorliegenden Fall, daſs U ein Polynom dritten Grades ist, so daſs wir nur eine kubische Gleichung zu lösen haben. Diese Gleichung reduziert sich sogar, da wir die Wurzel e als bekannt ansehen (vgl. pag. 239), auf die quadratische Gleichung $U_1 = 0$ mit den Wurzeln e' und e''.

*) Vgl. H. A. Schwarz: Formeln und Lehrsätze zum Gebrauch der elliptischen Funktionen, und Halphen: Théorie des fonctions elliptiques, Bd. I. Kap. 8.

Hosted by Google

Zu den so bestimmten Wurzeln e, e', e'' müssen wir noch nach pag. 226 den „vierten Verzweigungspunkt“ ∞ als gleichberechtigt hinzunehmen.

Wir wollen etwa $P > 0$ voraussetzen und dann die Bezeichnung der Wurzeln e, e', e'' so wählen, dafs ihre Reihenfolge, wie in dem Schema $P > 0$ von pag. 226, diese wird:

$$-1 < e < e' < +1 < e'' < \infty.$$

Die Überführung des Integrales (1) in die Form (2') läfst sich nun allemal durch *lineare Transformation* bewirken, d. h. so, dafs wir die neue Integrationsvariable x gleich einer linearen Funktion der ursprünglichen u setzen. Gleichzeitig läfst sich stets erreichen, dafs die in (2') vorkommenden Gröfsen x und k reelle Zahlen zwischen 0 und 1 werden. Die Transformationsformeln lauten dabei verschieden, je nachdem das ursprüngliche Integrationsintervall in dem Gebiete $e\,e'$, $e'e''$, ... liegt.

Handelt es sich z. B. um ein Integral in dem Intervalle $e\,e'$ mit der unteren Grenze e und der oberen Grenze u, so können wir unsere Transformation so einrichten, dafs die Werte e, e', ∞ bez. in die Werte 0, 1, ∞ übergehen. Alsdann verwandelt sich der zwischen e' und ∞ gelegene Punkt e'' der u-Axe in einen zwischen 1 und ∞ gelegenen Punkt der x-Axe, welchen wir $1/k^2$ nennen, wobei also k^2 einen positiven echten Bruch bedeutet. Gleichzeitig geht die zwischen e und e' gelegene obere Grenze u des ursprünglichen Integrales in die zwischen 0 und 1 gelegene obere Grenze des neuen über.

Die hierzu erforderliche lineare Transformation lautet nun ersichtlich folgendermafsen:

$$\frac{u-e}{e'-e} = x,$$

woraus sich ergiebt

$$\frac{e''-e}{e'-e} = \frac{1}{k^2}.$$

Unser Polynom U, welchem wir die Form geben können

$$U = c^2(u-e)(e'-u)(e''-u),$$

unter c^2 den Koeffizienten von u^3, d. h. $\frac{2P}{A}$ verstanden, geht bei Einführung von x in den folgenden Ausdruck über

$$U = c^2(e'-e)^3 x(1-x)\left(\frac{1}{k^2}-x\right) = \frac{c^2(e'-e)^3}{k^2}\,x(1-x)(1-k^2x).$$

Das ursprüngliche Integral

$$t = \int_e^u \frac{du}{\sqrt{U}} = \frac{1}{c}\int_e^u \frac{du}{\sqrt{(u-e)(e'-u)(e''-u)}}$$



nimmt daher die Gestalt an:

$$(3)\qquad t = \pm \frac{k}{c\sqrt{e'-e}}\int\limits_0^x \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(1-k^2x)}} = \pm\sqrt{\frac{2A}{P(e''-e)}}\,F(k,\varphi),$$

wo die Amplitude φ und der Modul k die folgende Bedeutung haben:

$$(3')\qquad \varphi = \arcsin\sqrt{\frac{u-e}{e'-e}},\quad k = \sqrt{\frac{e'-e}{e''-e}},$$

und wo $F(k, \varphi)$ das in (2) definierte Legendresche Integral ist. Das Vorzeichen von t hängt davon ab, in welcher der in Fig. 38 von pag. 226 schematisch dargestellten Überdeckungen wir die Integration ausführen wollen.

Handelt es sich andrerseits um ein Integral, dessen obere und untere Grenze in dem Gebiete $(-\infty\, e)$ gelegen ist, so wollen wir die Transformationsgleichung zwischen u und x so einrichten, daſs die Punkte $-\infty$, e, e'' bez. in die Punkte 0, 1, ∞ übergeführt werden. Wiederum entspricht dann dem zwischen e und e'' gelegenen Punkte e' ein zwischen 1 und ∞ gelegener Wert von x, welchen wir $1/k'^2$ nennen, so daſs auch k'^2 einen positiven echten Bruch bezeichnet.

Die lineare Transformation, welche die gewünschte Überführung leistet, wird jetzt offenbar:

$$\frac{e''-e}{e''-u} = x,$$

so daſs wir für k'^2 folgenden Wert erhalten

$$\frac{e''-e}{e''-e'} = \frac{1}{k'^2}.$$

Ersetzen wir jetzt u in dem Ausdrucke U durch x, so wird

$$U = -c^2(e-u)(e'-u)(e''-u) = -c^2(e''-e)^3\,\frac{x(1-x)(1-k'^2x)}{x^4}.$$

Infolgedessen ergiebt sich, wenn etwa $-\infty$ die untere, $u < e$ die obere Grenze des ursprünglichen Integrals ist:

$$t = \frac{\pm i}{c\sqrt{e''-e}}\int\limits_0^x \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(1-k'^2x)}} = \pm i\sqrt{\frac{2A}{P(e''-e)}}\,F(k',\varphi);$$

die Amplitude φ und der Modul k' sind dabei nach dem Vorstehenden folgendermaſsen bestimmt:

$$\varphi = \arcsin\sqrt{\frac{e''-e}{e''-u}},\quad k' = \sqrt{\frac{e''-e'}{e''-e}}.$$

Beide Gröſsen genügen wieder den oben gestellten Bedingungen:

$$0 < \varphi < \frac{\pi}{2},\quad 0 < k' < 1.$$

Hosted by Google

Der Modul k', welcher mit dem in (3') definierten Modul k durch die Gleichung

$$k^2 + k'^2 = 1$$

zusammenhängt, heifst übrigens „der zu k komplementäre Modul".

In ähnlicher Weise gelangt man immer zum Ziele, wie auch das ursprüngliche Integrationsintervall zwischen den Punkten e, e', e'', ∞ gelegen sei, wobei wir nur voraussetzen, dafs es keinen dieser Punkte in seinem Innern enthalte, in welchem Falle wir das Intervall in Teilintervalle zerlegen müfsten. Die allgemeine Regel zur Herstellung der jedesmal geeigneten Transformationsformeln ist folgende:

Man setze auf der u-Axe einen bestimmten Durchlaufungssinn fest und ordne die beiden Verzweigungspunkte, innerhalb deren das ursprüngliche Integrationsintervall liegt, in der Reihenfolge, welche dem Durchlaufungssinn entspricht, den Punkten 0 *und* $+1$ *zu. Sodann gehe man längs der u-Axe, die man sich im Unendlichen geschlossen zu denken hat, im festgesetzten Sinne über das Integrationsgebiet hinaus und ordne den übernächsten Verzweigungspunkt, auf den man dieser Verabredung zufolge stöfst, dem Punkte ∞ zu. Es läfst sich dann immer eine lineare Transformation zwischen u und x angeben, welche die genannte Zuordnung leistet. Dieselbe verwandelt den vierten Verzweigungspunkt, über dessen Zuordnung wir noch nicht disponiert haben, notwendig in einen Punkt, welcher auf der x-Axe zwischen $+1$ und $+\infty$ liegt; alle Punkte des ursprünglichen Integrationsgebietes entsprechen gleichzeitig Werten von x, welche zwischen* 0 *und* 1 *enthalten sind.*

Übrigens läfst sich die Zuordnung der u- und x-Axe in dieser Weise immer noch auf zwei Arten herstellen, indem ja in unserer Regel der Durchlaufungssinn der u-Axe willkürlich blieb.

Wir wollen noch für vier spezielle Integrale t, welche im sechsten Kapitel eine wesentliche Rolle spielen, die betreffende Transformation auf die Legendresche Normalform hinschreiben. Es sind dieses die folgenden Integrale:

$$\omega = \int_e^{e'} \frac{du}{\sqrt{U}}, \quad i\omega' = \int_e^{-\infty} \frac{du}{\sqrt{U}}, \quad ia = \int_{-1}^{e} \frac{du}{\sqrt{U}}, \quad ib = \int_{e'}^{+1} \frac{du}{\sqrt{U}}.$$

Das erste derselben haben wir schon im dritten Paragraphen betrachtet, es giebt die Zeit an, welche die Kreiselspitze braucht, um einen Halbbogen ihrer Bahnkurve zu durchlaufen. Die übrigen haben keine mechanische Bedeutung im elementaren Sinne.

Es ergeben sich nun aus den Gleichungen (3) und (4) bez. aus unserer allgemeinen Regel die folgenden Ausdrücke für unsere vier Integrale:



$$(5)\qquad \omega = MF\left(k, \frac{\pi}{2}\right), \quad \omega' = MF\left(k', \frac{\pi}{2}\right), \quad a = MF(k', \varphi_a), \quad b = MF(k', \varphi_b),$$

wo die Zeichen M, k, k', φ_a, φ_b die folgende Bedeutung haben:

$$(5')\quad \begin{cases} M = \sqrt{\dfrac{2A}{P(e''-e)}}, \quad k = \sqrt{\dfrac{e'-e}{e''-e}}, \quad k' = \sqrt{\dfrac{e''-e'}{e''-e}} = \sqrt{1-k^2} \\ \varphi_a = \arcsin \sqrt{\dfrac{1+e}{1+e'}}, \qquad \varphi_b = \arcsin \sqrt{\dfrac{e''-e}{e''-e'} \cdot \dfrac{1-e'}{1-e}}. \end{cases}$$

Die Aufgabe, ein beliebiges elliptisches Integral erster Gattung numerisch auszuwerten, ist somit reduziert auf die einfachere Aufgabe, den Wert des Legendreschen Integrales $F(k, \varphi)$ zu finden. Die verschiedenen Wege, welche hierzu führen, sollen in Kürze namhaft gemacht werden.

1. Der nächstliegende Weg wäre der, die Quadratwurzel unter dem Integralzeichen nach dem binomischen Lehrsatz in eine *Reihe* zu verwandeln und die Integration gliedweise auszuführen. Die Reihen, zu denen man so gelangt, sind aber bei einem von Null einigermaſsen verschiedenen k^2 nicht hinreichend bequem. Um ihre Konvergenz zu verbessern, müſste man diese Methode mit der sogleich zu nennenden zweiten kombinieren, wie solches in der That bei Schwarz*) durchgehends geschieht.

2. Eine theoretisch und praktisch gleich schöne Methode besteht darin, die Integrationsvariable einer quadratischen Transformation von solcher Beschaffenheit zu unterwerfen, daſs das Integral erster Gattung in ein ebensolches, nur mit verändertem Modul und transformierter Amplitude, übergeht. In erster Linie ist hier die sog. *Landensche Transformation* zu nennen. Der transformierte Modul k_1 wird dabei einfach gleich dem Verhältnis des geometrischen zum arithmetischen Mittel aus dem Modul k und der Zahl 1; man hat also: $k_1 = 2\sqrt{k}/(1+k)$. Durch fortgesetzte, geeignete Anwendung dieser Transformation wird man auf eine Serie von Moduln $k_1, k_2, k_3, \ldots$ (eine „Modulleiter") geführt, deren einzelne Terme unaufhörlich zunehmen und sich dem Werte 1 nähern. Im umgekehrten Sinne ausgeführt, liefert also die Landensche Transformation eine nach 0 abnehmende Modulleiter. Ist aber auf solche Weise der Modul des elliptischen Integrales genügend klein gemacht, so wird die Integration in einfachster Weise ausführbar. In der That haben wir, unter k_n einen genügend kleinen Modul, unter φ_n den zugehörigen transformierten Wert der Amplitude verstanden,

*) Vgl. z. B. Art. 48 der Formelsammlung.

Hosted by Google

direkt: $F(k_n, \varphi_n) = \varphi_n$. Diese Methode ist von Legendre mit grofsem Erfolge zur Berechnung seiner Tafeln gehandhabt worden.

Die sogenannte *Methode des arithmetisch-geometrischen Mittels von Gaufs**) ist von der vorgenannten nicht wesentlich verschieden; sie zeichnet sich vor jener nur durch formal gröfsere Eleganz aus.

Statt der *quadratischen* kann man auch *Transformationen höherer Ordnung* zur numerischen Berechnung der elliptischen Integrale verwerten, wie solches zum erstenmale von Jacobi**) durchgeführt worden ist.

3. Eine dritte Methode beruht auf der *Umkehr der elliptischen Integrale* und auf der Einführung der *ϑ-Funktionen.* Sie führt, ebenso wie die vorige Methode, sehr schnell zum Ziele, kann aber an dieser Stelle noch nicht besprochen werden.***)

4. Man könnte ferner daran denken, die elliptischen Integrale direkt durch *mechanische Quadratur*, eventuell mit Zuhülfenahme eines Integrationsapparates auszuwerten. Dieses Verfahren bietet den Vorteil, auf beliebige elliptische Integrale direkt anwendbar zu sein und macht die Transformation auf die Normalform überflüssig. Andrerseits verlangt dasselbe aber die Berechnung oder Zeichnung der Gröfse $\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$ bez. $\frac{1}{\sqrt{U}}$ für eine gröfsere Reihe von Punkten des Integrationsintervalles. Hierdurch wird der genannte Vorteil reichlich aufgewogen, so dafs diese Methode mit den übrigen kaum wird konkurrieren können.

5. Eine letzte Methode, welche wir ganz besonders empfehlen möchten, besteht darin, überhaupt nicht zu rechnen, sondern die *Legendreschen Tafeln*†) nachzusehen. In der That werden wir uns dieses schönen Hülfsmittels ebensowenig entschlagen wollen, als wir den Logarithmus einer Zahl anders wie aus den Logarithmentafeln zu finden gewohnt sind. Der Gebrauch der Legendreschen Tafeln ist sehr bequem. Man hat nur nötig, von dem Modul k zu einem Winkel Θ mittels der trigonometrischen Tafeln überzugehen, welcher sich aus der Gleichung $k = \sin\Theta$ bestimmt. Dann findet man für alle vollen

*) Gaufs: Ges. Werke, Bd. III, pag. 361 u. ff.

**) Jacobi: Ges. Werke, Bd. I, pag. 31; man vergl. auch Klein-Fricke, Modulfunktionen, II pag. 111.

***) Ausführlich dargestellt von Schellbach: Die Lehre von den elliptischen Integralen und den Thetafunktionen, Berlin 1864, namentlich zu vgl. 1. Abteilung, 4. Abschnitt.

†) Bd. II des traité des fonctions elliptiques, Paris 1826, pag. 284—363 u. pag. 222—245. Es wäre sehr zu wünschen, dafs diese heutzutage ziemlich seltenen Tafeln durch Neuabdruck leichter zugänglich gemacht würden.



Grade von Θ und φ zwischen 0 und 90 den Wert von $F(\sin\Theta, \varphi)$ auf 9 Decimalen genau in den Tabellen. Die sogenannten vollständigen Integrale erster Gattung, d. h. die Werte von $F\left(\sin\Theta, \frac{\pi}{2}\right)$ sind von Legendre sogar noch genauer berechnet. Neben den Integralen erster Gattung geben die Tafeln auch die sogenannten Integrale zweiter Gattung $E(k, \varphi)$ an, auf deren Definition wir hier nicht einzugehen brauchen.

Hiernach wird man auf eine der vorgenannten Methoden nur dann zurückzugreifen gezwungen sein, wenn es sich um die Auswertung eines Integrales erster Gattung mit komplexen Grenzen oder mit komplexem Modul handelt.

Als Beispiel berechnen wir in diesem Sinne etwa die Zeit, welche die Kreiselspitze in den Figuren 24 bis 28 gebraucht, um von einem tiefsten Punkte ihrer Bahn bis zu dem nächstfolgenden höchsten Punkte zu gelangen, d. h. den Wert der halben Periode ω.

Während wir in jenen Figuren früher $P = -1$ voraussetzten, nehmen wir, um unsere letzten Formeln direkt anwenden zu können, $P = +1$, müssen dafür aber (nach pag. 250) die auf pag. 243 angegebenen Werte der Gröſse e' im Vorzeichen umkehren. Überdies würden diese Werte jetzt, da sie die kleinste der in Betracht kommenden Wurzeln von $U = 0$ darstellen, mit e zu bezeichnen sein. Die zweite Wurzel entspricht dem in allen jenen Figuren als Grenzkreis auftretenden Äquator, so daſs wir haben: $e' = 0$. Die noch fehlende Wurzel e'' ergiebt sich darauf aus der quadratischen Gleichung $U_1 = 0$, welche in unserem Falle (vgl. pag. 240) die einfache Gestalt annimmt

$$uN^2 + 2AP(1 - u^2) = 0.$$

Setzen wir hier $P = 1$ und wie früher auch $A = 1$, so ergiebt sich

$$u^2 - \frac{1}{2}uN^2 - 1 = 0.$$

Diese Gleichung zeigt, daſs e'' einfach das Reciproke der auf pag. 243 angegebenen Wurzel wird. Hiernach sind die in Gleichung (5) vorkommenden Gröſsen M, sowie k und der zugehörige Winkel Θ sehr leicht zu berechnen. Den Wert von $\lg F\left(k, \frac{\pi}{2}\right)$ entnehmen wir alsdann der Tafel I von Legendre und berechnen die gesuchte Gröſse ω nach Gleichung (5). Das Resultat stellen wir in der folgenden Tabelle zusammen.

Hosted by Google

$$A = 1, \quad P = -1, \quad n = 0, \quad e' = 0.$$

Fig.	e''	$\lg_{10} M$	k	Θ	$\lg_{10} F\left(k, \frac{\pi}{2}\right)$	ω
24	1	0	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	45°	0,26813	1,854
25	$\frac{100}{99}$	0 (circa)	$\sqrt{\frac{9801}{19801}}$	44,7	0,26709	1,848
26	$\frac{10}{9}$	0,99879—1	$\sqrt{\frac{81}{181}}$	42,0	0,25820	1,807
27	2	0,95154—1	$\sqrt{\frac{1}{5}}$	26,6	0,22007	1,484
28	∞	$-\infty$	unbest.	unbest.	unbest.	0

Wir sehen hieraus, daſs die Durchlaufungsdauer des einzelnen Halbbogens bei wachsendem N fortgesetzt abnimmt, bis sie in Fig. 28 den Wert 0 erreicht. Wenn wir an der Verabredung festhalten, daſs die Werte von A, P, n und N im absoluten Maſssystem aufzufassen sind, so bedeutet der angegebene Wert von ω Sekunden.

Wichtiger noch als die Beziehung zwischen t und u ist für uns die Abhängigkeit zwischen ψ und u, weil uns diese direkt die Gestalt der Bahnkurve liefert. Wir haben uns daher weiter über die Berechnung des elliptischen Integrales ψ zu orientieren.

Um auch hier an Legendre anknüpfen zu können, wollen wir ψ durch die sogenannten *Normalintegrale dritter Gattung von Legendre* ausdrücken. Sein Normalintegral dritter Gattung definiert Legendre folgendermaſsen:

$$\Pi(k, \varphi, p) = \int_0^\varphi \frac{1}{1 - p \sin^2 \varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Die Gröſse p, welche bei Legendre als reell vorausgesetzt wird und welche übrigens, damit das auf reellem Wege genommene Integral einen Sinn hat, nicht zwischen $+1$ und $+\infty$ liegen darf, heiſst der *Parameter* des Integrales.

Wir wollen zeigen, daſs sich ψ als lineare Kombination zweier Normalintegrale dritter Gattung darstellen läſst.

Zu dem Zwecke zerlegen wir zunächst den unter dem Integralzeichen vorkommenden Faktor $\frac{n - Nu}{A(1 - u^2)}$ in Partialbrüche, d. h. wir setzen

$$\frac{n - Nu}{A(1 - u^2)} = \frac{1}{2A}\left(\frac{n + N}{1 + u} + \frac{n - N}{1 - u}\right),$$

so daſs wir erhalten:

$$\psi = \frac{n+N}{2A}\int \frac{1}{1+u}\,\frac{du}{\sqrt{U}} + \frac{n-N}{2A}\int \frac{1}{1-u}\,\frac{du}{\sqrt{U}}.$$

Ferner werden wir die Gröſse $\frac{du}{\sqrt{U}}$ durch eine der oben angegebenen Transformationen auf die Form $\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(1-k^2x)}}$ bringen. Wir können uns dabei auf den Fall beschränken, daſs die ursprüngliche Integrationsvariable in dem Gebiete ee' verläuft. Alsdann haben wir diejenige Transformation anzuwenden, welche oben zu der Gleichung (3) führte, wir haben also die neue Integrationsvariable x durch die Gleichung zu definieren:

$$\frac{u-e}{e'-e} = x.$$

Hieraus ergiebt sich

$$1 \pm u = (1 \pm e) \pm (e'-e)\,x,$$

während sich gleichzeitig die Gröſse $\frac{du}{\sqrt{U}}$ ebenso transformiert, wie in (3). Der Ausdruck von ψ wird daher:

$$\psi = \frac{n+N}{A}\sqrt{\frac{A}{2P(e''-e)}}\int \frac{1}{1+e+(e'-e)\,x}\,\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(1-k^2x)}}$$

$$+ \frac{n-N}{A}\sqrt{\frac{A}{2P(e''-e)}}\int \frac{1}{1-e-(e'-e)\,x}\,\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(1-k^2x)}}.$$

Um von hier aus die Legendresche Normalform herzustellen, haben wir nur $x = \sin^2\varphi$ zu setzen und bezw. $1+e$ oder $1-e$ aus dem ersten oder zweiten Integrale herauszuziehen. *Dann ergiebt sich direkt ψ als lineare Kombination zweier Normalintegrale in der Form*

$$\psi = C_1\,\Pi(k, \varphi, p_1) + C_2\,\Pi(k, \varphi, p_2),$$

wo die Gröſsen k, φ durch die früheren Gleichungen (3') definiert sind und wo die C_1, C_2, p_1, p_2 die folgende Bedeutung haben:

$$C_1 = \frac{n+N}{1+e}\sqrt{\frac{2}{AP(e''-e)}}, \qquad C_2 = \frac{n-N}{1-e}\sqrt{\frac{2}{AP(e''-e)}},$$

$$p_1 = \frac{e'-e}{1+e}, \qquad p_2 = -\frac{e'-e}{1-e}.$$

Es würde also des Weiteren nur noch nötig sein, die numerischen Werte der Legendreschen Normalintegrale dritter Gattung auf möglichst einfachem Wege zu finden. Leider giebt es und kann es zu diesem Zwecke keine Tafeln geben. Da nämlich der Wert des Integrales $\Pi(k, \varphi, p)$ von drei veränderlichen Gröſsen abhängt, müſsten die in Rede stehenden Tafeln Tafeln mit dreifachem Eingange sein. Solche Tafeln lassen sich aber nur mit unverhältnismäſsiger Mühe berechnen und überhaupt nicht drucken.

Hosted by Google

Immerhin können wir auch hier aus den Legendreschen Tabellen Nutzen ziehen, wenn wir uns auf die Berechnung der sog. „vollständigen Integrale dritter Gattung“ $\Pi\left(k, \frac{\pi}{2}, p\right)$ beschränken, was für unsere Bahnkurven bedeuten würde, daſs wir nur nach der Spannweite $2\psi_\omega$ der einzelnen Teilbögen fragen und auf die Konstruktion der einzelnen Kurvenpunkte verzichten. Wie nämlich Legendre*) gezeigt hat, lassen sich seine vollständigen Integrale dritter Gattung allemal auf Integrale der ersten und zweiten Gattung reduzieren, welche in ihren oberen Grenzen den Parameter p enthalten und welche zum Modul teils den Modul k des Integrales Π, teils den komplementären Modul haben. Da wir nun die Werte der Integrale erster und zweiter Gattung in den Tafeln direkt nachsehen können, so gestatten diese Reduktionsformeln die vollständigen Integrale dritter Gattung und mithin auch die Gröſse von ψ_ω verhältnismäſsig schnell zu finden, von deren Wert die Gestalt der Bahnkurve in erster Linie abhängt.

Auf diesem Wege sind die Spannweiten der Teilbögen in den Figuren des ersten Paragraphen berechnet worden.**) Auf die Ausführung dieser Rechnungen, sowie auf die eigentliche Bedeutung der Reduktionsformeln wollen wir indessen an dieser Stelle nicht eingehen, da wir im sechsten Kapitel die oben unter (3) genannte Methode ausführlich behandeln werden, welche jedesmal beliebig viele Punkte der Bahnkurve auf kürzestem Wege zu finden lehrt.

§ 9. Über angenäherte Berechnung der Kreiselbahnen.

Der Gegensatz zwischen angenäherter und genauer Rechnung ist im allgemeinen kein scharfer. Jede numerische Rechnung wird, sofern es sich nicht zufällig um rationale Zahlen handelt, immer nur bis zu einem gewissen Grade der Genauigkeit durchgeführt. Der Gegensatz sollte eigentlich nicht heiſsen: „*Genaue und angenäherte Berechnung*“, sondern vielmehr „*Rechnung mit beliebiger und mit begrenzter Annäherung*“. Während die Berechnung der elliptischen Integrale nach den Methoden des vorigen Paragraphen, (sofern wir nicht gerade die Legendreschen Tafeln benutzen), bis zu jedem beliebigen Grade der Genauigkeit getrieben werden kann, werden wir die jetzt auseinanderzusetzenden

*) Vgl. den ersten Band des *Traité*, Kap. 23, wo je nach dem Werte des Parameters drei verschiedene Reduktionsformeln aufgestellt werden, sowie auch das oben genannte Buch von Schellbach, Abt. 1, Abschn. 10.

**) Ich habe mit Dank zu erwähnen, daſs ich bei dieser Berechnung durch Hrn. stud. math. Blumenthal in ausgiebiger Weise unterstützt worden bin.

A. Sommerfeld.

Hosted by Google

Methoden nicht soweit führen, daſs sie eine beliebige Verschärfung ohne Weiteres zulassen — ein Verfahren, welches sehr häufig in praktischen Anwendungen Platz greift.

Sollen derartige Methoden von begrenzter Genauigkeit einen wirklichen Wert haben, so müssen wir vor allem fordern, daſs wir den begangenen Fehler abschätzen können. Dieser Forderung werden wir im Folgenden genüge leisten. Zeigt es sich nun, daſs der Fehler unterhalb der für den vorliegenden Zweck zulässigen Fehlergrenze liegt, so wird uns unsere angenäherte Berechnung dieselben Dienste leisten, wie eine beliebig genau zu gestaltende. In der That werden wir später die interessantesten Fälle der Kreiselbewegung gerade mit den jetzt zu betrachtenden Methoden von begrenzter Genauigkeit behandeln.

Wir betrachten zunächst das elliptische Integral erster Gattung

$$t = \int_e^u \frac{du}{\sqrt{U}},$$

welchem wir (vgl. pag. 261) die Form geben können

$$\sqrt{\frac{2P}{A}}\, t = \int_e^u \frac{du}{\sqrt{(u-e)(e'-u)(e''-u)}}.$$

Dabei setzen wir, wie im vorigen Paragraphen, voraus

$$P > 0 \quad \text{und} \quad -1 < e < e' < +1 < e''.$$

Die Variable u ist während der Integration zwischen die Grenzen e und e' eingeschränkt. Jedenfalls wird daher

$$e'' - e' < e'' - u < e'' - e.$$

Der Integrand ist positiv, solange sich u in der oberen Überdeckung der u-Axe befindet. Indem wir nun für $e'' - u$ den zu kleinen Wert $e'' - e'$ oder den zu groſsen $e'' - e$ einsetzen, vergröſsern oder verkleinern wir den Wert des Integrales. Wir haben daher, solange wir die Integrationsvariable den Verzweigungspunkt e' nicht überschreiten lassen:

$$(1) \quad \frac{1}{\sqrt{e''-e}} \int_e^u \frac{du}{\sqrt{(u-e)(e'-u)}} < \sqrt{\frac{2P}{A}}\, t < \frac{1}{\sqrt{e''-e'}} \int_e^u \frac{du}{\sqrt{(u-e)(e'-u)}}.$$

Die zuletzt hingeschriebenen Integrale lassen sich leicht trigonometrisch ausführen. Wir setzen etwa zu dem Zwecke:

$$(2) \qquad e' + e = 2u_0, \qquad e' - e = 2\varepsilon, \qquad u - u_0 = \delta.$$

Hosted by Google

Hier bedeutet ε den halben Vertikalabstand der beiden Begrenzungskreise, innerhalb deren die Bahnkurve verläuft; u_0 bestimmt denjenigen Parallelkreis, dessen Ebene in der Mitte liegt zwischen den Ebenen der Begrenzungskreise, oder, wie wir kurz sagen wollen, den „mittleren Parallelkreis der Bahnkurve“. δ mifst den Abstand der Kreiselspitze von der Ebene dieses mittleren Parallelkreises. Wir erhalten daraufhin

$$u - e = \varepsilon + \delta, \qquad e' - u = \varepsilon - \delta \tag{3}$$

und

$$\int_e^u \frac{du}{\sqrt{(u-e)(e'-u)}} = \int_{-\varepsilon}^{\delta} \frac{d\delta}{\sqrt{\varepsilon^2 - \delta^2}} = \arcsin\left(\frac{\delta}{\varepsilon}\right) + \frac{\pi}{2}.$$

Mithin wird nach (1)

$$\frac{1}{\sqrt{e''-e}} \arcsin \frac{\delta}{\varepsilon} < \sqrt{\frac{2P}{A}}\,(t - t_0) < \frac{1}{\sqrt{e''-e'}} \arcsin \frac{\delta}{\varepsilon},$$

wo $t_0 = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{A}{2P}}$ gesetzt ist. Zählen wir im Folgenden die Zeit von demjenigen Momente an, wo die Kreiselspitze durch den mittleren Parallelkreis u_0 hindurchgeht, so können wir statt $t - t_0$ einfacher t schreiben.

Wir haben also zwei Grenzen gefunden, zwischen denen die (so gezählte) Zeit t liegen mufs, nämlich die untere Grenze

$$\sqrt{\frac{A}{2P(e''-e)}} \arcsin \frac{\delta}{\varepsilon}$$

und die obere

$$\sqrt{\frac{A}{2P(e''-e')}} \arcsin \frac{\delta}{\varepsilon}.$$

Die fraglichen Näherungsformeln erhalten wir nun einfach, indem wir für t einen zwischen diesen beiden Grenzen gelegenen mittleren Wert substituieren.

Wir ersetzen etwa in den vorigen Formeln $\sqrt{e''-e}$ und $\sqrt{e''-e'}$ durch den mittleren Wert $\sqrt{e''-u_0}$ und schreiben:

$$t = \sqrt{\frac{A}{2P(e''-u_0)}} \arcsin \frac{\delta}{\varepsilon}. \tag{4}$$

Wir wollen vor allem den Fehler abschätzen, den wir hierbei begehen. Derselbe heifse τ und werde in Bruchteilen des ganzen Wertes von t berechnet. Sicher wird τ, vom Vorzeichen abgesehen, kleiner als die Differenz unserer beiden Grenzwerte, dividiert durch den kleineren von ihnen. Wir haben also

Hosted by Google

$$|\tau| < \frac{\sqrt{\frac{1}{e''-e'}} - \sqrt{\frac{1}{e''-e}}}{\sqrt{\frac{1}{e''-e}}}$$

oder

(5) $$|\tau| < \sqrt{\frac{e''-e}{e''-e'}} - 1.$$

Die so gefundene obere Grenze für den „relativen“ Fehler $|\tau|$ hängt enge mit dem Legendreschen Modul k des elliptischen Integrales t zusammen. Nach Gleichung (5′) des vorigen Paragraphen ist nämlich

$$\sqrt{\frac{e''-e}{e''-e'}} = \frac{1}{k'} = \sqrt{\frac{1}{1-k^2}};$$

mithin gilt

(6) $$|\tau| < \frac{1-k'}{k'}.$$

Beispielsweise können wir unsere Näherungsformel dazu benutzen, um die Zeitdauer ω zu berechnen, welche die Kreiselspitze braucht um von dem unteren Parallelkreise $u = e$ bez. $\delta = -\varepsilon$ bis zu dem oberen $u = e'$ bez. $\delta = \varepsilon$ zu gelangen. Aus (4) ergiebt sich der Näherungswert

(7) $$\omega = \sqrt{\frac{A}{2P(e''-u_0)}}\,\pi.$$

Wollen wir gleichzeitig den Genauigkeitsgrad dieser Formel zum Ausdruck bringen, so können wir schreiben, unter ϑ einen unbekannten echten Bruch verstanden:

(7′) $$\sqrt{\frac{A}{2P(e''-u_0)}}\,\pi\left\{1 \pm \vartheta\left(\sqrt{\frac{e''-e}{e''-e'}} - 1\right)\right\}.$$

Wir wollen uns schon hier mit einem Gedanken vertraut machen, der erst im sechsten Kapitel zur vollen Geltung kommen wird. Offenbar ist es vom analytischen Standpunkte aus bequem, in Gleichung (4) von der (unendlich vieldeutigen) Arcus-Sinus-Funktion zu der (eindeutigen) Sinus-Funktion überzugehen. Dies entspricht auch durchaus dem Sinne des mechanischen Problems, bei welchem man doch wünschen wird, die Lage des Kreisels als Funktion der Zeit, statt umgekehrt die Zeit aus der Lage der Kreiselspitze zu berechnen. Wir werden also die Gleichung (4) *umkehren*, indem wir δ bez. u als explicite Funktion von t ausdrücken. Wir bekommen so:

(8) $$\delta = \varepsilon \sin\left\{\sqrt{\frac{2P(e''-u_0)}{A}}\,t\right\}$$

oder nach (2):

(8′) $$u = u_0 + \delta = u_0 + \varepsilon \sin\left\{\sqrt{\frac{2P(e''-u_0)}{A}}\,t\right\}.$$

Hosted by Google

Die entsprechende *Umkehrung* der ursprünglich gewonnenen unendlich vieldeutigen Integrale werden wir später auch an unseren elliptischen Formeln vornehmen.

Unter besonderen Umständen kann es eintreten, dafs der oben bestimmte Fehler τ sehr klein wird. Dann leisten uns unsere Näherungsformeln dieselben Dienste wie die früheren exakten Gleichungen. Die Umstände, unter denen dieses stattfindet, lesen wir aus der Ungleichung (5) ab: Es mufs entweder nahezu $e = e'$ oder es mufs e'' sehr grofs werden. Beide Möglichkeiten zusammenfassend, können wir sagen: es müssen von den vier Verzweigungspunkten e, e', e'', ∞ entweder die beiden ersten, oder die beiden letzten einander sehr nahe rücken.

Die erste Möglichkeit tritt ein, wenn wir von der regulären Präcession, bei welcher e' genau gleich e wird, durch eine kleine Abänderung der Integrationskonstanten zu einer wenig davon verschiedenen Bewegung übergehen. Solche *„der regulären Präcession benachbarte Bewegungen"* sollen im ersten Paragraphen des nächsten Kapitels behandelt und durch Näherungsformeln im Sinne dieses Paragraphen dargestellt werden. Ebendahin gehört auch die *Bewegung des „aufrechten Kreisels" im stabilen Falle,* bei genügend kleiner äufserer Störung (vgl. § 4 und 5 des folgenden Kapitels).

Um zu entscheiden, wann die zweite Möglichkeit, der Fall eines sehr grofsen Wertes von e'', eintritt, wollen wir e'' durch unsere Integrationkonstanten n, N u. s. w. ausdrücken.

Da e' und e'' als Wurzeln der quadratischen Gleichung $U_1 = 0$ bestimmt wurden, ergiebt sich der Wert von $e' + e''$, wenn wir den negativ genommenen Koeffizienten von u in dieser Gleichung durch den von u^2 dividieren. Wir finden also aus Gleichung (2) von pag. 240

$$e'' = \frac{n^2 + N^2 - 2nNe}{2AP(1-e^2)} - e'. \tag{9}$$

Dieser Wert wächst im allgemeinen mit wachsendem n und N, sowie mit abnehmendem P. Es möchte zunächst so scheinen, als ob auch im Falle e gleich oder nahezu gleich ± 1 der Wert von e'' unendlich bez. sehr grofs würde. Dem ist aber nicht so, weil alsdann gleichzeitig mit dem Nenner auch der Zähler verschwindet. Es bedeutet nämlich der Zähler geometrisch das Quadrat der Verbindungslinie zwischen dem Endpunkte der Impulskomponente n und der Impulskomponente N in der Anfangslage $u = e$. Ist nun $e = \pm 1$, so wird diese Verbindungsstrecke ersichtlich gleich Null.

Mithin wird e'' nur dann sehr grofs, wenn eine der Impulskomponenten n, N sehr grofs wird, oder, genauer gesagt, wenn das Quadrat einer dieser Gröfsen im Verhältnis zu der gleichbenannten Gröfse AP

Hosted by Google

eine sehr beträchtliche Zahl darstellt. Dies war pag. 253 u. ff. bei Untersuchung der *Grenzfälle* $n = \infty$, $N = \infty$ der Fall. Wir sehen daher jetzt den Grund ein, weshalb wir in jenen Grenzfällen die Darstellung der Bewegung durch elliptische Integrale entbehren konnten; es würde nunmehr auch leicht sein, den Fehler τ in den früheren Annäherungsformeln genauer abzuschätzen.

Die von uns sogenannte *„pseudoreguläre Präcession“* können wir ebensowohl der ersten wie der zweiten der auf voriger Seite unterschiedenen Möglichkeiten zurechnen. Bei dieser Bewegung, die gleichfalls im nächsten Kapitel untersucht werden soll, wird daher die Anwendung unserer Annäherungsformeln ebenfalls nur einen sehr geringen Fehler ergeben.

Alle diese Einzelfälle sind vom Standpunkte der elliptischen Integrale dadurch charakterisiert, daſs nach (5) der komplementäre Modul k' nahezu gleich 1, d. h. der Legendresche Modul k selbst nahezu gleich Null wird. Daſs wir in einem solchen Falle die Theorie der elliptischen Integrale entbehren und die Bewegung mit groſser Annäherung durch elementare Funktionen darstellen können, ist nach dem vorigen Paragraphen von vornherein klar. Bei verschwindendem Modul k geht nämlich das Legendresche Normalintegral $F(k, \varphi)$ (s. Gleichung (2) von pag. 260) direkt in den Wert der Amplitude φ über, wobei sich φ mittelst der ursprünglichen Variabeln u bez. δ als ein Arcus-Sinus ausdrückt. Dies entspricht genau der im Vorstehenden gegebenen angenäherten Darstellung der Bewegung. Der Fortschritt der jetzigen Betrachtung besteht lediglich darin, daſs wir nunmehr bei nicht verschwindendem k die Gröſse des Fehlers in unsern Annäherungsformeln nach (6) durch die Gröſse von k abschätzen können.

Wir mögen hier noch einmal an die oben geschilderte Berechnung der elliptischen Integrale nach der Methode von Legendre oder Gauſs erinnern. Wie erwähnt, beruht diese Methode auf der fortgesetzten Anwendung gewisser quadratischer Transformationen, welche den Erfolg haben, den Modul des Integrales successive zu verkleinern. In einem derjenigen Fälle nun, wo unsere Annäherungsformeln nur einen geringen Fehler ergeben, wird die Anwendung jener Transformationen überflüssig, indem der Modul von vornherein so klein ist, daſs wir ohne erheblichen Fehler die Integrale direkt auf elementarem Wege auswerten können.

Bei den oben genannten Spezialfällen der pseudoregulären Präcession, der aufrechten Kreiselbewegung u. s. w., liegt also von selbst derjenige Grenzfall vor, den Gauſs und Legendre durch genügend häufige Anwendung ihrer Transformationsmethoden zu erreichen streben.

Hosted by Google

Aufser den Näherungsformeln für u werden wir solche für ψ brauchen. Wir haben dabei von der Gleichung (6) von pag. 238 auszugehen:

(10) $$\psi' = \frac{n - Nu}{A(1-u^2)}.$$

Die rechte Seite zerlegen wir praktischer Weise in Partialbrüche, wie bereits pag. 267 geschehen und erhalten:

(11) $$\psi' = \frac{n+N}{2A(1+u)} + \frac{n-N}{2A(1-u)}.$$

Hier setzen wir, wie in Gleichung (2) von pag. 270, $u = u_0 + \delta$ und nehmen mit dem Ausdrucke $(1 \pm (u_0 + \delta))^{-1}$ eine identische Umformung vor. Es gilt, wie man leicht bestätigt:

$$\frac{1}{1+u} = \frac{1}{1+u_0} - \frac{\delta}{(1+u_0)^2} + R_+, \quad R_+ = \frac{\delta^2}{(1+u_0)^2}\,\frac{1}{1+u},$$
$$\frac{1}{1-u} = \frac{1}{1-u_0} + \frac{\delta}{(1-u_0)^2} + R_-, \quad R_- = \frac{\delta^2}{(1-u_0)^2}\,\frac{1}{1-u}.$$

Gleichung (11) geht daher über in

(12) $$\psi' = \frac{n+N}{2A(1+u_0)} + \frac{n-N}{2A(1-u_0)} - \delta\left(\frac{n+N}{2A(1+u_0)^2} - \frac{n-N}{2A(1-u_0)^2}\right) + \left(\frac{n+N}{2A}R_+ + \frac{n-N}{2A}R_-\right).$$

Sodann führen wir für δ den Näherungswert aus Gleichung (8) ein. Wir haben, wenn wir die Genauigkeitsgrenze τ in unserer Formel zum Ausdruck bringen:

$$\delta = \varepsilon \sin\left\{\sqrt{\frac{2P(e''-u_0)}{A}}\,(1 \pm \vartheta\tau)\,t\right\}.$$

Hierfür schreiben wir auf Grund des Mittelwertsatzes bez. der mit dem ersten Gliede abgebrochenen Taylorschen Entwicklung:

(13) $$\delta = \varepsilon \sin\left\{\sqrt{\frac{2P(e''-u_0)}{A}}\,t\right\} + r,$$
$$r = \varepsilon\sqrt{\frac{2P(e''-u_0)}{A}}\,\vartheta\cdot\tau\cdot t\cdot\cos\left\{\sqrt{\frac{2P(e''-u_0)}{A}}\,(1 \pm \vartheta'\tau)\,t\right\},$$

wobei ϑ' ebenso wie vorher ϑ einen echten Bruch bedeutet.

Die Gleichung (12) nimmt daraufhin, wenn wir die Glieder passend zusammenfassen, folgende Gestalt an:

(14) $$\psi' = \frac{n - Nu_0}{A(1-u_0^2)} + \frac{2nu_0 - N(1+u_0^2)}{A(1-u_0^2)^2}\,\varepsilon\sin\left\{\sqrt{\frac{2P(e''-u_0)}{A}}\,t\right\} + R,$$
$$R = \frac{n+N}{2A}R_+ + \frac{n-N}{2A}R_- + \frac{2nu_0 - N(1+u_0^2)}{A(1-u_0^2)^2}\,r.$$

Hosted by Google

Jetzt führen wir die Integration nach t aus; wir erhalten, wenn wir von einer unwesentlichen Integrationskonstanten absehen, welche den Wert von ψ für $t = 0$ bestimmt, ein Glied, welches proportional mit t anwächst, ein zweites, welches periodisch veränderlich ist, und endlich ein Restglied.

Die in Rede stehende angenäherte Darstellung von ψ soll nun einfach darin bestehen, daſs wir in der so erhaltenen Gleichung das Restglied zunächst unterdrücken und setzen:

$$(14') \quad \psi = \frac{n - Nu_0}{A(1 - u_0^2)} t + \frac{N(1 + u_0^2) - 2nu_0}{(1 - u_0^2)^2 \sqrt{2AP(e'' - u_0)}} \varepsilon \cos\left\{\sqrt{\frac{2P(e'' - u_0)}{A}}\, t\right\}.$$

Den Grad der Annäherung würden wir nachträglich durch Diskussion des Restgliedes festzustellen haben.

Die Gleichungen (8′) *und* (14′) *zusammengenommen liefern eine angenäherte Darstellung für die Bahnkurve der Kreiselspitze, welche im allgemeinen zwar mit erheblichen Fehlern behaftet sein wird, unter Umständen aber die exakten Formeln mit Vorteil zu ersetzen vermag.*

Diese Darstellung läſst eine sehr anschauliche Deutung zu. Wir wollen zunächst die beiden Teilbewegungen einzeln betrachten, welche bez. durch die beiden ersten oder die beiden zweiten Terme besagter Gleichungen dargestellt werden. Die beiden ersten Terme sind:

$$u_1 = u_0, \quad \psi_1 = \frac{n - Nu_0}{A(1 - u_0^2)} t.$$

Sie definieren eine *reguläre Präcession*, bei welcher der mittlere Parallelkreis u_0 mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit $\frac{n - Nu_0}{A(1 - u_0^2)}$ durchlaufen wird. Die beiden zweiten Terme:

$$u_2 = \varepsilon \sin\left\{\sqrt{\frac{2P(e'' - u_0)}{A}}\, t\right\},$$

$$\psi_2 = \frac{N(1 + u_0^2) - 2nu_0}{(1 - u_0^2)^2 \sqrt{2AP(e'' - u_0)}} \varepsilon \cos\left\{\sqrt{\frac{2P(e'' - u_0)}{A}}\, t\right\}$$

sind harmonisch veränderliche Gröſsen von derselben Periode und ungleicher Amplitude; sie stellen, für sich betrachtet, eine *elliptische Schwingung* dar. Die letztere bezeichnen wir auch, indem wir einen in der Astronomie gebräuchlichen Ausdruck aufnehmen, als *Nutation* der Kreiselspitze.

Die Gesamtbewegung, wie sie durch unsere Näherungsformeln beschrieben wird, entsteht aus der Überlagerung der soeben beschriebenen Teilbewegungen. *Unsere Formeln stellen also die Bewegung der Kreiselspitze dar als Überlagerung einer regulären Präcession mit einer periodisch sich wiederholenden Nutation.* Wir haben uns zu denken, daſs die Kreisel-

Hosted by Google

spitze auf dem mittleren Parallelkreise u_0 mit konstanter Winkelgeschwindigkeit entlang geführt wird und gleichzeitig relativ zu diesem ihre Nutationsschwingung ausführt. Man wolle in diesem Sinne die Figuren des § 2 einer nochmaligen Betrachtung unterziehen und sich die Beschaffenheit der in jedem Falle erforderlichen Präcession und Nutation vorstellen. Besonders naheliegend und fruchtbar wird diese Vorstellung bei der die pseudoreguläre Präcession darstellenden Fig. 28.

Die Hauptfrage, die nach dem *Genauigkeitsgrad unserer Näherungsformeln*, bleibt nun zu besprechen. Der Genauigkeitsgrad unserer Formel für u ist oben in durchaus befriedigender Weise bestimmt worden. In jedem einzelnen numerisch bestimmten Falle hat auch die Fehlerbestimmung in unserer Formel für ψ keine Schwierigkeit. Unter allgemeinen Voraussetzungen läfst sich aber dieser Fehler nicht so glatt abschätzen. Wir müfsten sonst eine Reihe von Spezialfällen je nach dem Vorzeichen der Gröfsen n, N, u_0 u. s. w. unterscheiden. Es mögen daher hierüber einige wenige Bemerkungen genügen.

Bei der Fehlerbestimmung in (14′) haben wir an den in (14) angegebenen Wert des Restes R anzuknüpfen, durch welchen sich der Fehler f folgendermafsen berechnet

$$f = \int R\,dt;$$

f bedeutet dabei (im Gegensatz zu dem obigen Fehler τ) nicht den relativen, sondern den absoluten Fehler.

Wir werden wesentlich den speziellen Fall betrachten, wo die beiden Parallelkreise e und e' hinreichend nahe aneinanderliegen, wo also $2\varepsilon = e' - e$ eine kleine Gröfse ist. In diesem Falle wurde auch der Fehler τ bei unserer obigen Fehlerabschätzung sehr klein und zwar verschwindet er nach (5) bei verschwindendem ε von der ersten Ordnung. Von den drei Termen nun, aus denen sich R in Gleichung (14) zusammensetzt, enthalten zwei, nämlich die mit R_+ und R_- multiplizierten, den Faktor ε^2, weil δ den Faktor ε enthält; der dritte Term (vgl. den obigen Ausdruck für r) besitzt den Faktor $\varepsilon\tau$. Wir können daher sagen, dafs R bei verschwindendem ε von der zweiten Ordnung verschwindet, während die in unseren Näherungsformeln beibehaltenen Glieder höchstens von der ersten Ordnung in ε Null werden. *Mithin stellt bei hinreichend kleinem ε unser Fehler f einen beliebig kleinen Bruchteil der rechten Seite von Gleichung* (14′) *dar. In diesem Falle geht also die begrenzte Annäherung unserer Formeln* (8′) *und* (14′) *in eine beliebige Annäherung über.*

Eine Ausnahme ist dabei wohl zu beachten. Im Nenner von R kommt der Term $1 - u_0^2$ bez. $1 \pm u$ vor. Nimmt einer dieser

Faktoren in demselben Maſse ab, wie die Parallelkreise e und e' zusammenrücken, so kann die Kleinheit des Zählers in R durch die des Nenners aufgewogen werden. Die vorstehende Aussage gilt daher nur dann, wenn die Bahn der Kreiselspitze nicht in unmittelbarer Nähe des Nord- oder Südpols der Einheitskugel verläuft. In einem solchen Falle könnten, selbst bei beliebig kleinem ε, unsere Näherungsformeln ein ganz falsches Bild der Bewegung liefern. Wir werden daher im folgenden Kapitel (vgl. § 5) die in der Nähe der Pole stattfindenden Bewegungen einer besonderen Betrachtung unterziehen.

Zum Schlusse ein Wort über das Verhältnis unserer jetzigen Berechnungsweise des elliptischen Integrals erster Gattung zu den Methoden des vorigen Paragraphen.

Wenn wir den Faktor $(e'' - u)^{-\frac{1}{2}}$ bei der Aufstellung von Formel (4) durch die konstante Gröſse $(e'' - u_0)^{-\frac{1}{2}}$ ersetzen, so kommt dies auf dasselbe hinaus, wie wenn wir jenen Term nach aufsteigenden Potenzen von $u - u_0$ entwickeln und die Entwickelung mit dem konstanten Gliede abbrechen. Es liegt nun nahe, statt des ersten mehrere Glieder bez. die ganze Entwickelung zur Berechnung von t beizubehalten. Im letzteren Falle entsteht eine konvergente unendliche Reihe von Termen, welche sich sämtlich durch cyklometrische Funktionen ausdrücken lassen. Berücksichtigen wir eine genügende Anzahl von ihnen, so können wir ganz allgemein den Grad der Annäherung nach Belieben verbessern. Man sieht also: *Unser Näherungsverfahren von begrenzter Genauigkeit kommt, in dieser Weise ausgestaltet, auf die pag.* 264 *unter* (1) *genannte Reihenmethode von beliebiger Genauigkeit zurück.*

Hosted by Google

Kapitel V.

Über besondere Bewegungsformen des schweren symmetrischen Kreisels, namentlich über die pseudoreguläre Präcession sowie über die Stabilität der Bewegungen.

§ 1. Die reguläre Präcession und ihr benachbarte Bewegungsformen.

In diesem Kapitel wollen wir einige spezielle Bewegungen des Kreisels, z. B. die reguläre Präcession und namentlich die von uns als pseudoreguläre Präcession bezeichnete Bewegung genauer untersuchen. Dabei wird die grofse Frage nach der *Stabilität der Bewegungen* im Vordergrunde unseres Interesses stehen, eine Frage, welche in neuerer Zeit vielfach in Angriff genommen ist, aber bisher nicht mit der nötigen Schärfe und Klarheit formuliert zu sein scheint.

Wir beginnen mit der Untersuchung der regulären Präcession des Kugelkreisels vom Trägheitsmomente A. Als Grenzfall aus der allgemeinen Bewegung des Kreisels erhalten wir sie, wenn wir die beiden Parallelkreise $u = e$ und $u = e'$, zwischen welche die Bahnkurve der Kreiselspitze eingeschlossen ist, zusammenrücken lassen. Berücksichtigen wir noch, dafs e und e' Wurzeln der kubischen Gleichung $U = 0$ sind, so können wir sagen: *Analytisch ist die reguläre Präcession dadurch charakterisiert, dafs die Gleichung $U = 0$ eine zwischen -1 und $+1$ gelegene Doppelwurzel erhält.* Es mufs daher neben U auch der Differentialquotient $\frac{dU}{du}$ für $u = e$ verschwinden. Bilden wir diesen nach den Gleichungen (1) und (2) von pag. 240, so erhalten wir die Bedingung:

$$A \frac{n - Ne}{A(1-e^2)} \frac{N - ne}{A(1-e^2)} = P, \tag{1}$$

welche, wie schon pag. 252 bemerkt wurde, mit der aus der Theorie des Deviationswiderstandes gefolgerten Gleichung $A\mu\nu = P$ identisch ist.

Eigentümlicher Weise versagt in diesem einfachsten Falle der Kreiselbewegung unsere allgemeine Integrationsmethode. Wenn nämlich $e = e'$ wird, so zieht sich der Integrationsweg für u in den Ausdrücken von

Hosted by Google

t, ψ und φ auf einen einzelnen Punkt zusammen und unsere Integrale verlieren zunächst ihren Sinn. Wir gehen daher lieber auf die nichtintegrierten Gleichungen

$$(2)\qquad \frac{du}{dt} = \sqrt{U}, \quad \frac{d\psi}{dt} = \frac{n - Nu}{A(1-u^2)}, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{N - nu}{A(1-u^2)}$$

zurück und verifizieren direkt, daſs sie erfüllt sind, wenn wir

$$(3)\qquad \cos\vartheta = u = e, \quad \psi = \nu t, \quad \varphi = \mu t$$

machen. In der That geht die erste Gleichung für $u = e =$ const über in $0 = 0$; die beiden letzten Gleichungen werden ebenfalls befriedigt, wenn wir die Gröſsen ν und μ mittelst der Integrationskonstanten n, N und e folgendermaſsen bestimmen:

$$(4)\qquad \nu = \frac{n - Ne}{A(1-e^2)}, \quad \mu = \frac{N - ne}{A(1-e^2)}.$$

Hierbei haben wir auf einen merkwürdigen Widerspruch mit dem Vorhergehenden aufmerksam zu machen, der aber nur formaler Natur ist. Unsere letzte Betrachtung zeigt, daſs die Gleichungen (2) bei ganz beliebiger Wahl der Integrationskonstanten e, n und N und entsprechender Bestimmung der Konstanten ϑ, μ und ν durch die Gleichungen (3) erfüllt werden. Es möchte daher scheinen, als ob die reguläre Präcession bei beliebigen Anfangsbedingungen eine mögliche Bewegung darstellt, während doch oben behauptet wurde und aus unseren früheren Entwickelungen hervorgeht, daſs sie es nur dann ist, wenn zwischen den Integrationskonstanten die Bedingung (1) besteht.

Um die Notwendigkeit dieser letzteren Bedingung direkt zu erhärten, gehen wir auf die ursprünglichen Differentialgleichungen der Bewegung zurück, welche wir etwa in der Lagrangeschen Form zu Grunde legen. Dieselben lauten nach pag. 154, wenn wir für die Komponenten Θ, Φ, Ψ der äuſseren Kraft die pag. 220 angegebenen Werte eintragen und für T den Ausdruck (6) von pag. 156 mit $C = A$ benutzen:

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{d[\Theta]}{dt} = -A\varphi'\psi'\sin\vartheta + P\sin\vartheta, \quad \dfrac{d[\Psi]}{dt} = 0, \quad \dfrac{d[\Phi]}{dt} = 0. \\ [\Theta] = A\vartheta', \quad [\Psi] = A(\psi' + \varphi'\cos\vartheta), \quad [\Phi] = A(\varphi' + \psi'\cos\vartheta). \end{cases}$$

Setzen wir hier den Gleichungen (3) entsprechend $\vartheta' = 0$, $\psi' = \nu$, $\varphi' = \mu$, so folgt aus der zweiten Reihe $[\Theta] = 0$, $[\Psi] =$ const., $[\Phi] =$ const.; in der ersten Reihe werden alsdann die beiden letzten Gleichungen identisch befriedigt, während die erste Gleichung unsere frühere Bedingung (1) liefert:

$$A\mu\nu = P.$$

Hosted by Google

Infolgedessen kann nach unseren ursprünglichen Gleichungen in der That nur eine gewisse Klasse von regulären Präcessionsbewegungen, welche eben durch die Gleichung (1) *charakterisiert wird, auftreten.*

Wir werden aber weiter dem Grunde nachzugehen wünschen, weshalb die Gleichungen (2) Integrale besitzen, welche in den allgemeinen Differentialgleichungen (5) nicht enthalten sind. Zu dem Zwecke müssen wir uns ein wenig über die Bedeutung unserer Differentialgleichungen in geometrischer Auffassung verbreiten.

Dabei möge es der kürzeren Ausdrucksweise wegen gestattet sein, nur von den Differentialgleichungen für u und ψ zu sprechen.

Die Differentialgleichungen (2) bestimmen für jeden Punkt (u, ψ) der Bahnkurve eine gewisse Fortschreitungsrichtung $\left(\frac{d\psi}{du}\right)$ oder auch, wenn wir wollen, eine gewisse Geschwindigkeit $\left(\frac{du}{dt}, \frac{d\psi}{dt}\right)$. Wir wollen uns in jedem Punkte des stereographischen Bildes der Einheitskugel die betreffende Fortschreitungsrichtung als eine Art Wegweiser markiert denken. Den Inbegriff des einzelnen Punktes und des zugehörigen Wegweisers bezeichnen wir im Anschlufs an eine heute übliche Ausdrucksweise als *Linienelement.*

Die Differentialgleichungen integrieren heifst nun, eine Kurve angeben, welche aus lauter solchen Linienelementen zusammengesetzt ist, oder einen Weg beschreiben, welcher überall in Richtung der Wegweiser verläuft.

Auf Grund dieser Definition sieht man unmittelbar, dafs jede beliebige reguläre Präcession (n, N, e), welche wir erhalten, wenn wir N und n irgendwie und e so wählen, dafs die Gleichung $U = 0$ erfüllt ist, den Differentialgleichungen (2) genügen mufs. Betrachten wir nämlich zunächst diejenige allgemeine Bahnkurve vom Charakter der im vorigen Kapitel beschriebenen Kurven, welche den Integrationskonstanten n, N und e entspricht, und konstruieren wir uns die ganze Schaar von Bahnkurven hinzu, welche entsteht, wenn wir jene erste Kurve um den Mittelpunkt der Figur (um das Bild des Nordpols) drehen (vgl. Fig. 46). Alle diese Kurven sind natürlich Integralkurven von (2); sie berühren überdies alle den Parallelkreis $u = e$. Infolgedessen stellt jedes kleinste Stück des Parallelkreises $u = e$ ein Linienelement dar, welches unseren Differentialgleichungen entspricht. Dieser Parallelkreis selbst ist daher eine Inte-

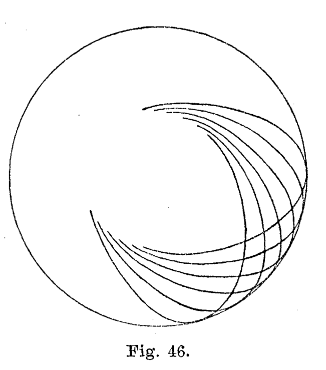


Fig. 46.

gralkurve der Gleichungen (2), gleichviel ob die Bedingung (1) zwischen e, n und N erfüllt ist oder nicht.

Unsere Betrachtung läfst sich sofort auf beliebige Differentialgleichungen erster Ordnung verallgemeinern: Wenn wir eine Schaar von Integralkurven solcher Gleichungen kennen und die Enveloppe der Schaar konstruieren, so genügt diese gleichfalls den Differentialgleichungen. Man bezeichnet diese besondere Art von Integralkurven als *singuläre Lösungen*, weil sie sich aus den allgemeinen Lösungen durch Spezialisierung der Konstanten nicht ergeben.

Mit Benutzung dieses terminus können wir daher sagen: *Die reguläre Präcession ist allerdings bei beliebiger Wahl der Konstanten* e, n *und* N *eine Lösung der Differentialgleichungen* (2), *aber eine singuläre Lösung.*

Man begreift nun leicht, dafs die singulären Lösungen von (2) nicht auch Lösungen der Differentialgleichungen (5) zu sein brauchen. Machen wir nämlich bei letzteren eine der obigen ähnliche Betrachtung, so haben wir hier nicht von Linienelementen schlechtweg, sondern etwa von *Linienelementen zweiter Ordnung* zu sprechen. Es werden jetzt, nachdem ein Punkt und eine hindurchgehende Fortschreitungsrichtung irgendwie ausgewählt sind, durch die Differentialgleichungen zugehörige Werte der zweiten Differentialquotienten bestimmt. Unsere Wegweiser sind jetzt sozusagen bedingungsweise Wegweiser, welche vorschreiben: Wenn wir von einem Punkte in einer gewissen Richtung vorwärts gehen, so sollen wir uns mit einer gewissen Krümmung der Bahn weiter bewegen. Um die Gleichungen (5) zu integrieren, haben wir also jetzt diese Linienelemente zweiter Ordnung zu einer Kurve zusammenzusetzen bez. die Krümmung der Bahn so einzurichten, wie es durch unsere bedingungsweisen Wegweiser vorgeschrieben wird. Die Integralkurven, zu denen wir so gelangen, müssen jedenfalls unter den Integralkurven von (2) enthalten sein. Letztere Gleichungen können aber möglicherweise noch andere Integrale zulassen. Denn wir können aus der Thatsache allein, dafs die Fortschreitungsrichtungen einer Kurve den Gleichungen (2) genügen, nicht schliefsen, dafs ihre Krümmungen mit den Gleichungen (5) in Übereinstimmung sind. Bei den singulären Lösungen ist, wie wir sahen, dieses in der That nicht der Fall.

Wir können aber weiter behaupten, dafs die allgemeinen Lösungen von (2) sämtlich auch den Gleichungen (5) genügen müssen. Denn diese Lösungen bilden eine kontinuierliche Mannigfaltigkeit von Bahnkurven, und da einige von ihnen sicherlich Integralkurven von (5) sein müssen, so werden es alle sein. *Es haben also die allgemeinen Lösungen von* (2) *die durch* (5) *vorgeschriebene Krümmung, nicht aber die singulären.*

Hosted by Google

Wir sehen an diesem Beispiel, wie nötig es ist, stets auf den eigentlichen Sinn der Formeln (hier also auf die Betrachtung der Linienelemente) zurückzugehen und niemals blindlings auf die formale Richtigkeit der Rechenoperationen zu vertrauen. —

Wir gehen nun zu einer neuen Bewegungsart des Kreisels über, zu den schon pag. 273 erwähnten *„der regulären Präcession benachbarten Bewegungen“*. Wir erteilen dem Kreisel zu dem Ende, während er in einer regulären Präcessionsbewegung begriffen ist, einen kleinen Anstofs. Die Richtung des Anstofses soll beliebig, die Gröfse desselben aber beliebig klein gewählt werden dürfen. Unser Anstofs setzt sich mit dem zur regulären Präcession gehörigen Impulse nach der Parallelogrammregel zusammen. Die Komponenten des ursprünglichen Impulses werden also in einem gewissen Zeitpunkte, den wir als „Anfangszeit“ bezeichnen können, um beliebig kleine Zuwächse, die Komponenten unseres Anstofses, vermehrt. Die Frage ist, welche Bewegung dem so veränderten Anfangsimpulse entspricht.

Am bequemsten zerlegen wir den Impuls in seine Komponenten nach den drei durch unser Problem ausgezeichneten Axen, der Figurenaxe, der Vertikalen und der Knotenlinie, d. i. in die senkrechten Projektionen $[\Psi]$, $[\Phi]$, $[\Theta]$ des Impulsvektors auf jene Axen. Von diesen sind die beiden ersten während jeder natürlichen Bewegung des schweren Kreisels unveränderlich und mit den Integrationskonstanten N und n identisch. Die letzteren Buchstaben mögen speziell die für die reguläre Präcession charakteristischen Werte der Komponenten $[\Phi]$ und $[\Psi]$ bezeichnen; die Zuwächse, welche sie durch unsern Anstofs erfahren, mögen N' und n' heifsen. Die dritte Impulskomponente $[\Theta]$ ist im allgemeinen während der Bewegung variabel. Nur bei der regulären Präcession haben wir speziell $[\Theta] = 0$, weil nach (5) $[\Theta] = A\vartheta'$ und $\vartheta' = 0$ ist. Der Zuwachs, welcher durch den Anstofs hinzugefügt wird, bedeutet daher den Gesamtwert der $[\Theta]$-Komponente zu Beginn der Bewegung. Wir bezeichnen ihn mit $[\Theta_0]$, um anzudeuten, dafs dieser Wert die $[\Theta]$-Komponente nur zur Zeit $t = 0$ darstellt.

Im Übrigen werden wir den Effekt der Impulszuwächse n', N' und $[\Theta_0]$ einzeln untersuchen. In diesem Sinne fragen wir zunächst nach der Verschiebung der beiden Parallelkreise e und e' bei ausschliefslicher Vermehrung der Impulskomponente $[\Psi]$ um n'.

Zunächst ist klar, dafs einer der Parallelkreise e, e' mit dem Präcessionskreise e zusammenfällt. Da nämlich $[\Theta_0] = 0$ sein sollte, so wird zu Beginn der Bewegung, wo $u = e$ ist, $\vartheta' = 0$, also auch $u' = 0$. Eine Wurzel der Gleichung $U = 0$ ist also nach wie vor gleich e. Die zweite Wurzel e', welche im Falle $n' = 0$ mit e zusammenfällt,

Hosted by Google

wird durch unsern Anstoſs einen Zuwachs erfahren. Wir bezeichnen diesen mit 2ε, setzen also, wie pag. 270, $e' - e = 2\varepsilon$. Dabei ist ε eine mit n' verschwindende Zahl, wie unmittelbar aus der Stetigkeit unserer C_3 von pag. 250 folgt. Nehmen wir n' hinreichend klein, so können wir auch ε beliebig klein machen.

Die Gröſse von e' bez. die von 2ε berechnet sich darauf aus der Gleichung $U_1 = 0$ von pag. 240 oder, wie wir ausführlicher schreiben wollen,

$$U_1(u, v) = 0.$$

Diese Gleichung muſs erfüllt sein einerseits im Falle der regulären Präcession, d. h. für $u = e$, $v = n$, andrerseits im Falle unserer zur regulären Präcession benachbarten Bewegung, also für $u = e + 2\varepsilon$, $v = n + n'$. Entwickeln wir daher $U_1(e + 2\varepsilon,\ n + n')$ nach dem Taylorschen Lehrsatze in der Nähe des Wertepaares (e, n), so ergiebt sich wegen $U_1(e, n) = 0$:

$$U_1(e + 2\varepsilon,\ u + n') = 2\varepsilon \frac{\partial U_1}{\partial u} + n' \frac{\partial U_1}{\partial v} + \cdots;$$

hier verschwindet die linke Seite; auf der rechten vernachlässigen wir wegen der Kleinheit von ε und n' alle nicht hingeschriebenen höheren Potenzen. Alsdann ergiebt sich:

$$2\varepsilon \frac{\partial U_1}{\partial u} + n' \frac{\partial U_1}{\partial v} = 0$$

oder

$$2\varepsilon = -n' \frac{\partial U_1}{\partial v} \Big/ \frac{\partial U_1}{\partial u},$$

wobei wir rechts $v = n$, $u = e$ einzutragen haben. Ohne die rechte Seite genauer auszurechnen, begnügen wir uns gezeigt zu haben, daſs ε auf diese Weise als eine mit n' verschwindende Gröſse in jedem Falle bestimmt werden kann.

Nicht anders liegt die Sache, wenn wir N um N' vermehren, dafür aber die ursprünglichen Werte $[\Psi] = n$, $[\Theta_0] = 0$ festhalten. Der eine Parallelkreis ist wiederum e; die Verschiebung 2ε des anderen Parallelkreises berechnet sich wie vorher; da nämlich die Gleichung $U_1 = 0$ in n und N symmetrisch gebaut ist, haben wir in der Endformel für ε nur n und N zu vertauschen und N' statt n' zu schreiben.

Im dritten Falle, wo wir den Anstoſs $[\Theta_0]$ hinzufügen und $n' = N' = 0$ nehmen, verschieben sich beide Parallelkreise e und e'. Es ist nämlich jetzt zu Beginn der Bewegung nicht mehr $\vartheta_0' = 0$, sondern $A\vartheta_0' = [\Theta_0]$, mithin ist auch der Anfangswert von u, den wir mit u_0 bezeichnen, nicht mehr Wurzel von $U = 0$. Bei der Bestimmung von e und e' haben wir daher von dieser kubischen Gleichung und nicht von der

quadratischen $U_1 = 0$ auszugehen. Es soll gezeigt werden, daſs die beiden Parallelkreise e und e' von dem ursprünglichen Präcessionskreise u_0 in erster Annäherung beide gleichweit abstehen, so daſs u_0 wie im vorigen Paragraphen den mittleren Parallelkreis bedeutet:

$$u_0 = \frac{e + e'}{2}.$$

Die ursprüngliche Form des Ausdruckes U war pag. 238 in Gleichung (7′) angegeben:

$$(6) \qquad A^2 U = -(Nu - n)^2 + (k - N^2 - 2APu)(1 - u^2).$$

Zu Beginn der Bewegung ($u = u_0 = \cos\vartheta_0$) ist die linke Seite dieser Gleichung bekannt. Da nämlich allgemein

$$U = \left(\frac{du}{dt}\right)^2 = \sin^2\vartheta \cdot \vartheta'^2,$$

so wird für $u = u_0$

$$A^2 U = \sin^2\vartheta_0 (A\vartheta_0')^2 = (1 - u_0^2)[\Theta_0]^2.$$

Somit folgt die Gleichung

$$(7) \quad (1 - u_0^2)[\Theta_0]^2 = -(Nu_0 - n)^2 + (k - N^2 - 2APu_0)(1 - u_0^2).$$

Aus (6) und (7) wollen wir k eliminieren, nachdem wir in (6) $U = 0$ gesetzt haben. Wir finden so für die gesuchten Werte $u = e$ und $u = e'$ die Gleichung:

$$(8) \qquad (1 - u^2)[\Theta_0]^2 = (Nu - n)^2 - (Nu_0 - n)^2 \frac{1 - u^2}{1 - u_0^2} + 2AP(u - u_0)(1 - u^2).$$

Das Polynom dritten Grades, welches auf der rechten Seite steht, kann leicht in Linearfaktoren aufgelöst werden. Setzen wir nämlich die rechte Seite gleich Null, so müssen wir die Wurzeln der Gleichung $U = 0$ im Falle der regulären Präcession wiederfinden, weil $[\Theta_0] = 0$ diese Bewegung ergiebt. Die Linearfaktoren der rechten Seite lauten daher $u - u_0$, $u - u_0$ und $u - e''$. Der hinzutretende von u unabhängige Faktor wird gleich dem Koeffizienten von u^3 in Gleichung (8) und die rechte Seite dieser Gleichung gleich

$$-2AP(u - u_0)^2(u - e'').$$

Mithin können wir statt (8) einfacher schreiben:

$$(1 - u^2)[\Theta_0]^2 = 2AP(u - u_0)^2(e'' - u).$$

Nun dürfen wir $[\Theta_0]$ beliebig klein voraussetzen, so daſs auch die rechte Seite auſserordentlich klein wird. Die gesuchten Wurzeln e und e' liegen daher auſserordentlich nahe an u_0. Wir setzen $u = u_0 + \varepsilon$ und erhalten zur Bestimmung von ε die Gleichung

$$(9) \qquad \varepsilon^2 = \frac{(1 - (u_0 + \varepsilon)^2)[\Theta_0]^2}{2AP(e'' - u_0 - \varepsilon)}.$$

Die rechte Seite könnten wir nach Potenzen von ε in eine konvergente Reihe entwickeln. Da wir aber ε ebenso wie $[\Theta_0]$ als beliebig klein voraussetzen können, brauchen wir nur das erste Glied. Aus diesem ergeben sich zwei entgegengesetzt gleiche Werte für ε, nämlich

$$\varepsilon = \pm \sqrt{\frac{1 - u_0^2}{2AP(e'' - u_0)}}\,[\Theta_0].$$

Hiernach werden die gesuchten Werte

$$e = u_0 - \varepsilon \quad \text{und} \quad e' = u_0 + \varepsilon,$$

wo ε mit $[\Theta_0]$ verschwindet.

Die Parallelkreise e und e' stehen also in erster Annäherung gleichweit ab von dem Ausgangskreise u_0, dieser stellt, wie behauptet wurde, den „mittleren Parallelkreis der Bewegung“ im Sinne des vorigen Paragraphen dar.

Wir kommen nach diesen Vorbereitungen auf unsere pag. 283 getroffene Unterscheidung der drei Fälle zurück, welche bez. durch die drei Werte des Zusatzimpulses n', N', $[\Theta_0]$ charakterisiert waren. Allen drei Fällen ist, wie wir sahen, gemeinsam, daſs die Parallelkreise e und e' einander um so näher liegen, je kleiner der Anstoſs gewählt war. *Die fraglichen Bahnkurven sind also ihrem Verlaufe nach dem ursprünglichen Präcessionskreise beliebig benachbart*, wie schon in ihrer Benennung ausgedrückt wurde.

Sodann erinnern wir uns der Ergebnisse des vorigen Paragraphen. Die dortigen Näherungsformeln (8′) und (14′), welche im allgemeinen nur eine begrenzte Annäherung lieferten, geben gerade in dem jetzt vorliegenden Spezialfalle eine beliebig gute Annäherung; der Fehler wird sowohl in der Formel für u wie in der für ψ bei hinreichend kleinem ε beliebig klein. Wir werden daher jene Formeln ohne Bedenken*) auf die vorliegenden drei Fälle anwenden und schreiben dürfen:

$$(10) \qquad \begin{cases} u = u_0 + \varepsilon \sin \dfrac{\pi t}{\omega}, \\ \psi = \nu t + \nu_1 \varepsilon \cos \dfrac{\pi t}{\omega}; \end{cases}$$

die hierbei benutzten Abkürzungen haben folgende Bedeutung:

$$(11) \qquad \omega = \pi \sqrt{\frac{A}{2P(e'' - u_0)}}, \quad \nu = \frac{n - Nu_0}{A(1 - u_0^2)},$$
$$\nu_1 = \frac{N(1 + u_0^2) - 2nu_0}{\pi A (1 - u_0^2)^2}\,\omega,$$

---

*) Man beachte jedoch die Bedingung von pag. 277, wonach u_0 nicht, und auch nicht nahezu, gleich ± 1 sein darf. Über diese Präcessionsfälle folgen im § 5 einige Bemerkungen.

Hosted by Google

wobei n und N die Gesamtwerte der Impulskomponenten $[\Psi]$ und $[\Phi]$, d. h. die eventuell um n' und N' vermehrten Werte dieser Komponenten bei der ursprünglichen regulären Präcession bezeichnen.

Um eine klare Vorstellung von unsern benachbarten Bahnkurven zu bekommen, betrachten wir die *Teilbewegungen der regulären Präcession und der Nutation,* in welche die Bewegung der Kreiselspitze durch (10) zerlegt erscheint, für sich.

Die Bahnkurve der ersten Teilbewegung ist der Präcessionskreis $u = u_0$. *Dieser fällt mit dem ursprünglichen Präcessionskreise nur in dem Falle zusammen, wo der Anstoſs die Knotenlinie zur Axe hat* ($n' = N' = 0$, $[\Theta_0] \neq 0$). In den beiden anderen Fällen dagegen ist er im Vergleich zu dem ursprünglichen Präcessionskreise um das Stückchen ε im vertikalen Sinne verschoben. Genauer könnten wir so sagen: Bei dem Anstoſse $[\Theta_0]$ verschwindet die Abweichung zwischen dem mittleren Parallelkreise u_0 und dem Kreise der ursprünglichen Präcession bei verschwindender Gröſse des Anstoſses von höherer als der ersten Ordnung, bei den Anstöſsen n' und N' dagegen nur von der ersten Ordnung.

Die Präcessionsgeschwindigkeit unserer ersten Teilbewegung ist in allen Fällen durch die Gröſse ν aus Gleichung (11) gegeben. *Diese Gröſse stimmt mit der ursprünglichen Präcessionsgeschwindigkeit wieder nur im Falle des Anstoſses* $[\Theta_0]$ *überein,* weil alsdann die Impulskomponenten n und N ungeändert bleiben und der Wert von u_0 mit dem ursprünglichen Werte von u bei der regulären Präcession in dem eben präcisierten Sinne zusammenfällt. In den beiden anderen Fällen weicht der Wert der Präcessionsgeschwindigkeit von dem ursprünglichen Werte um Gröſsen ab, welche von derselben Gröſsenordnung wie n' und N' sind.

Die zweite Teilbewegung, die Nutation, ist nach Früherem eine harmonische Schwingung mit ungleichen Amplituden in den Koordinaten u und ψ oder, wie wir kürzer sagen, eine elliptische Schwingung relativ zum Kreise der Präcession. Die durch (11) bestimmte Gröſse ω giebt die halbe Schwingungsdauer, d. h. diejenige Zeit an, während der die Kreiselspitze von e zu e' gelangt. Die vertikale Schwingungsamplitude wird durch ε, die horizontale durch $\nu_1 \varepsilon$ gemessen. Man sieht ohne weiteres, *daſs bei verschwindendem Anstoſs die Schwingungsperiode im allgemeinen endlich bleibt, während die beiden Schwingungsamplituden ihrerseits verschwinden.* Drücken wir nämlich ω durch unsere gewöhnlichen Integrationskonstanten n, N u. s. w. aus, indem wir für e'' den Wert aus Gleichung (9) von pag. 273 eintragen, so folgt in der Grenze für verschwindende Gröſse des Anstoſses:

Hosted by Google

$$\omega = \pi \sqrt{\frac{A^2(1-e^2)}{n^2+N^2-2nNe-4APe(1-e^2)}};$$

hier bedeuten n, N und e die Konstanten der ursprünglichen regulären Präcession. Der so gefundene Grenzwert von ω ist offenbar von Null verschieden. Dasselbe gilt von dem Grenzwerte des Winkels ψ_ω, um welchen das Azimuth der Kreiselspitze während einer Nutation zunimmt. Nach Gleichung (11) wird nämlich einfach

$$\psi_\omega = \nu\omega.$$

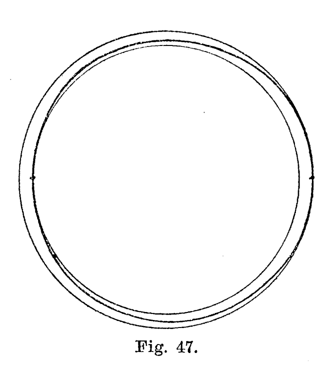
Wir können hiernach mit leichter Mühe die Figurenserie des vorigen Kapitels durch eine Figur vervollständigen, indem wir neben Fig. 31 („langsame Präcession") eine Nachbarfigur einschalten. In 31 war vorausgesetzt $A = -P = 1$, $e = 0$, $N = 0{,}2$, $n = -5$. Geben wir beispielsweise n einen von -5 etwas verschiedenen Wert, so überlagert sich der regulären Präcession eine Schwingung von der halben Periode

$$\omega = \pi \sqrt{\frac{1}{n^2+N^2}} = \frac{\pi}{5} \text{ circa};$$

gleichzeitig wird der Azimuthalausschlag während der Zeit ω

$$\psi_\omega = n\omega = -\pi \text{ circa}.$$

Die neben Fig. 31 einzuschaltende Nachbarfigur würde daher folgendermaſsen schematisch zu zeichnen sein (vgl. Fig. 47). Man beachte die eigentümliche Thatsache, daſs unsere Nutation, welche, wie wir wissen, für sich genommen, verschwindende Dimensionen hat, durch Überlagerung mit der endlichen Präcessionsgeschwindigkeit zu einer nahezu vollständigen Umkreisung der Vertikalen auseinander gezogen wird.


Fig. 47.

Ganz dieselbe Figur kann uns auch als Darstellung der zu der unendlich schnellen Präcession (Fig. 35) benachbarten Bahnkurven dienen. Nur wird hier (wegen des besonderen Wertes $n = \infty$) ω gleich 0 und ψ_ω genau gleich $\pm\pi$. —

Die wesentliche Absicht, welche wir bei der Heranziehung der zur regulären Präcession benachbarten Lösungen verfolgen, besteht jedoch nicht sowohl in der Erkenntnis dieser Bewegungen selbst, als vielmehr darin, daſs wir von hieraus auf die *Stabilität der regulären Präcession* Schlüsse machen können. Wir behaupten nämlich auf Grund unserer Untersuchung der benachbarten Bewegungen: *Die reguläre Präcession ist sicher eine stabile Bewegung des Kreisels.*

Hosted by Google

Was wir unter dem Worte Stabilität verstehen wollen, haben wir bereits pag. 219, wenn auch noch nicht mit hinlänglicher Schärfe, erklärt. Eine eingehendere Definition sparen wir bis zu dem sechsten Paragraphen des gegenwärtigen Kapitels auf; für den vorliegenden Fall genügt unsere frühere Erklärung. Wir wiederholen daher: Eine Bewegung soll stabil heifsen, wenn sich bei Hinzufügung eines hinreichend kleinen Anstofses von beliebiger Richtung der Charakter der Bewegung *stetig* ändert.

Wollen wir dieses Kriterium auf unseren Fall anwenden, so müssen wir die vorhergehenden Betrachtungen noch erst nach zwei Richtungen vervollständigen.

Unter der „Bewegung“ werden wir nämlich nicht nur die Bewegung der Kreiselspitze längs ihrer Bahnkurve, sondern die Gesamtheit der Lagen des Kreisels, d. h. den Inbegriff der Werte verstehen müssen, welchen etwa die Koordinaten φ, ψ, ϑ während des Ablaufs der Zeit annehmen. Nun wissen wir aber, dafs die Werte der φ-Koordinate aus denen der ψ-Koordinate durch Vertauschung von n und N mit $-N$ und $-n$ erhalten werden können (vgl. das Reciprocitätsgesetz des Kugelkreisels in § 5 des vorigen Kapitels). Wir haben daher, um die „Bewegung“ vollständig zu beherrschen, nicht nötig, für die φ-Koordinate neue Entwicklungen zu machen, sondern können uns darauf berufen, dafs diese sich qualitativ ebenso verhält wie die ψ-Koordinate.

Ferner spricht unsere Stabilitätsdefinition von einem beliebigen Anstofse, d. h. von einer gleichzeitigen Vermehrung der Impulskomponenten $[\Phi]$, $[\Psi]$, $[\Theta]$ um kleine Zuwächse. Es ist aber klar, dafs der Effekt eines beliebigen Anstofses sich durch direkte Superposition aus den Wirkungen der oben betrachteten speziellen Anstöfse n', N', $[\Theta_0]$ zusammensetzen lassen mufs, falls nur jene Zuwächse hinreichend klein sind. Die hierbei entstehenden Formeln für u, ψ und φ sind daher vom gleichen Charakter, wie die obigen für u und ψ.

Nun zeigt der Anblick der Gleichungen (10), dafs diese Formeln stetig in die Gleichungen der regulären Präcession übergehen, wenn wir die Gröfse der Impulszuwächse stetig verkleinern. Dasselbe gilt daher für eine ganz beliebige Störung hinsichtlich des Gesamtcharakters der Bewegung. Auch dieser wird stetig in die reguläre Präcession übergehen, wenn wir die Störung stetig zu Null abnehmen lassen.

Hiernach ist die Stabilität der regulären Präcession sichergestellt.

Unsere hier benutzte Definition der Stabilität ist von der gewöhnlich gegebenen Definition (vgl. hierzu § 6 dieses Kapitels) verschieden. Während wir nur verlangen, dafs die Abänderung der Bewegung eine stetige sei,

d. h. um so kleiner ausfalle, je kleiner der Anstoſs genommen wird, bezeichnet man sonst vielfach eine Bewegung nur dann als stabil, wenn die Abweichung der gestörten Bewegung von der ursprünglichen *dauernd* sehr klein (oder beliebig klein) bleibt. Wir möchten uns im allgemeinen diesem Sprachgebrauch nicht anschlieſsen, weil er, wie später gezeigt werden wird, eine ungebührliche Beschränkung des Stabilitätsbegriffes mit sich bringt. Wir bemerken aber, daſs speziell die reguläre Präcession auch nach diesem engeren Stabilitätsbegriffe als stabil zu bezeichnen ist, sofern wir nämlich unser Augenmerk lediglich auf die geometrische Gestalt der Kreiselspitzenbahn richten und von ihrer zeitlichen Durchlaufung absehen. In der That ist die durch einen Zusatzstoſs abgeänderte Bahnkurve ganz in einer Kugelzone von der (in vertikaler Richtung gemessenen) Breite 2ε eingeschlossen und kann durch Verkleinerung von ε und mittelbar durch Verkleinerung der Störung dem Präcessionskreise e ihrer ganzen Erstreckung nach beliebig nahe gebracht werden. Daſs etwas Analoges nicht bei jeder Bewegung der Fall ist, zeigt unter anderem das Beispiel der kräftefreien Bewegung des einzelnen Massenpunktes nach dem Galileischen Trägheitsgesetze. Bei Hinzufügung eines Anstoſses verwandelt sich die ursprüngliche geradlinige Bahn in eine andere gerade Linie, welche sich von der ersteren im Laufe der Zeit beliebig weit entfernt, wie klein auch der Anstoſs gewählt sein möge. Wir werden also insofern der Bahnkurve der regulären Präcession einen *besonders hohen Grad von Stabilität* zusprechen müssen.

Die Sache liegt schon anders, wenn wir auſser der Gestalt der Bahnkurve auch ihre zeitliche Durchlaufung oder den Gesamtcharakter der Bewegung mit Einschluſs der φ-Koordinaten in Betracht ziehen.

Wir können nämlich nicht behaupten, daſs die Entfernung der Kreiselspitze bei der durch einen kleinen Anstoſs abgeänderten Bewegung von ihrer Lage in entsprechenden Zeiten bei der ursprünglichen Bewegung im allgemeinen dauernd klein bleibt. In der That sahen wir, daſs durch Hinzufügung des Anstoſses n' oder N' der mittlere Wert der Winkelgeschwindigkeit ψ' abgeändert wird, so daſs die Kreiselspitze nach der Störung ihre Bahn mit einer anderen Geschwindigkeit durchläuft wie vor derselben. Im Laufe der Zeit wird daher die Lage der Kreiselspitze bei den verglichenen Bewegungen um beliebige endliche Stücke differieren. Entsprechendes gilt nach unserem Reciprocitätsgesetz von der Koordinate φ, sofern durch den Anstoſs die Werte von n und N abgeändert werden.

Lediglich in dem speziellen Falle, wo der Anstoſs keine Veränderung von $[\Phi]$ und $[\Psi]$ bewirkt und nur aus der einen Komponente

$[\Theta_0]$ besteht, bleibt, wie wir sahen, der ursprüngliche Betrag der Präcessionsgeschwindigkeit ψ' und daher auch der ursprüngliche Wert von φ' erhalten. Die abgeänderte Bahnkurve oscilliert dann mit gleichem Ausschlag nach oben und unten um den ursprünglichen Präcessionskreis herum. Also würde nur bei Beschränkung auf so spezielle Anstöfse die Abweichung in der Lage der Kreiselspitze und den Kreisellagen überhaupt bei den verglichenen Bewegungen dauernd klein bleiben, und die reguläre Präcession im gewöhnlichen Sinne nur unter dieser Einschränkung stabil zu nennen sein. Die letzten Bemerkungen fassen wir noch einmal, wie folgt, zusammen:

Im Sinne der gewöhnlichen Stabilitätsdefinition müfste man konsequenter Weise die reguläre Präcession als instabil bezeichnen. Stabil könnte man sie nur nennen, wenn man eine von zwei Einschränkungen hinzufügt. Entweder: Man beachte nur die geometrische Gestalt der Bahnkurve, nicht die Bewegung auf der Bahnkurve bez. die Bewegung des Kreisels überhaupt; oder: Man richte die Störung so ein, dafs sie lediglich eine Veränderung von ϑ' bewirkt, dagegen φ' und ψ' ungeändert läfst. Vom Standpunkte unseres Stabilitätsbegriffes hingegen haben wir die reguläre Präcession ohne Einschränkung für stabil zu erklären. Dabei können wir konstatieren, dafs der geometrischen Gestalt der Bahnkurve, und bei den zuletzt genannten speziellen Störungen der Bewegung überhaupt, ein besonders hoher Grad von Stabilität zukommt.

§ 2. Die pseudoreguläre Präcession, Auflösung des Paradoxons der Kreiselbewegung.

Wir kommen jetzt zu dem wichtigsten Punkte der gesamten Kreiseltheorie, zur Erklärung derjenigen Bewegung, welche wegen ihrer paradoxen Eigenschaften und wegen der Häufigkeit ihres thatsächlichen Vorkommens vor allen anderen das Interesse der erklärenden und beobachtenden Naturforscher auf sich gezogen hat. Wir meinen diejenige Bewegung des Kreisels, welche wir als *pseudoreguläre Präcession* bezeichnet haben.

Die Eigenart dieser Bewegung wollen wir zunächst durch Vergleich mit der *regulären Präcession* schildern.

Wie wir gesehen haben, tritt die reguläre Präcession nur unter besonderen Umständen auf, welche im vorigen Paragraphen sowie im sechsten Paragraphen des dritten Kapitels ausführlich angegeben sind. Wenn man sich aber auf den Standpunkt des Experimentes stellt, könnte man leicht zu der Auffassung kommen, dafs die reguläre Präcession die allgemeine Bewegung des schweren Kreisels wäre und dafs sie bei willkürlicher Wahl der Anfangsbedingungen zustande käme. In der That,

Hosted by Google

wenn wir den Kreisel, wie es gewöhnlich geschieht, mit einer Schnur aufziehen und ihn dann, ohne Hinzufügung eines sonstigen erheblichen Anstoſses, dem Einfluſs der Schwere überlassen, so scheint die Figurenaxe einen Kreiskegel um die Vertikale mit gleichmäſsiger Geschwindigkeit zu beschreiben. Dies Ergebnis müſste natürlich im höchsten Grade paradox erscheinen. Denn es ist nicht zu begreifen, wie die nach unten wirkende Schwere im allgemeinen eine Bewegung hervorrufen sollte, bei der z. B. sämtliche Punkte der Figurenaxe dauernd in horizontaler Richtung, also genau senkrecht gegen die Richtung der äuſseren Kraft, fortschreiten.

Hiergegen ist nun zu bemerken: *Erstens* ist das genannte Beobachtungsergebnis nicht exakt. Die Bewegung hat nur eine äuſserliche Ähnlichkeit mit der regulären Präcession. Wenn wir genauer hinsehen, bemerken wir, daſs die Figurenaxe kleine periodische Schwingungen um den Kreiskegel der regulären Präcession ausführt, welche allerdings bei sehr groſser Rotationsgeschwindigkeit kaum merklich sind und sich am ehesten noch in einem periodischen Erzittern der Unterlage kundgeben. Aus diesem Grunde haben wir die in Rede stehende Bewegung mit dem Namen der *pseudoregulären Präcession* belegt.

Die Täuschung wird noch dadurch verstärkt, daſs die Abweichungen von der regulären Präcession durch allerlei Nebenumstände, welche in der abstrakten Mechanik gewöhnlich nicht berücksichtigt werden, wie Reibung, Elasticität der Unterlage, schnell absorbiert werden. Diese Nebenumstände sollen indessen vorläufig auſser Betracht bleiben.

Zweitens sind die Verhältnisse, wie sie im Experimente gewöhnlich vorliegen, nicht die allgemeinen, sondern in gewisser Weise spezialisiert. Denn wir schaffen durch das Aufziehen allemal einen Impulsvektor, welcher genau oder nahezu in die Richtung der Figurenaxe fällt und welcher überdies stets eine sehr beträchtliche Länge hat.

Wir werden so, zunächst vom experimentellen Standpunkte aus, dazu geführt, die Bedingungen für die Möglichkeit der pseudoregulären Präcession folgendermaſsen zu formulieren:

Die Bewegung wird dann eine pseudoreguläre Präcession sein, wenn der Impulsvektor anfangs nahezu in Richtung der Figurenaxe fällt und eine beträchtliche Länge hat.

Die Worte „nahezu“ und „beträchtlich“ müssen dabei natürlich genauer präcisiert werden. Wir wollen etwa sagen, zwei Richtungen fallen „nahezu“ zusammen, wenn wir ihre Durchstoſsungspunkte auf der Einheitskugel mit bloſsem Auge nicht mehr unterscheiden können.

Um sodann mit dem Worte „beträchtlich“ eine genaue Vorstellung zu verbinden, müssen wir die Länge des Impulsvektors mit der Gröſse

der Schwerkraft vergleichen. Eine direkte Vergleichung der beiden Gröſsen ist deshalb miſslich, weil sie verschiedene Dimensionen haben, ihr Quotient also keine absolute Zahl ist. In der That hat $|i|$ die Dimension $\left[\frac{m l^2}{t}\right]$, P dagegen die Dimension $\left[\frac{m l^2}{t^2}\right]$ (vgl. pag. 88 u. 84). Dagegen sind $|i|^2$ und etwa AP zwei gleichbenannte Gröſsen, indem beiden die Dimension $\left[\frac{m^2 l^4}{t^2}\right]$ zukommt. Infolgedessen können wir diese beiden Gröſsen direkt numerisch vergleichen. Wir wollen nun etwa festsetzen: Die Länge des Impulses soll als beträchtlich gelten, wenn ihr Quadrat mindestens das 100-fache des (in gleichen Einheiten gemessenen) Produktes AP beträgt. Da der Hauptbestandteil von $|i|$ nach der vorhergehenden Festsetzung von dem Eigenimpulse N gebildet wird und da sicher $|i| \geqq N$ ist, so können wir unsere Erklärung des Wortes „beträchtlich" auch so fassen: Die Länge des Impulsvektors soll als beträchtlich gelten, wenn

$$N^2 > 100\, AP.$$

Die obige Bedingung für das Eintreten der pseudoregulären Präcession unterscheidet sich offenbar wesentlich von der im vorigen Paragraphen für die reguläre Präcession angegebenen. Während diese eine quantitative Bedingung war und ein ganz bestimmtes numerisches Verhältnis der Integrationskonstanten verlangte, ist unsere jetzige Bedingung qualitativer Natur; sie legt den Konstanten nur gewisse Ungleichungen auf. Dementsprechend ist die pseudoreguläre Präcession auch nur ein qualitativer Begriff; je nachdem wir den Ton auf die ersten oder letzten Silben des Wortes legen, postulieren wir eine geringere oder gröſsere Ähnlichkeit mit der regulären Präcession.

Übrigens bemerken wir, daſs im vorigen Kapitel, wo wir von der pseudoregulären Präcession sprachen (vgl. Fig. 28), die soeben angegebenen Bedingungen erfüllt waren. Dort war nämlich die Anfangslage des Impulses wie die der Figurenaxe horizontal ($n = 0$, $e = 0$), auſserdem war die Länge des Impulses als unendlich vorausgesetzt ($N = \infty$).

Wegen der Wichtigkeit unserer Bewegung wird es gut sein, die Behandlung möglichst elementar zu gestalten, wie solches auch von anderer Seite vielfach versucht worden ist, worauf wir im nächsten Paragraphen zurückkommen. Wir wollen also für das Folgende von unserer Kenntnis der allgemeinen Bewegungsformen zunächst absehen und unsere Resultate erst nachträglich mit der Darstellung der Kreiselbewegung durch elliptische Integrale in Beziehung setzen.

Eine rein elementare Behandlung ist in unserem Falle natürlich nur auf Grund von mehr oder minder plausibeln Vernachlässigungen möglich,

Hosted by Google

welche sich streng nur aus der strengen Theorie und auf analytischem Wege rechtfertigen lassen. Trotzdem ist eine solche Behandlung lehrreich, da sie uns zwingt, auf die einfachsten Erklärungsgründe zurückzugehen, welche in den fertigen Formeln nur versteckt enthalten sind.

Nehmen wir für den Augenblick an, daſs die Schwere überhaupt nicht wirksam wäre. Dann rotiert unser Kreisel, den wir als Kugelkreisel voraussetzen, wie wir wissen, um die im Raume feste Impulsaxe mit konstanter Geschwindigkeit herum. Die Figurenaxe beschreibt einen Kreiskegel, welcher sehr eng sein wird, da nach Voraussetzung bei unserer Bewegung der anfängliche Richtungsunterschied zwischen Figuren- und Impulsaxe sehr gering ist. Die Kreiselspitze durchläuft auf der Einheitskugel fortgesetzt einen kleinen Kreis. *Wir setzen überdies voraus, daſs die Impulsaxe nicht und auch nicht nahezu mit der Vertikalen zusammenfalle;* alsdann wird die durch die Figurenaxe gelegte Meridianebene von der durch die Impulsaxe gehenden Meridianebene bei unserer Rotation dauernd nur wenig abweichen und in erster Annäherung als mit jener zusammenfallend behandelt werden können. Ferner wird sich der Winkel ϑ zwischen der Vertikalen und der Figurenaxe bei unserer Drehung nur sehr wenig ändern und in erster Annäherung konstant gesetzt werden können.

Hierauf berücksichtigen wir die Wirkung der Schwere. Der Impuls bleibt unter ihrem Einfluſs nicht konstant, sondern setzt sich mit dem Drehstoſse der Schwere $P \sin \vartheta$ in jedem Momente zusammen. Es muſs unsere nächste Aufgabe sein, uns von der Bahn des Impuls-Endpunktes ein Bild zu verschaffen.

Die Bewegung des Kreisels besteht natürlich nach wie vor aus einer Drehung um die (jetzt nicht mehr feste) Axe des Impulses. Betrachten wir nur einen genügend kurzen Zeitraum, etwa den einer einmaligen Umdrehung der Figurenaxe um den Impulsvektor, so können wir bei unserer jetzigen Bewegung dieselben Vernachlässigungen eintreten lassen, welche soeben für die Drehung um die im Raume feste Impulsaxe vorgeschlagen wurden. Wir können nämlich sagen: *Die Änderung des Impulses steht auf der durch die Impulsaxe gelegten Meridianebene* (statt auf der durch die Figurenaxe gelegten) *senkrecht.* Und: *Die Änderungsgeschwindigkeit hat die konstante Gröſse* $P \sin \vartheta_0$, *wo* ϑ_0 *irgend einen mittleren Wert des Winkels* ϑ *bedeutet* (anstatt der variabeln Gröſse $P \sin \vartheta$). Durch diese Angaben ist aber die Bahn des Impuls-Endpunktes in einfachster Weise bestimmt. *Sie ist einfach ein Kreisbogen um die Vertikale und wird mit konstanter Geschwindigkeit durchlaufen.* Der Durchstoſsungspunkt des Impulsvektors mit der Einheitskugel, den wir durch J bezeichnen wollen, bewegt sich daher *auf einem*

Hosted by Google

Parallelkreise oder, wenn wir nur einen genügend kleinen Teil der Einheitskugel betrachten und diese an der betreffenden Stelle durch ihre Tangentialebene ersetzen, *auf einer geraden Linie.*

Wir können leicht die Fortschreitungsgeschwindigkeit v des Punktes J angeben. Diese verhält sich ersichtlich zu der Fortschreitungsgeschwindigkeit $P \sin \vartheta_0$ des Impuls-Endpunktes wie 1 zu $|i|$, unter $|i|$ die Länge des Impulsvektors verstanden. In dieser Proportion mögen wir $|i|$ einfach ersetzen durch die Projektion N des Impulsvektors auf die Figurenaxe, weil diese nach Voraussetzung den Hauptbestandteil des Impulses ausmacht. Wir finden so für die Geschwindigkeit v den Wert

$$(1) \qquad v = \frac{P \sin \vartheta_0}{N}.$$

Die Bewegung der Figurenaxe und die Bahnkurve der Kreiselspitze sind jetzt leicht zu bestimmen. Die Kreiselspitze F, d. h. der Durchstofsungspunkt der Figurenaxe mit der Einheitskugel, mufs nämlich, da die instantane Bewegung aus einer Drehung um den Impulsvektor besteht, ständig senkrecht gegen die Verbindungslinie JF fortschreiten. Ferner ist die Winkelgeschwindigkeit w, mit welcher sich F um J dreht, einfach gleich $\frac{|i|}{A}$. Ersetzen wir, wie oben, $|i|$ durch den Hauptbestandteil N des Impulses, so ergiebt sich für w der konstante Wert

$$(2) \qquad w = \frac{N}{A}.$$

Durch die letzten Angaben ist aber die Bahnkurve der Kreiselspitze als Cykloide charakterisiert.

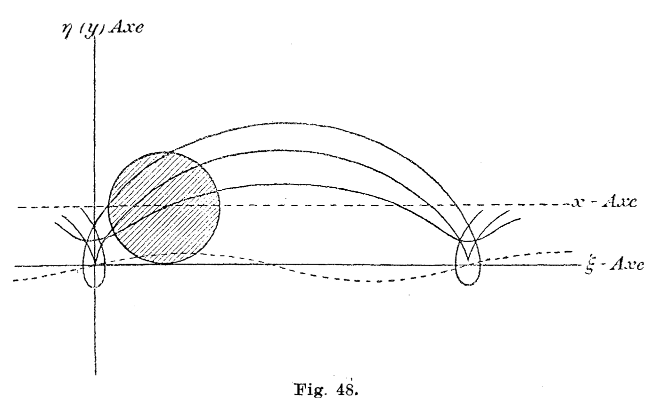


Fig. 48.

In der That, erzeugen wir uns eine Cykloide in gewöhnlicher Weise (vgl. Fig. 48) durch Abrollen eines Rades auf einer Geraden, so dreht sich jeder mit dem Rade festverbundene Punkt mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um den jeweiligen Berührungspunkt des Rades

und schreitet beständig senkrecht gegen die Verbindungslinie mit diesem fort, während der Berührungspunkt selbst mit konstanter Geschwindigkeit an seiner Geraden hinwandert. Wir können daher direkt die Bahn der Kreiselspitze F mit der Bahnkurve eines Punktes an einem rollenden Rade, d. h. mit einer Cykloide, und die Bahn des Impulspunktes J mit der geradlinigen Bahn des Berührungspunktes identifizieren.

Hiernach läſst sich die Gleichung der Bahnkurve sofort hinschreiben. Wir benutzen rechtwinklige Koordinaten ξ, η, indem wir die Gerade, an der unser Rad abrollt, zur ξ-Axe nehmen. Sei r der Radius des Rades, a der Abstand des die Cykloide aufzeichnenden Punktes F vom Mittelpunkt des Rades und ω die Winkelgeschwindigkeit des Abrollens, wobei wir ω der Gleichung (2) entsprechend zu wählen haben. Wir nehmen noch an, daſs für $t = 0$ der Punkt F senkrecht über dem Berührungspunkte J des Rades und auf der η-Axe liegen möge, so daſs seine Entfernung von derselben $\eta_0 = r + a$ wird. Dann lauten die Gleichungen der Cykloide:

$$\left\{\begin{aligned} \xi &= rwt + a \sin wt, \\ \eta &= \quad r + a \cos wt. \end{aligned}\right. \tag{3}$$

Die Gröſsen r und a sind hierin durch die Konstanten des Kreisels folgendermaſsen zu bestimmen. Da rw die Geschwindigkeit bedeutet, mit welcher der Berührungspunkt J auf der ξ-Axe fortschreitet, so müssen wir $rw = v$ haben und also mit Rücksicht auf (1) und (2):

$$r = \frac{AP \sin \vartheta_0}{N^2}. \tag{4}$$

Die Gröſse a bestimmt sich dann aus der anfänglichen Entfernung η_0 der Punkte J und F durch die Gleichung

$$a = \eta_0 - r.$$

Nun miſst η_0 die Abweichung des Impulsvektors von der Figurenaxe in der Anfangslage. Bezeichnen wir das von dem Endpunkt des Impulsvektors auf die Figurenaxe gefällte Lot mit p und seine Projektion auf die Vertikale mit n', so haben wir (vgl. die Fig. 49)

$$\eta_0 = \frac{p}{N} = \frac{n'}{N \sin \vartheta_0}. \tag{5}$$

Dabei ist noch, wie aus der Figur hervorgeht:

$$n' = n - N \cos \vartheta_0. \tag{5'}$$

Aus (4) und (5) folgt also als Wert von a

$$a = \frac{n'}{N \sin \vartheta_0} - \frac{AP \sin \vartheta_0}{N^2}. \tag{6}$$

Hosted by Google

Setzen wir die gefundenen Werte von r und a in die Gleichungen (3) ein und drücken wir auch w nach (2) aus, so erhalten wir *die Gleichung der Bahnkurve in der definitiven Form*

$$(7) \qquad \begin{cases} \xi = \frac{P \sin \vartheta_0}{N} t + \left(\frac{n'}{N \sin \vartheta_0} - \frac{A P \sin \vartheta_0}{N^2} \right) \sin \frac{N}{A} t, \\ \eta = \frac{A P \sin \vartheta_0}{N^2} + \left(\frac{n'}{N \sin \vartheta_0} - \frac{A P \sin \vartheta_0}{N^2} \right) \cos \frac{N}{A} t. \end{cases}$$

Je nachdem der Abstand a gröfser, gleich oder kleiner als der Radius r des Kreises ist, haben wir eine *verschlungene*, eine *gemeine* oder eine *gestreckte Cykloide*, welche drei Typen in der Fig. 48 angegeben sind.

Wir haben noch einen Punkt besonders hervorzuheben. Bei der Bestimmung der Impulskurve nahmen wir an, dafs die Figurenaxe sich dauernd nur wenig von der Impulsaxe entfernt. Die Zulässigkeit dieser Annahme ist unmittelbar nur für den Anfang der Bewegung einleuchtend; sie ergiebt sich für diesen aus den Anfangsbedingungen. Nun folgt aber aus dem periodischen Verhalten unserer Bahnkurven überhaupt, dafs die anfangs vorhandenen Bedingungen jedesmal nach Durchlaufung eines vollen Cykloidenbogens genau wieder vorliegen. Infolgedessen gelten unsere Überlegungen für alle folgenden Phasen der Bewegung ebenso wie für die erste.

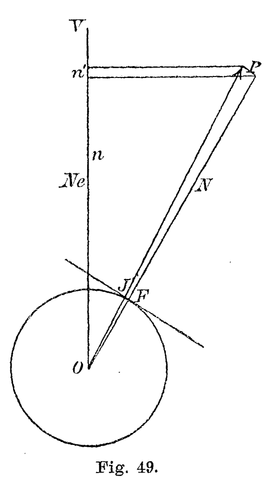


Fig. 49.

Natürlich erhalten wir durch das Vorstehende nur eine angenäherte Darstellung der Bewegung. Genau genommen müfsten wir nicht sagen: *Die Bahnkurve der Kreiselspitze unter den vorliegenden Anfangsbedingungen* ***ist*** *eine Cykloide,* sondern: *Dieselbe weicht von einer Cykloide um so weniger ab, je gröfser der Anfangsimpuls ist und je genauer er der Richtung nach mit der Figurenaxe zusammenfällt.*

Von welcher Art die Abweichung sein wird, ist leicht zu sehen. Da die Meridianebene durch die Impulsaxe nicht genau mit der Meridianebene durch die Figurenaxe zusammenfällt, wird auch die Impulskurve nicht genau ein Parallelkreis bez. eine Gerade sein; sie wird vielmehr, je nachdem sich bei der Rotation der Figurenaxe die eine Meridianebene von der anderen nach der einen oder anderen Seite hin entfernt, eine kleine Ausbiegung nach oben oder unten aufweisen, wie solches in der Fig. 48 durch die punktierte Linie angedeutet ist. Dementsprechend wird auch die Bahnkurve der Kreiselspitze, welche zu dieser gewellten Impulskurve gehört, kleine periodisch wiederkehrende Verzerrungen gegenüber der Cykloidengestalt aufweisen. Dieselben sind jedoch in

der Figur und auch in unseren Formeln nicht enthalten; sie würden in letzteren den fortgelassenen Gliedern höherer Ordnung entsprechen.

Übrigens könnten wir unsere Cykloidenbewegung so erweitern, daſs sie auch diese Glieder zweiter und höherer Ordnung richtig wiedergiebt. Wir müſsten zu dem Zwecke auf dem rollenden Kreise abermals einen Kreis abrollen lassen, auf diesem eventuell einen nächsten u. s. f. Durch freie Wahl der Radien und der Umlaufsgeschwindigkeiten erhalten wir ein hinreichend allgemeines Schema, um beliebige Bewegungen mit beliebiger Genauigkeit wiederzugeben. Unsere obige näherungsweise Darstellung der Bahnkurve erscheint unter diesem Gesichtspunkte als erstes Glied einer unendlichen Reihe von Approximationen.*)

Die Fig. 48 müssen wir auffassen als eine auſserordentlich vergröſserte Wiedergabe der wirklichen Verhältnisse Im Experiment werden die einzelnen Cykloidenbögen so klein und folgen so schnell aufeinander, daſs das Auge sie nicht mehr wahrnimmt und den Eindruck einer gewöhnlichen Präcession erhält. Zum Belege dessen berechnen wir etwa die Durchlaufungsdauer und die Spannweite des einzelnen Cykloidenbogens. Die Zeit, während welcher der einzelne Teilbogen zurückgelegt wird, heiſse 2ω; sie beträgt nach unsern Formeln

$$2\omega = \frac{2\pi}{w} = 2\pi\frac{A}{N};$$

sie wird also mit wachsendem N zu Null. Die Spannweite des Cykloidenbogens, d. h. die Strecke, um welche die Figurenaxe während einer Periode in horizontaler Richtung fortschreitet, ist gleich

$$\frac{P\sin\vartheta_0}{N}\,2\omega = \frac{AP}{N^2}\sin\vartheta_0\cdot 2\pi;$$

diese Gröſse enthält den Faktor $\frac{AP}{N^2}$, welchen wir oben als klein $\left(<\frac{1}{100}\right)$ voraussetzten. Gleichzeitig mit der Spannweite wird auch die Höhe der Cykloidenbögen bei wachsendem N verschwindend klein entsprechend der Formel

$$a = \frac{n'}{N\sin\vartheta_0} - \frac{AP\sin\vartheta_0}{N^2}.$$

Die sämtlichen Dimensionen der Cykloidenkurve werden also sozusagen mikroskopisch klein. Das Auge nimmt von dem ganzen Spiel der Kreisel-

*) Das im Texte angedeutete „*Prinzip der cykloidischen Annäherung*" liefert auch die mathematische Grundlage, auf welcher die Auffassung der Himmelsmechanik im *Ptolemäischen Weltsysteme* beruht. Vgl. hierzu Möbius, Elemente der Mechanik des Himmels, 1843, Kap. III, Theorie der epicykloidischen Bewegung. Ges. W. Bd. IV.

Hosted by Google

spitze nur ein unbestimmtes Mittel wahr, welches in einer scheinbar regulären Präcession besteht.

Ein numerisches Beispiel möge dieses veranschaulichen. Wir betrachten ein Schwungrad, dessen Masse einen Wulst von quadratischem Querschnitt bilden möge. Die Seite des Querschnittquadrates sei 2 cm, der Abstand seines Mittelpunktes von der Figurenaxe 5 cm. Der Unterstützungspunkt habe den Abstand von 2,5 cm vom Schwerpunkt des Rades. Zur Berechnung der Trägheitsmomente wollen wir uns gestatten, die Masse des einzelnen Querschnittes in dem Mittelpunkt desselben konzentriert zu denken. Dann findet man leicht für das absolute Maſssystem:

$$C = 1000\,\varrho\,\pi, \quad A = 750\,\varrho\,\pi, \quad P = 100\,\varrho\,\pi\,g,$$

unter ϱ die Dichtigkeit des Materiales verstanden.

Die Eigenrotation des Schwungrades betrage etwa (wie pag. 135) 20 Umdrehungen in der Sekunde. Dann ist seine Winkelgeschwindigkeit um die Figurenaxe $40\,\pi$; mithin wird

$$N = 40\,000\,\varrho\,\pi^2 \quad \text{und} \quad \frac{N^2}{AP} = \frac{(40\,000\,\varrho\,\pi^2)^2}{75\,000\,(\varrho\,\pi)^2\,g} = \frac{64\,000\,\pi^2}{3\,g}.$$

Der Bruch $\frac{\pi^2}{g}$ kann näherungsweise gleich $\frac{1}{100}$ gesetzt werden; es wird also

$$\frac{N^2}{AP} = \frac{640}{3} > 200.$$

Der hier betrachtete Kreisel ist allerdings kein Kugelkreisel. Wir wissen aber, daſs ein Kreisel von ungleichen Trägheitsmomenten A und C dieselbe Bahnkurve der Kreiselspitze in demselben Tempo beschreibt, wie ein Kugelkreisel vom Trägheitsmomente A und denselben Impulskonstanten n, N u. s. w. Infolgedessen dürfen die obigen Formeln auf unseren Fall übertragen werden.

Beträgt nun etwa die Anfangsneigung ϑ_0 der Figurenaxe gegen die Vertikale 30^0 und überlassen wir unseren Kreisel, ohne einen erheblichen seitlichen Anstoſs hinzuzufügen, dem Einfluſs der Schwere, so ergiebt sich nach dem Vorstehenden die Durchlaufungszeit des einzelnen Cykloidenbogens

$$2\,\omega = \frac{1500\,\varrho\,\pi^2}{40000\,\varrho\,\pi^2} < 0{,}04 \text{ sec.}$$

Die Höhe desselben wird gleichzeitig, wenn wir etwa n' direkt gleich Null nehmen:

$$|\,2\,a\,| = 2\,\frac{AP}{N^2}\sin\vartheta_0 = \frac{AP}{N^2} < 0{,}05 \text{ mm.}$$

Es ist klar, daſs sich diese kleinen Gröſsen der Beobachtung so gut wie vollständig entziehen.

Hosted by Google

Wie wir sehen, macht die Erklärung der pseudoregulären Präcession auf dem von uns eingeschlagenen Wege gar keine Schwierigkeit. Wenn man sonst diese Bewegung überraschend und paradox findet, so beruht das zum guten Teil darin, daſs man bei der Auffassung der mechanischen Vorgänge gewöhnlich von der Punktmechanik ausgeht und also in unserem Falle ausschlieſslich an die nach unten gerichtete Wirkung der Schwere auf den frei beweglichen Massenpunkt denkt. Natürlich ist eine Erklärung der pseudoregulären Präcession auch vom Boden der Punktmechanik möglich, wie wir im folgenden Paragraphen noch ausführlicher entwickeln werden. Der Weg aber, welcher von da aus zum Verständnis unserer Kreiselbewegung führt, ist naturgemäſs ziemlich lang. Er wird wesentlich abgekürzt, wenn wir von vornherein mit den Begriffen des Trägheitsmomentes, der instantanen Drehung und namentlich mit dem Begriffe des Impulses operieren, wenn wir also, wie es hier geschah, von der Auffassung des starren Körpers als eines einheitlichen mechanischen Systems ausgehen. Natürlich sind jene Begriffe auch bei uns letzten Endes aus der Punktmechanik abgeleitet, aber diese Ableitung ist eben vorweg genommen und braucht darum nicht hinterher zwischengeschoben zu werden.

Teils um die vorhergehenden Betrachtungen zu kontrollieren, teils um sie in Zusammenhang zu bringen mit der allgemeinen Darstellung der Kreiselbewegung, wollen wir nun unser Problem noch einmal analytisch anfassen. Wir sind dabei in der angenehmen Lage, mit den Näherungsformeln vom Schluſs des vorigen Kapitels auszukommen, deren begrenzte Genauigkeit in dem vorliegenden Grenzfalle in eine beliebige Genauigkeit übergeht. Zunächst haben wir uns ein Urteil über die Gröſse des Fehlers bei Anwendung jener Näherungsformeln zu bilden.

Unter der Annahme, daſs der Impulsvektor nahezu in Richtung der Figurenaxe fällt, wird die Impulskomponente n (vgl. die Fig. 49) nahezu gleich Ne. Die Differenz $n - Ne$ bezeichnen wir, wie in Gleichung (5′) mit n', wobei $n' : N$ als eine kleine Zahl vorausgesetzt wird. Daneben werden wir unsere Annahme, daſs $AP : N^2$ eine kleine Zahl ist, zu benutzen haben.

Den Ausgangsparallelkreis e sehen wir wie früher als bekannt an; der zweite Parallelkreis e' läſst sich alsdann leicht näherungsweise aus der Gleichung $U_1 = 0$ bestimmen. Setzen wir nämlich in dieser Gleichung $n = Ne + n'$ und vernachlässigen wir das Quadrat von n' gegen das von N, so erhalten wir nach Gleichung (2) von pag. 240, indem wir zusammenziehen:

$$U_1 = N^2 (1 - e^2)(e - u) + 2 n' N (1 - e^2) - 2 AP (1 - e^2)(1 - u^2).$$

Wir nehmen ebenso wie bei der obigen geometrischen Betrachtung an, daſs die Anfangslage der Figurenaxe nicht und auch nicht nahezu mit der Vertikalen zusammenfällt ($e \neq \pm 1$), worauf wir mit $N^2(1-e^2)$ dividieren können, und erhalten zur Bestimmung von e' die Gleichung:

$$e - u + \frac{2n'}{N} - \frac{2AP}{N^2}(1-u^2) = 0. \tag{8}$$

Da die beiden letzten Terme dieser Gleichung nach Voraussetzung kleine Zahlen sind, sehen wir bereits, daſs die eine Wurzel (e') nahezu gleich e, die zweite (e'') sehr groſs werden muſs. Einen genaueren Wert von e' erhalten wir, wenn wir in dem an sich kleinen letzten Gliede u durch e oder lieber noch durch $u_0 = \frac{e+e'}{2}$ ersetzen; so ergiebt sich

$$e' = e + 2\varepsilon, \quad \varepsilon = \frac{n'}{N} - \frac{AP}{N^2}(1-u_0{}^2). \tag{9}$$

Wir haben pag. 273 zwei Fälle unterschieden, in denen die dort behandelten Näherungsformeln zur Berechnung von u einen beliebig kleinen Fehler ergeben. Der erste Fall war der, daſs e und e' hinreichend wenig verschieden, der zweite der, daſs e'' hinreichend groſs wird. Der erste dieser Fälle liegt bei der pseudoregulären Präcession, wie wir sehen, vor. In der That beträgt der Vertikalabstand der beiden begrenzenden Parallelkreise e und e' nur die sehr kleine Gröſse 2ε. Zum Überfluſs trifft aber in unserem Falle auch noch das zweite Kriterium zu: e'' wird, wie bereits erwähnt, eine sehr groſse Zahl. In der That, berechnen wir e'' nach Gleichung (9) von pag. 273, indem wir $n = Ne + n'$ setzen und n'^2 gegen N^2 vernachlässigen, so folgt

$$e'' = \frac{N^2}{2AP} - e'.$$

Dieser Wert ist nach unserer Voraussetzung über das Verhältnis $N^2 : AP$ eine sehr groſse Zahl; wir werden sogar den echten Bruch e' im Verhältnis zum ersten Gliede fortlassen können. Wir setzen also:

$$e'' = \frac{N^2}{2AP},$$

und mit demselben Grade der Annäherung:

$$\left\{\begin{aligned} & e'' - u_0 = \frac{N^2}{2AP}, \\ & \frac{2P(e''-u_0)}{A} = \frac{N^2}{A^2}. \end{aligned}\right. \tag{10}$$

Ein etwas genauerer Wert für die letztere Gröſse wäre dieser:

$$\frac{2P(e''-u_0)}{A} = \frac{N^2 - 4APu_0}{A^2}; \tag{10'}$$

wir begnügen uns im Folgenden aber lieber mit dem einfacheren Werte aus Gleichung (10).

Sowohl wegen der Kleinheit von ε wie wegen der Gröfse von e'' wird der pag. 272 abgeschätzte Fehler τ in unserem Falle sehr klein und zwar um so kleiner, je vollständiger die unserer Bewegung zu Grunde liegenden Bedingungen erfüllt sind. Wir können daher u mit beliebiger Annäherung durch die Gleichung (8') von pag. 272 darstellen. Mit Rücksicht auf die Gleichungen (9) und (10) der vorigen Seite ergiebt sich

$$u = u_0 + \left(\frac{n'}{N} - \frac{AP}{N^2}(1 - u_0^2)\right) \sin \frac{N}{A} t.$$

Die Kleinheit von ε berechtigt uns ferner, auch ψ durch die Näherungsformel (14') von pag. 276 darzustellen. Wir sahen nämlich, dafs der Fehler in dieser Darstellung mit verschwindendem ε selbst verschwindet.

Die Koeffizienten jener Gleichung lassen sich dabei in unserem Falle vereinfachen. Es wird nämlich, wenn wir $n = Ne + n'$ setzen:

$$n - Nu_0 = N(e - u_0) + n' = N\frac{e - e'}{2} + n' = -N\varepsilon + n',$$

also mit Rücksicht auf (9) direkt

$$\frac{n - Nu_0}{A(1 - u_0^2)} = \frac{P}{N}.$$

Ähnlicher Weise vereinfacht sich der zweite Koeffizient

$$\frac{N(1 + u_0^2) - 2nu_0}{(1 - u_0^2)^2 \sqrt{2AP(e'' - u_0)}}$$

Nach (10) können wir hierfür schreiben:

$$\frac{N(1 - u_0^2) - 2(n' - N\varepsilon)u_0}{N(1 - u_0^2)^2};$$

da dieser Ausdruck in Gleichung (14') von pag. 276 noch mit der kleinen Gröfse ε multipliziert erscheint, können wir ihn weiter vereinfachen, indem wir $(n' - N\varepsilon)$ gegen N vernachlässigen; die hierdurch bewirkte Ungenauigkeit ist im Resultate von der Ordnung ε^2, würde also nur die Form des Restgliedes beeinflussen. Unser zweiter Koeffizient kann daher gleich gesetzt werden:

$$\frac{1}{1 - u_0^2}.$$

Daraufhin erhalten wir aus der angezogenen Gleichung folgenden einfachen Näherungswert für ψ:

$$\psi = \frac{P}{N} t + \frac{\varepsilon}{1 - u_0^2} \cos \frac{N}{A} t.$$

Die Bahnkurve der Kreiselspitze wird daher jetzt, wenn wir noch $u = \cos\vartheta$, $u_0 = \cos\vartheta_0$ setzen und für ε den Wert aus (9) eintragen,

Hosted by Google

durch die folgenden beiden Gleichungen dargestellt:

$$(11)\qquad \begin{cases} \cos\vartheta = \cos\vartheta_0 + \left(\frac{n'}{N} - \frac{AP}{N^2}\sin^2\vartheta_0\right)\sin\frac{N}{A}t, \\ \psi = \frac{P}{N}t \quad + \left(\frac{n'}{N\sin^2\vartheta_0} - \frac{AP}{N^2}\right)\cos\frac{N}{A}t, \end{cases}$$

in genauer Übereinstimmung mit der Cykloidentheorie, wie wir sogleich noch näher ausführen werden.

Das Verhältnis dieser Formeln zu der allgemeinen Darstellung der Kreiselbewegung durch die elliptischen Integrale ist nach den Auseinandersetzungen von pag. 274 und 277 klar. Die Kleinheit des Moduls k bez., was dasselbe bedeutet, des Fehlers τ erklärt zur genüge, weshalb die elliptischen Integrale in unserem Falle durch trigonometrische Funktionen mit guter Annäherung ersetzt werden können.

Diese Bemerkungen werden teilweise hinfällig, wenn unsere ursprünglichen Voraussetzungen nur teilweise erfüllt sind. Wenn z. B. der Anfangsimpuls nahe mit der Figurenaxe zusammenfällt und aufserordentlich grofs, aber nicht grofs gegen die Schwerewirkung ist, d. h. wenn n'/N, aber nicht AP/N^2 eine kleine Zahl ist, so wird die Bewegung von der pseudoregulären Präcession wesentlich verschieden; die Fehler in unseren Näherungsformeln können sehr beträchtlich sein. In der That wird sich ein Kreisel mit grofsem N und P ebenso verhalten, wie ein Kreisel mit entsprechend verkleinerten Werten von N und P; er kann daher die im vorigen Kapitel geschilderten allgemeinen Bewegungen beschreiben, welche mit beliebiger Genauigkeit nur durch die elliptischen Integrale dargestellt werden können. Wenn andrerseits der Eigenimpuls sehr grofs, das Schweremoment nicht sehr grofs ist und die Impulsaxe in der Anfangslage wesentlich von der Figurenaxe abweicht, d. h. wenn AP/N^2 aber nicht n'/N klein ist, so werden die Parallelkreise e und e' nicht mehr benachbart zu sein brauchen. Immerhin ist dann noch der Wert von e'' (s. Gleichung (9) von pag. 273) sehr grofs, so dafs der Fehler in der trigonometrischen Darstellung von u auch dann noch sehr klein wird. In diesem Falle, können wir sagen, liegt ein Kreisel vor, welcher einem kräftefreien Kreisel (von mäfsigem N und verschwindendem P) benachbart ist. So wie die Bewegung des letzteren genau, so kann die des ersteren angenähert durch trigonometrische Terme beschrieben werden.

Dafs unsere Gleichungen (11) mit den früheren Formeln (7) identisch sind, erkennt man folgendermafsen: Wir ersetzen zunächst die Kugeloberfläche wieder durch ihre Tangentialebene an der betrachteten Stelle der Bahnkurve, was wegen der aufserordentlich kleinen Dimensionen der letzteren gestattet sein wird. Die mittlere Fortschreitungsrichtung

Hosted by Google

$u = u_0$ der Kreiselspitze machen wir zur x-Axe eines rechtwinkligen Koordinatensystems (xy), dessen Anfangspunkt mit dem Orte der Kreiselspitze zur Zeit $t = 0$ zusammenfallen möge. Alsdann drücken sich die rechtwinkligen Koordinaten x, y der Kreiselspitze leicht durch ihre früheren Koordinaten ψ, u aus. Da nämlich ψ (von einer additiven Konstanten abgesehen) das Azimuth ist, um welches die Projektion der Figurenaxe in der Äquatorebene von ihrer Anfangslage aus bis zur Zeit t fortgeschritten ist und da andrerseits x die horizontale Verrückung der Kreiselspitze auf der Kugeloberfläche (bez. in deren Tangentialebene) während derselben Zeit bedeutet, so verhält sich ψ zu x, wie der Radius des Äquators zu dem Radius des durch die Kreiselspitze hindurchlaufenden Parallelkreises, d. h. angenähert wie 1 zu $\sin\vartheta_0$. Es wird also

$$x = \psi \sin\vartheta_0.$$

Ferner bedeutet $u - u_0 = \cos\vartheta - \cos\vartheta_0$ die vertikale Projektion der meridionalen Abweichung der Kreiselspitze von dem mittleren Parallelkreise u_0. Diese meridionale Abweichung selbst ist aber unsere Koordinate y. Wir haben daher

$$y = \frac{u - u_0}{\sin\vartheta_0} = \frac{\cos\vartheta - \cos\vartheta_0}{\sin\vartheta_0}.$$

Infolgedessen gehen die Gleichungen (9) über in:

$$(12)\qquad \begin{cases} x = \dfrac{P\sin\vartheta_0}{N}\,t + \left(\dfrac{n'}{N\sin\vartheta_0} - \dfrac{AP\sin\vartheta_0}{N^2}\right)\cos\dfrac{N}{A}t, \\ y = \qquad\qquad\;\; \left(\dfrac{n'}{N\sin\vartheta_0} - \dfrac{AP\sin\vartheta_0}{N^2}\right)\sin\dfrac{N}{A}t. \end{cases}$$

Diese Formeln unterscheiden sich nun von den Gleichungen (7) nur durch eine Verschiebung des Koordinatensystems. Während unsere ξ-Axe früher mit der Impulskurve zusammenfiel und (vgl. Fig. 48) unsymmetrisch gegen die Bahnkurve der Kreiselspitze lag, haben wir unsere x-Axe so gewählt, daſs sie mit dem mittleren Orte u_0 der Kreiselspitze identisch ist. Wir bringen die Gleichungen (7) und (12) auch zur formalen Übereinstimmung, wenn wir setzen:

$$x = \xi, \quad y = \eta - \frac{AP\sin\vartheta_0}{N^2},$$

und wenn wir überdies den Anfangspunkt der Zeitmessung um $\frac{\pi A}{2N}$ verschieben.

Unsere Bahnkurve (12) können wir daher wieder geometrisch als *Cykloide* durch Abrollung eines Kreises auf einer Geraden erzeugen oder wir können auch, was im vorliegenden Fall auf dasselbe herauskommt, unsere Bewegung als *Überlagerung einer regulären Präcession und einer Nutation* im Sinne von pag. 276 auffassen.

Hosted by Google

Die Gleichungen der regulären Präcession entnehmen wir den ersten Gliedern der rechten Seiten von (11); sie lauten

$$\cos\vartheta = \cos\vartheta_0, \quad \psi = \frac{P}{N}\,t. \tag{13}$$

Die Nutation beschreiben wir am besten durch ihre Gleichung in den x, y-Koordinaten, welche wir den zweiten Termen der rechten Seiten von (12) entnehmen. Wir haben

$$x = \varepsilon\cos\frac{Nt}{A}, \quad y = \varepsilon\sin\frac{Nt}{A}, \quad \varepsilon = \frac{n'}{N\sin\vartheta_0} - \frac{AP\sin\vartheta_0}{N^2}. \tag{14}$$

Unter den speziellen Voraussetzungen, welche der pseudoregulären Präcession zu Grunde liegen, wird also die Nutation eine *kreisförmige Schwingung*; ihre horizontale und ihre meridionale Amplitude sind beide gleich ε. Dagegen sahen wir, daſs unter den allgemeinen Voraussetzungen am Schlusse des vorigen Kapitels sowie bei den der regulären Präcession benachbarten Bahnen die Nutation eine *elliptische Schwingung* war. Ferner wird die *Nutationsperiode*, d. h. die Gröſse

$$2\omega = \frac{2\pi A}{N} \tag{15}$$

bez., wenn wir statt (10) die etwas genauere Gleichung (10′) zu Grunde legen, die Gröſse

$$2\omega = \frac{2\pi A}{\sqrt{N^2 - 4APu_0}}, \tag{15'}$$

bei der pseudoregulären Präcession mit wachsendem N unendlich klein, während sie beispielsweise bei den Nachbarkurven der regulären Präcession endlich blieb. Schlieſslich wird jetzt auch die *Präcessionsgeschwindigkeit* $\frac{P}{N}$ unendlich klein, während sie im allgemeinen gleichfalls einen endlichen Wert hatte.

Von den beiden Teilbewegungen, in welche wir die pseudoreguläre Präcession zerlegt haben, nimmt nun das Auge bei der Beobachtung nur die erste deutlich wahr. Allerdings ist diese Bewegung, wie wir eben hervorhoben, bei genügend groſsem N äuſserst langsam. Dafür geht in ihre Gleichungen aber der Faktor t explicite ein. *Trotz des äuſserst geringen Wertes der Winkelgeschwindigkeit werden wir daher, wenn wir die Beobachtungszeit nur lange genug ausdehnen, eine deutliche Präcession der Figurenaxe bemerken können.* In den Gleichungen unserer zweiten Teilbewegung dagegen tritt t nur als Argument der trigonometrischen Funktionen auf. *Diese schnell veränderlichen Terme von geringer absoluter Gröſse entziehen sich daher dauernd der Beobachtung.* Den hierdurch bezeichneten Unterschied können wir auch mit Be-

Hosted by Google

nutzung einer in der Astronomie üblichen Terminologie folgendermafsen formulieren:

Unsere erste Teilbewegung stellt eine säculare, unsere zweite eine periodische Störung der Ruhelage dar.

Während aber unsere erste Teilbewegung für die Beschreibung der Bahnkurve bez. für die Schilderung des Beobachtungsergebnisses die ausschlaggebende ist, wird die zweite Teilbewegung für die mechanische Erklärung des Vorganges die wichtigere.

Die mechanische Erklärung hat nämlich, nach den Grundgesetzen der Dynamik, nicht sowohl an den Ort, als an die Geschwindigkeit und die Beschleunigung der Massenteilchen anzuknüpfen. Differentiieren wir nun aber die Gleichungen unserer Bahnkurve nach t, so verschiebt sich das Gröfsenverhältnis der einzelnen Terme. Die periodischen Glieder multiplizieren sich nämlich jedesmal mit dem (sehr grofsen) Faktor $\frac{N}{A}$, während das säculare Glied den Faktor t verliert bez. (bei zweimaliger Differentiation) überhaupt verschwindet. Infolgedessen wird die Erklärung des Bewegungsvorganges wesentlich auch auf die zweite Teilbewegung Rücksicht nehmen müssen. Wollten wir, gestützt auf ein ungenaues Beobachtungsergebnis, die Bewegung als eine wirkliche reguläre Präcession behandeln, so müfste sie uns in der That unverständlich und paradox erscheinen. *Die mechanische Erklärung mufs sich vielmehr in unserem Falle gerade auf diejenigen Momente der Bewegung gründen, welche in der Beobachtung so gut wie gänzlich verloren gehen.*

In diesen Ausführungen sehen wir die vollständige Auflösung des Paradoxons der Kreiselbewegung. Wir erkennen insbesondere, *warum die Beschreibung der unter den üblichen experimentellen Bedingungen vor sich gehenden Kreiselbewegung als einer regulären Präcession zwar die Beobachtungen sehr gut wiedergeben, aber dennoch für die mechanische Erklärung unzureichend sein kann.*

In historischer Hinsicht bemerken wir schliefslich, dafs die pseudoreguläre Präcession, wenn auch nicht unter diesem Namen, zum ersten Male von Poisson*) aus den allgemeinen Differentialgleichungen der Bewegung abgeleitet worden ist. Nur ist bei Poisson ebenso wie bei den späteren Analytikern**) das in geometrischer und mechanischer Hinsicht Wesentliche nicht so ausführlich wie hier aus den Formeln herausgeschält. Der Leser läuft bei der Lektüre dieser rein analytischen Darstellungen Gefahr, gerade das Wichtige zu übersehen oder mangelhaft aufzufassen.

---

*) Vgl. Traité de Mécanique, t. II, Nr. 432, pag. 175 der zweiten Ausgabe.

**) Z. B. Kirchhoff, Mechanik, 7. Vorlesung, § 5.

Hosted by Google

§ 3. Die in der Litteratur vorkommenden populären Erklärungen des Kreiselphänomens.

Die elementaren Darstellungen der Kreiseltheorie befassen sich nahezu ausschliefslich mit der pseudoregulären Präcession, weil diese für das Experiment hauptsächlich in Betracht kommt und weil die allgemeine Kreiselbewegung sich mit elementaren Hülfsmitteln überhaupt nicht darstellen läfst. Wir geben daher an dieser Stelle eine Übersicht der wichtigeren populären Erklärungen, ohne dabei irgend auf Vollständigkeit Anspruch zu machen. Das Gesamtbild, welches sich hier ergiebt, ist kein sehr erfreuliches. Wir werden auf mancherlei unhaltbare oder unvollständige Erklärungsversuche stofsen. Übrigens war gerade dieser Umstand die ursprüngliche Veranlassung zur Abfassung der vorliegenden ausführlichen Monographie.

1. Eine erste Kategorie von Darstellungen begnügt sich mit einer blofsen Schilderung der Vorgänge. Vor allen Dingen ist es folgendes Experiment, welches betont wird: Wenn man den Kreisel in starke Rotation versetzt und alsdann auf die Figurenaxe einen Zug wirken läfst, etwa dadurch, dafs man die Kreiselspitze durch einen herumgeschlungenen Faden zur Seite zieht, so weicht die Axe scheinbar senkrecht gegen die Richtung des Fadens aus. Diese und ähnliche Dinge werden besonders lebhaft in dem früher citierten*) interessanten Schriftchen von Perry vorgetragen, wo der Kreisel geradezu mit einem eigensinnigen Tier verglichen wird, welches immer in anderer Richtung läuft, als es angetrieben wird.

Das genannte Experiment kann dazu dienen, das Verhalten der Figurenaxe unter dem Einflufs der Schwere zu erläutern. In der That können wir die Schwerkraft mit einem Zuge vergleichen, welche den Schwerpunkt und also auch die Figurenaxe in jedem Augenblicke nach unten zu bewegen strebt. Dem Experiment entsprechend werden wir also erwarten, dafs die Spitze des schweren Kreisels scheinbar senkrecht gegen die Schwerkraft, d. h. in horizontaler Richtung ausweicht.

Als blofses Beobachtungsergebnis mufs man eine solche Darstellung der Verhältnisse gelten lassen. Sie hat ihre Richtigkeit aber nur innerhalb der Ungenauigkeitsgrenzen der Beobachtung. Thatsächlich wissen wir, dafs die anfängliche Bewegungsrichtung der Kreiselspitze, falls wir sie ohne Hinzufügung eines seitlichen Anstofses dem Zuge des Fadens bez. dem Einflufs der Schwere überlassen, nicht senkrecht gegen den Zug, sondern in die Richtung des Zuges fällt (vgl. die nebenstehende

*) pag. 134.

Zackenkurve [gemeine Cykloide]) und dafs nur die Kleinheit der Bögen, aus denen sich die Bahnkurve bei sehr grofsem Eigenimpuls zusammensetzt, den genannten Eindruck im Experimente hervorruft.

2. Die beschriebene ungenaue Beobachtung sucht man nun gelegentlich durch einen unrichtigen Schlufs aus den Prinzipien der Mechanik, wie folgt, zu erklären: Der Kreisel rotiere anfänglich um die Figurenaxe, welche irgendwie gegen die Vertikale geneigt sei. Die Figurenaxe stellt dann gleichzeitig die Rotations- und die Impulsaxe dar. Nun kommt der kontinuierliche Zug der Schwerkraft zur Wirkung. Diesem entspricht ein Drehimpuls, welcher senkrecht gegen die durch Figurenaxe und Vertikale gelegte Meridianebene gerichtet ist und welcher sich mit dem ursprünglichen Drehimpulse nach dem Parallelogramm der Kräfte zusammensetzt. Man sagt nun: Die Diagonale des Parallelogramms giebt die veränderte Lage der „Axe". Das ist richtig bezüglich der Impulsaxe und beim Kugelkreisel auch bezüglich der Rotationsaxe. In den Erklärungen, die wir im Auge haben, wird aber unter „Axe" fernerhin stillschweigend die Figurenaxe verstanden, für die das Gesagte keineswegs zutrifft; es wird also geschlossen, dafs die Figurenaxe beständig senkrecht gegen die genannte Meridianebene, d. h. auf einem Kreiskegel um die Vertikale fortschreiten müsse! — In Wirklichkeit bewegt sich die Figurenaxe natürlich auf einem Kreiskegel um die jeweils veränderliche Drehungsaxe, welche ihrerseits durch die Lage des Impulses bestimmt ist. Die Folge ist, dafs die Figurenaxe anfangs keineswegs senkrecht gegen die Richtung des Zuges ausweicht, sondern sich vertikal nach unten bewegt. Fällt, wie hier vorausgesetzt wurde, die Impuls- und Figurenaxe anfangs zusammen, so ist eine wirkliche reguläre Präcession schlechterdings unmöglich. Die Bedingung für die letztere besteht vielmehr, wie wir früher sahen, darin, dafs Impuls- und Figurenaxe in gewisser Weise auseinanderfallen, d. h. dafs der Kreiselspitze aufser dem Zuge der Schwerkraft ein ganz bestimmter seitlicher Anstofs erteilt werde.

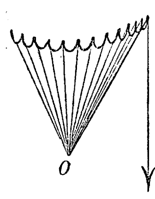


Fig. 50.

Das ganze Verfahren, welches wir im Vorstehenden besprochen haben, kann als ein vorzügliches Beispiel einer „quaternio terminorum" gelten. Der Irrtum rührt einfach daher, dafs das Wort Axe in zwei verschiedenen Bedeutungen gebraucht wurde; derselbe ist um so merkwürdiger, als man notwendiger Weise fragen mufs: Was wird aus der Bewegung, wenn die Geschwindigkeit der Anfangsrotation nachläfst, in welchem Falle auch die Beobachtung eine Abweichung von der regulären Präcession deutlich erkennen läfst?

Der genannte Irrthum ist keinem geringeren, wie dem berühmten

französischen Experimentator Foucault und seinem Konkurrenten Sire passiert und findet sich seitdem häufig in der Litteratur. Wir verweisen bezüglich genauerer Angaben auf eine verdienstvolle Arbeit von Gilbert*): Etude historique et critique sur le problème de la rotation.

3. Wir gehen nun auf die sogenannte *Airysche Erklärung* ein, die gleichfalls in einem wesentlichen Punkte bedenklich ist. Als Astronom interresiert sich Airy**) namentlich für das Problem der Präcession und Nutation des Erdkörpers; diesem schickt er seine elementare Theorie der Kreiselbewegung als Einleitung voraus.

Airy leitet zunächst den Satz von dem Parallelogramm der Drehungsvektoren ab, hebt aber nicht hervor, daſs dieser Satz lediglich eine kinematische Bedeutung hat. Den Begriff des Impulsvektors und das Parallelogramm der Impulsvektoren, welches in kinetischer Hinsicht allein maſsgebend ist und den Ablauf der Bewegung reguliert, hat Airy nicht. Die Massenverteilung des Körpers bleibt angeblich ganz allgemein.

Airy behandelt nun ein Rotationsproblem, welches mit dem des schweren Kreisels nur eine entfernte Ähnlichkeit hat. Er setzt nämlich voraus, daſs auf den Körper eine Kraft wirkt, welche ihn beständig um eine zur *Drehungsaxe* OD senkrechte und in einer festen Ebene ΔOD gelegenen Axe $O\Delta$ zu drehen strebt. Die Gröſse der Kraft soll unveränderlich sein. (Hiergegen ist zu bemerken, daſs bei dem wirklichen Rotationsproblem des schweren Kreisels die Axe der Zusatzdrehung (die Knotenlinie) nicht auf der Drehungsaxe sondern auf der Figurenaxe senkrecht steht und im allgemeinen auch nicht konstant ist, ein Umstand, dessen sich Airy selbstverständlich vollkommen bewuſst ist. Es handelt sich bei Airy zunächst eben nur um ein fingiertes Problem.) Durch successive Anwendung des Satzes vom Parallelogramm der Drehungsvektoren schlieſst Airy, daſs der Drehungsvektor der Gröſse nach konstant bleibt und der Richtung nach in der Ebene ΔOD mit konstanter Geschwindigkeit umläuft.

In diesem Schlusse liegt aber, wenn wir zunächst jenes fingierte Gesetz über Richtung und Gröſse der Zusatzdrehung einmal acceptieren, ein prinzipieller Fehler. Es wird nämlich dabei auf die Möglichkeit der „Eigenbewegung“ des Drehungsvektors keine Rücksicht genommen. Auch wenn die äuſsere Drehkraft, welche bei Airy die Rotation um $O\Delta$ hervorbringt, nicht wirken würde, wird die Drehungsaxe OD

---

*) Annales de la société scientifique de Bruxelles, 1878. Auf einen ähnlichen Fehler macht gelegentlich Herr Franke aufmerksam: Ztschr. f. d. mathem. u. naturw. Unterricht, Bd. 17, 1886.

**) Airy, Mathematical Tracts, Cambridge 1831. Vgl. das Kapitel: Precession of the equinoxes Nr. 1—15.

Hosted by Google

im allgemeinen im Körper und im Raume wechseln. In der That beschreibt ja der kräftefreie Kreisel im allgemeinen eine reguläre Präcession, bei welcher der Rotationsvektor auf einem Kreiskegel um die Impulsaxe herumgeführt wird. Airy dagegen nimmt stillschweigend an, daſs, wenn die äuſsere Kraft plötzlich zu wirken aufhören würde, die Drehungsaxe in der augenblicklichen Lage verbleiben würde.

Die genannte Voraussetzung ist nur in dem besonderen Falle des Kugelkreisels erfüllt, wo, wie wir betonten, jede Axe als permanente Drehungsaxe angesprochen werden kann. Infolgedessen müssen wir sagen: *Die Airyschen Sätze gelten nicht für den allgemeinen Fall eines rotierenden Körpers, sondern im Gegenteil nur für den speziellsten Fall, den Fall des Kugelkreisels.*

Überhaupt möchten wir bei dieser Gelegenheit vor einer Überschätzung der kinetischen Bedeutung des Drehungsvektors warnen. *Der Drehungsvektor lehrt im Grunde nur den augenblicklichen kinematischen Bewegungszustand kennen. In kinetischer Hinsicht kommt es nicht auf den Drehungs-, sondern auf den Impulsvektor an.* Dieser setzt sich mit dem Drehmomente der äuſseren Kräfte in einfachster Weise (nach dem Parallelogrammgesetze) zusammen und bestimmt so zusammen mit der Massenverteilung des Körpers den Verlauf der Bewegung. Der Drehungsvektor folgt darauf der Lage des Impulsvektors und bewegt sich gerade so, wie es ihm durch die Lage des Impulsvektors und die Massenverteilung des Körpers vorgeschrieben wird. Das Parallelogramm der Drehungsvektoren ist zwar kinematisch richtig, aber kinetisch nichtssagend, weil der Drehungsvektor auch ohne Hinzufügung einer „äuſseren“, d. h. einer durch äuſsere Kräfte hervorgerufenen Drehung, im Körper und im Raume fortwandern kann.

(Ein einfaches Beispiel, auf welches Herr Koppe (vgl. unten) aufmerksam gemacht hat, möge zeigen, wie man in kinetischen Fragen durch das Parallelogramm der Drehungen zu falschen Resultaten geführt werden kann.

Wir fragen nach dem Drehmoment, welches bei einem (symmetrischen) Kreisel zum Verdrehen seiner Figurenaxe erforderlich ist. Genauer wollen wir die Frage folgendermaſsen formulieren: Der Kreisel rotiere anfangs um seine Figurenaxe OF und sei dem Einfluſs äuſserer Kräfte entzogen. Seine Rotationsgeschwindigkeit sei r, sein Impuls $Cr = N$. Darauf drehen wir die Figurenaxe zwangsmäſsig um den kleinen Winkel $d\vartheta$, so zwar, daſs, wenn wir die Axe loslassen, der Kreisel mit der ursprünglichen Geschwindigkeit r um die abgeänderte und von jetzt ab im Raume stillestehende Axe OF_1 permanent rotiere (vgl. Fig. 51). Gesucht wird das hierzu erforderliche Drehmoment.

Hosted by Google

Zur Herbeiführung des genannten Sachverhaltes ist nach der Impulstheorie zweierlei nötig: (1) Man mufs der Figurenaxe eine Drehgeschwindigkeit um die auf OF und OF_1 senkrechte Axe OH erteilen und mufs diese Geschwindigkeit aufheben, wenn die Lage OF_1 erreicht ist. Die zugehörigen Impulse, welche gleichfalls um die gemeinsame Senkrechte von OF und OF_1 erfolgen, heben sich gegenseitig auf ($OH = - OH_1$). (2) Man mufs aufserdem für die Umlagerung des Impulsvektors aus der Lage OF in die Lage OF_1 sorgen. Thäte man dieses nämlich nicht, so würde die Figurenaxe, nachdem sie die Lage OF_1 erreicht hat, um die unveränderte Lage OF des Impulsvektors eine reguläre Präcession beginnen, anstatt, wie wir verlangten, im Raume stille zu stehen. Der zur Umlagerung erforderliche Zusatzimpuls ist $di = N d\vartheta$; seine Axe OG liegt in der Ebene OFF_1 senkrecht zu den unendlich wenig verschiedenen Axen OF und OF_1. Die Änderungsgeschwindigkeit des Impulses $\frac{di}{dt}$ giebt nach Axe und Gröfse das Drehmoment an, welches wir bei Verdrehung der Figurenaxe aufwenden müssen. Die richtige Antwort auf unsere Frage, wie sie sich aus dem Parallelogramm der Impulsvektoren ergiebt, lautet also:

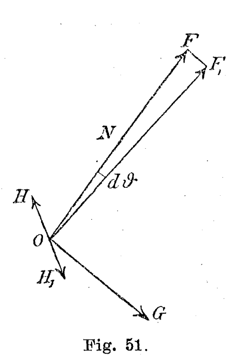


Fig. 51.

$$N\vartheta' = Cr\vartheta'.$$

Dieselbe Frage möge nun nach dem Parallelogramm der Rotationsvektoren beantwortet werden. Zur Umlagerung und nachherigen Fixierung der Figurenaxe ist wieder im Ganzen kein Drehmoment erforderlich. Zur Umlagerung der Drehungsaxe mufs man nach dem Parallelogramm der Rotationen die Drehung $r\vartheta'$ um die Axe OG hinzufügen. Das dieser Drehung entsprechende Drehmoment findet man in bekannter Weise durch Multiplikation der genannten Winkelgeschwindigkeit mit dem zu OG gehörigen Trägheitsmomente A. Das Drehmoment, nach welchem gefragt ist, wäre hiernach

$$Ar\vartheta'.$$

Der falsche und der richtige Wert stimmen, wie man sieht, nur im Falle des Kugelkreisels überein. In jedem anderen Falle kann die Anwendung des Parallelogramms der Rotationen in der Kinetik irreführend werden.)

Dementsprechend ist die Airysche Betrachtung für den Fall des allgemeinen oder des symmetrischen Kreisels dahin zu ergänzen, dafs man überall statt Rotationsvektor Impulsvektor sagt. So macht es

Poinsot in seiner *Théorie des équinoxes.**) Er betrachtet übrigens einen etwas allgemeineren Fall wie Airy, indem er den Zusatzimpuls senkrecht zu dem vorhandenen Impulse und überdies in einer festen Ebene annimmt, welche nicht durch den vorhandenen Impuls hindurchzugehen braucht (während Airy, wie erwähnt, eine Zusatzdrehung in einer durch die jeweilige Drehungsaxe hindurchgehenden Ebene voraussetzt). Führt man in diesem Falle die successiven Parallelogrammkonstruktionen mit dem Impulsvektor aus, so sieht man, daſs dieser einen Kreiskegel um die Normale der festen Ebene beschreibt, also im Speziellen einen vertikal gestellten Kreiskegel, wenn man die feste Ebene als Horizontalebene denkt. Natürlich deckt sich auch das Poinsotsche Problem wegen der angegebenen Voraussetzung über die Richtung des Zusatzimpulses mit dem Problem des schweren Kreisels nicht vollständig, wie Poinsot selbst ausdrücklich hervorhebt. Dementsprechend ist auch das angegebene Resultat, daſs der Impulskegel ein Kreiskegel wird, für den schweren Kreisel nur angenähert richtig.

Unsere eigene populäre Erklärung der pseudoregulären Präcession im Anfange des vorigen Kapitels stellt geradezu eine Weiterführung der Poinsotschen Darstellung vor. Wir haben dort auf Grund der Poinsotschen Impulsprinzipien die successiven Lagen der Figurenaxe im Raum ermittelt und haben auch den Sinn der Abweichungen festgestellt, welche die wirkliche Bewegung gegenüber unseren immerhin nur angenäherten Konstruktionen aufweisen wird.

Nach einer anderen Richtung wie Poinsot (nämlich durch Berücksichtigung der Nutationen) vervollständigt Herr A. Schmidt die Airysche Erklärung in seiner anregenden Arbeit**) „Die elementare Behandlung des Kreiselproblems“. Indessen müſste man auch hier die Beschränkung auf den Kugelkreisel hinzufügen, weil der Verfasser durchweg mit dem Parallelogramm der Rotationen operiert, statt, wie es für kinetische Fragen im allgemeinen unerläſslich ist, mit dem Parallelogramm der Impulsvektoren.

Wie hervorgehoben, werden weder die Airyschen noch die Poinsotschen Voraussetzungen bei der allgemeinen Bewegung des schweren Kreisels realisiert. Der Zusatzimpuls bez. die Zusatzdrehung steht hier weder senkrecht auf der Drehungsaxe noch auf dem Impulsvektor, sondern auf der Figurenaxe. Nur bei der genauen regulären Präcession sind wegen der besonderen gegenseitigen Lage von Vertikalen, Rotations- Figuren- und Impulsaxe die Voraussetzungen der Airyschen bez. der Poinsotschen Betrachtungen genau erfüllt.

*) Connaissance des temps, Paris 1857, Einleitung, Nr. 1—10.

**) Mathem.-naturw.-Mitteilungen von Böklen, 1886, Heft III.

Hosted by Google

Die Nutzanwendung der Airyschen Betrachtung auf den Fall des schweren Kreisels wird in der theoretischen Physik von Hrn. v. Lang*) versucht. Um ein den Airyschen Voraussetzungen analoges Problem zu haben, nimmt v. Lang als Anfangszustand eine einfache Rotation um die Figurenaxe an, so dafs anfangs die der Schwere entsprechende Zusatzdrehung auf der Drehungsaxe senkrecht steht. Dieser Sachverhalt mufs sich aber eben wegen der Schwerewirkung sofort ändern. Wenn trotzdem vorausgesetzt wird, dafs die hinzukommende Drehung (besser der Drehungsimpuls) auf der instantanen Drehungsaxe (besser Impulsaxe) dauernd senkrecht steht, so scheint eine abermalige Zweideutigkeit in der Verwendung des Wortes „Axe“ vorzuliegen. Dementsprechend ist auch das Resultat, zu welchem v. Lang kommt, nicht richtig. Nach seiner Ableitung müfste die Drehungsaxe *genau* einen Kreiskegel um die Vertikale beschreiben, was, wie wir wissen, bei dem vorausgesetzten Anfangszustande *nur angenähert* und *auch dies nur bei sehr grofsen Rotationsgeschwindigkeiten* richtig ist. Überdies müfste man, wenn man die v. Langsche Benutzung des Drehungsvektors aufrecht halten will, die ausdrückliche Beschränkung auf den Kugelkreisel hinzufügen.

Eine korrekte Darstellung giebt im Anschlusse an Poinsot De Jonquières**), welcher das Auftreten der Spitzenkurve ableitet.

4. Auf wesentlich anderen Prinzipien wie die zuletzt genannte oder wie unsere eigene elementare Betrachtung am Anfange des vorigen Paragraphen beruht die bekannte *Poggendorffsche Erklärung.****) Während wir den Kreisel als ein einheitliches mechanisches System behandelten, geht Poggendorff auf die Bewegung der einzelnen Massenpunkte zurück. Bei der Kürze und dem ganz elementaren Charakter der Darlegungen ist die Poggendorffsche Erklärung keine vollständige und giebt leicht zu Irrtümern Anlafs. Wir reproduzieren dieselbe in etwas freier Weise, ohne mit Sicherheit behaupten zu können, dafs wir im Folgenden die Meinung des Verfassers, die aus seinen Worten nicht ganz eindeutig festzustellen ist, genau wiedergeben.

Wir betrachten mit Poggendorff ein Schwungrad von horizontal gestellter Figurenaxe, welches um einen Punkt O der Axe frei drehbar ist und welchem eine bestimmte Rotationsgeschwindigkeit um die Axe erteilt worden ist. Wir denken uns das freie Ende der Axe in der Vertikalebene ein Stückchen nach unten bewegt, was dem Anscheine

*) § 55.

**) Théorie élémentaire du mouvement de la toupie, Revue maritime et coloniale, 1886.

***) „Noch ein Wort über die Fesselsche Rotationsmaschine.“ Poggendorffs Annalen, Bd. 90, pag. 348.


Hosted by Google

nach der Einwirkung der Schwere auf das Schwungrad entspricht. Diese Bewegung bezeichnen wir kurz als Bewegung I. Offenbar werden durch diese Bewegung die Geschwindigkeitsvektoren der einzelnen Massenpunkte teils parallel mit sich verschoben, teils aus ihrer Richtung abgelenkt. Letzteres erfordert für jeden Punkt eine Kraft, deren Gröfse und Richtung gleich ist der Änderungsgeschwindigkeit des Impulses in dem betreffenden Massenpunkte. Setzt man alle diese Kräfte zu einer Drehkraft zusammen, so findet man leicht eine Drehkraft von vertikaler Axe. Letztere müfsten wir ausüben, wenn wir die Bewegung I erzwingen wollen. Üben wir sie nicht aus, denken uns aber trotzdem dem Schwungrade die Bewegung I erteilt, so bleibt eine der genannten entgegengesetzt gleiche Drehkraft übrig, welche, wenn sie allein wirksam wäre, eine Bewegung der Figurenaxe in horizontaler Richtung bewirken würde. Letztere werde als Bewegung II bezeichnet. Die Bewegung II würde nun ihrerseits eine Richtungsänderung in den Einzelimpulsen der Massenpunkte bewirken. Die hierzu erforderlichen Kräfte setzen sich zu einer Drehkraft von horizontaler Axe zusammen. Diese müfste wiederum von aufsen hinzugefügt werden, wenn die Bewegung II für sich möglich sein soll. Im anderen Falle bleibt eine entgegengesetzt gleiche Drehkraft von horizontaler Axe übrig, welche eine Bewegung III bewirkt, der zufolge die Figurenaxe vertikal nach oben, also der Bewegung I entgegen gedreht wird. Das Auftreten der Bewegung III erklärt nun, warum die durch die Schwerkraft gegebene Bewegungstendenz I auf die Dauer nicht anhält, sondern durch die allmählich wachsende Bewegungstendenz III überwunden werden kann. Das Auftreten von II zeigt gleichzeitig, dafs die Punkte der Figurenaxe unterdessen eine horizontale Geschwindigkeitskomponente erhalten können. Die wirkliche Bewegung, müssen wir uns vorstellen, besteht in einer Kombination der Bewegungen I, II und III (und zwar, wie wir nach Früherem hinzufügen können, in einer derartigen Kombination, dafs sich die zur Hervorbringung dieser Bewegungen erforderlichen Drehkräfte jederzeit zu einer dem Schweremoment genau gleichen Drehkraft zusammensetzen).

Wie man sieht, wird durch die vorstehende ziemlich rohe Betrachtung nur ein sehr ungefähres Bild der resultierenden Bewegung gewonnen. In welcher Stärke die unterschiedenen Bestandteile I, II, III der Bewegung jeweils auftreten, bleibt völlig unentschieden. Über die Gestalt der Bahnkurve, welche die Kreiselspitze auf der Kugeloberfläche beschreibt, kann daher lediglich auf Grund der obigen Überlegung nichts Näheres angegeben werden.

Die Poggendorffsche Ausdrucksweise ist, wie gesagt, von der vorstehenden etwas verschieden. Sie legt den Irrtum nahe, als ob die

Hosted by Google

Bewegungen I und III sich gegenseitig kompensieren könnten, so daſs eine rein horizontale Bewegung der Kreiselspitze übrig bleiben würde. Dies ist natürlich gänzlich unmöglich, sofern das Schwungrad in der Anfangslage keine horizontale Fortschreitungskomponente besitzt.

In den Lehrbüchern*), welche die Poggendorffsche Erklärung wiedergeben, wird besagter Irrtum vielfach explicite begangen.

Die Poggendorffsche Erklärung ist von Hrn. M. Koppe**) vervollständigt und bis zur quantitativen Bestimmung der Bewegung durchgeführt. Koppe führt den durch Poggendorff ersichtlich umschriebenen Begriff der Coriolisschen Kraft beim einzelnen Massenpunkte (vgl. Kap. III, § 7) ein und beschreibt die Bahnkurve der Kreiselspitze in durchaus korrekter Weise als Cykloide. Wir heben insbesondere die wertvollen kritischen Bemerkungen zu Beginn seiner Arbeit hervor, welche uns bei der Abfassung des Vorstehenden vielfach nützlich waren, ohne übrigens die von Hrn. Koppe gegen die analytische Behandlung im allgemeinen erhobenen Ausstellungen unterschreiben zu wollen. Letztere dürften durch die Bemerkungen am Schlusse des vorigen Paragraphen präcisiert sein.

Gleichfalls mit der Coriolisschen Kraft operiert die oben***) citierte, im Wesentlichen richtige Arbeit von Jouffret.

An Poggendorff knüpft auch F. Heinen in der Beschreibung seines Rotationsapparates an.†) Die Heinensche Darstellung ist aber viel umständlicher wie die Poggendorffsche und giebt auch nicht mehr als eine allgemeine qualitative Vorstellung der zu erwartenden Bewegung.

Alles in allem möchten wir das Zurückgehen auf die Punktmechanik, welches der zuletzt betrachteten Gruppe von Erklärungen gemeinsam ist, aus den pag. 300 genannten Gründen nicht empfehlen. (Man vergleiche in dieser Hinsicht etwa die allerdings richtige aber äuſserst umständliche Ableitung des oben (pag. 311) besprochenen Drehmomentes $Cr\vartheta'$, wie sie in einer Note von Hrn. Koppe††) gegeben wird, mit unserer obigen Bestimmung desselben, welche jedenfalls an Einfachheit nichts zu wünschen übrig läſst.)

5. Als besonders verfehlt müssen solche Erklärungen†††) gelten, welche das im Experiment zu beobachtende Aufrichten der Kreiselaxe

---

*) Z. B. Müller-Pouillet, Bd. I, § 74.

**) Über die Bewegung des Kreisels. Ztschr. f. d. phys. u. chem. Unterricht, 4. Jahrg., 1890.

***) pag. 190.

†) Braunschweig 1857.

††) Zur Kreiselbewegung, Ztschr. f. d. phys. u. chem. Unterricht, 9. Jahrg., 1896.

†††) Vgl. z. B. Munter, Ztschr. f. d. mathem. u. phys. Unterricht, Bd. 26, pag. 565.

Hosted by Google

aus den Prinzipien der abstrakten Dynamik herleiten wollen. Wir wissen, daſs der bisher betrachtete ideale, reibungslose Kreisel sich keineswegs aufrichtet, sondern dauernd dieselbe mittlere Neigung gegen die Vertikale behauptet. Das Aufrichten der Kreiselaxe erfolgt, wenn überhaupt, nur durch die Reibung im Unterstützungspunkte, worüber wir uns später verbreiten werden.

§ 4. Über die Stabilität des aufrechten Kreisels. Geometrische Diskussion.

Ein besonderer Fall der regulären Präcession ist derjenige, wo sich die Bahnkurve auf einen Punkt, den höchsten oder tiefsten Punkt der Einheitskugel zusammenzieht. Der Kreisel rotiert dann mit gleichförmiger Geschwindigkeit um die vertikal gestellte Figurenaxe. Wir wollen diese interessante Bewegung ausführlich behandeln, um daran unsere Begriffe über die Stabilität der Bewegungen zu bilden und so die allgemeineren Untersuchungen des sechsten Paragraphen vorbereiten.

Die Figurenaxe kann bei dieser Bewegung sowohl vertikal nach oben wie vertikal nach unten gerichtet sein. Wir werden uns auf die erstere Annahme beschränken, was ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit geschehen kann, wenn wir nur nötigenfalls den als Figurenaxe bezeichneten Halbstrahl mit dem entgegengesetzten vertauschen.

Wir werden also $\vartheta = 0$ rechnen und haben dabei zwei Unterfälle zu unterscheiden, je nachdem $P < 0$ oder $P > 0$ ist. Auch hier sprechen wir vom Kugelkreisel mit dem Trägheitsmomente A.

Die zu besprechende Bewegung bezeichnen wir kurz als *die Bewegung des aufrechten Kreisels.*

Zunächst bemerken wir, daſs unsere Koordinaten φ, ψ, ϑ zur Behandlung des vorliegenden Falles ungeeignet sind. Offenbar wird nämlich bei aufrechter Figurenaxe die Knotenlinie in der Äquatorebene unbestimmt. Mithin haben auch die Winkel φ und ψ (die Winkel der X- bez. der x-Axe gegen die Knotenlinie) keine selbständige Bedeutung. Wohl aber kommt eine solche dem Winkel $\varphi + \psi = \chi$ zu, welcher direkt den Winkel zwischen X- und x-Axe darstellt, also die Drehung des Kreisels gegen den Raum miſst. Mit Benutzung dieser Koordinate ist unsere Bewegung einfach durch die folgenden beiden Gleichungen charakterisiert

$$(1) \qquad \vartheta = 0, \quad \chi' = \text{const.}$$

Wir überzeugen uns nun leicht, *daſs die Bewegung des aufrechten Kreisels bei beliebigen Werten der Rotationsgeschwindigkeit χ' eine mögliche, mit den fundamentalen Impulsgesetzen verträgliche Bewegung ist.* Bei

Hosted by Google

der durch (1) dargestellten Bewegung fällt nämlich der Impuls dauernd mit der Vertikalen zusammen und hat eine konstante Länge. Die Änderung des Impulsvektors ist also jederzeit gleich Null. Aufserdem ist bei vertikaler Stellung der Figurenaxe die Schwerewirkung $P \sin \vartheta$ fortgesetzt gleich Null. Es besteht mithin die durch unsern Impulssatz geforderte Gleichheit zwischen den Änderungen des Impulses und den Zusatzimpulsen der äufseren Kraft. Durch die Gleichungen (1) wird also in der That eine mögliche Bewegung des schweren Kreisels dargestellt, welchen Wert auch immer die Rotationsgeschwindigkeit χ' haben möge.

Offenbar gilt für die aufrechte Bewegung die Beziehung

$$n = N. \tag{2}$$

Da nämlich Impuls, Figurenaxe und Vertikale beständig zusammenfallen, so ist die Vertikalprojektion des Impulses mit der Projektion auf die Figurenaxe sowie direkt mit der Länge des Impulsvektors identisch.

Die Bedingung (2) ist übrigens nicht nur für die gleichmäfsige Rotation des aufrechten Kreisels charakteristisch, sondern überhaupt für jede Bahnkurve, welche durch den höchsten Punkt der Kugel hindurchzieht. In der That wird allemal beim Passieren des Nordpols die Projektion des Impulses auf die Figurenaxe identisch mit der Projektion auf die Vertikale, weil ja beide Richtungen in einem solchen Momente zusammenfallen. Da überdies die Impulskomponenten n und N, wie wir wissen, konstant sind, so besteht die angegebene Relation für solche Bewegungen allgemein.

Wir gehen nun zu den Stabilitätsfragen über und erteilen zu dem Zwecke dem Kreisel während seiner Rotation um die Vertikale einen Anstofs. Diesen charakterisieren wir durch den zugehörigen Drehstofs hinsichtlich des Unterstützungspunktes und repräsentieren ihn durch einen Vektor. Dabei wird vorausgesetzt, dafs die Länge des so erhaltenen Vektors eine beliebig vorgegebene Gröfse nicht übersteigt. Über die Richtung des Drehstofsvektors dürfen wir der Allgemeinheit wegen zunächst nichts voraussetzen. Indessen zeigt es sich, dafs wir diese Richtung als horizontal annehmen dürfen. Wenn nämlich ein schiefgerichteter Drehstofsvektor vorliegt, so zerlegen wir diesen in eine vertikale und eine horizontale Komponente. Die vertikale Komponente bewirkt lediglich eine Änderung der Rotationsgeschwindigkeit des Kreisels und läfst den Charakter der Bewegung ungeändert. Wir können daher von der vertikalen Komponente absehen und einen Drehstofs von horizontaler Axe voraussetzen.

Hosted by Google

Der ursprünglich vorhandene Impuls setzt sich natürlich mit diesem Drehstofs nach dem Parallelogrammsatze zusammen. Wir bezeichnen den Zusatzimpuls mit $[\Theta_0]$, da er uns die gleichzeitig zur Figurenaxe und zur Vertikalen senkrechte Komponente des Gesamtimpulses zur Zeit $t = 0$ angiebt. Die Beziehung zwischen unserer Impulskomponente $[\Theta_0]$ und der durch sie hervorgerufenen Rotationskomponente wird dabei nach dem allgemeinen Zusammenhange zwischen Impuls- und Drehungsvektor:

$$(3) \qquad [\Theta_0] = A\vartheta_0',$$

wo ϑ_0' den Anfangswert der Winkelgeschwindigkeit ϑ' bedeutet. Die Länge $|i|$ des Gesamtimpulses, welche bei der ungestörten Bewegung konstant und gleich N war, wird jetzt variabel. Speziell ergiebt sich für den Anfangswert $|i_0|$ nach dem Pythagoras die Gleichung:

$$|i_0|^2 = N^2 + [\Theta_0]^2.$$

Schliefslich berechnen wir noch die Impulskonstante k mittels der Gleichung (3) von pag. 219. Da für $t = 0$ auch $\vartheta = 0$ ist, so ergiebt sich

$$(4) \qquad k = |i_0|^2 + 2AP = N^2 + [\Theta_0]^2 + 2AP.$$

Um den Charakter der durch unseren Anstofs ausgelösten Bewegung zu überblicken, fragen wir vor allem, wie tief die Kreiselspitze auf der Einheitskugel heruntersinkt. Wir sehen deshalb zu, in welcher Weise die Wurzel e' der Gleichung $U = 0$ von $[\Theta_0]$ abhängt. Dabei müssen wir auf die ursprüngliche Form dieser Gleichung auf pag. 238 zurückgehen, weil die hieraus abgeleitete Gleichung $U_1 = 0$ wegen des vorgezogenen Faktors $1:(1-e^2)$, welcher in unserem Falle $(e = 1)$ unendlich grofs wird, für das Folgende unbrauchbar ist. Wir haben nach der angezogenen Stelle mit Rücksicht auf die Beziehung $n = N$:

$$(5) \qquad A^2 U = - N^2(1-u)^2 + (k - N^2 - 2APu)(1-u^2),$$

oder, wenn wir k der Gleichung (4) entsprechend ausdrücken:

$$(5') \qquad A^2 U = - N^2(1-u)^2 + \big([\Theta_0]^2 + 2AP(1-u)\big)(1-u^2).$$

Auf der rechten Seite steht, wie es sein mufs, der Faktor $1-u$, welcher der bekannten Wurzel $e = 1$ entspricht. Wir sondern diesen ab und bekommen für die beiden übrigen Wurzeln die quadratische Gleichung:

$$- N^2(1-u) + \big([\Theta_0]^2 + 2AP(1-u)\big)(1+u) = 0.$$

Hier mögen wir $[\Theta_0] = v$ setzen und die so entstehende Gleichung

$$(6) \qquad v^2(1+u) - (1-u)\big(N^2 - 2AP(1+u)\big) = 0$$

in einer u, v-Ebene geometrisch deuten.

Hosted by Google

Die entstehende Kurve wird wieder von der dritten Ordnung. Sie liegt symmetrisch gegen die Abscissenaxe (u-Axe) und besteht aus einem paaren und einem unpaaren Zuge. Die Gestalt der Kurve untersuchen wir auf Grund ihrer vertikalen Tangenten, welche hier besonders leicht zu bestimmen sind.

Die Gleichungen der vertikalen Tangenten, sowie die Lage ihrer Berührungspunkte stellen wir wie folgt zusammen:

Gleichung:	$u = +1$	Berührungspunkt:	$v = 0$
„	$u = -1$	„	$v = \infty$
„	$u = -1 + \frac{N^2}{2AP}$	„	$v = 0.$

Die an zweiter Stelle genannte Tangente ist hiernach Asymptote. Für uns kommt es wesentlich darauf an, wie die dritte Tangente gegen die übrigen liegt. Wir unterscheiden in der Hinsicht vor allem zwei Fälle, je nachdem $P < 0$ oder $P > 0$.

Erster Fall: $P < 0$.

Die dritte Tangente liegt links von der Asymptote. Reelle Werte von v ergeben sich für die Gebiete

$$-1 < u < +1 \quad \text{und} \quad -\infty < u < -1 + \frac{N^2}{2AP}.$$

Der unpaare Zug verläuft in dem Streifen zwischen $u = -1$ und $u = +1$, der paare Zug erstreckt sich von der Tangente $u = -1 + \frac{N^2}{2AP}$ nach links ins Unendliche (vgl. Fig. 52). Wir ziehen in beliebiger Nähe der Abscissenaxe die Parallele $v = [\Theta_0]$ und bringen sie zum Schnitt mit dem unpaaren Zuge. Die Abscisse dieses Schnittpunktes liefert uns den Parallelkreis $u = e'$. Wie man sieht, kommt die Gröfse e' der Einheit um so näher, je kleiner wir $[\Theta_0]$ nehmen. (Dabei wird, wie wir des Folgenden wegen bemerken, die Differenz $1 - e'$ von der Ordnung $[\Theta_0]^2$, sie stellt also „eine unendlich kleine Gröfse zweiter Ordnung“ dar, wenn wir den Anstofs $[\Theta_0]$ „unendlich klein von der ersten Ordnung“ werden lassen.) Infolgedessen können wir durch Wahl von $[\Theta_0]$ erreichen, dafs die Bahnkurve des ursprünglich aufrechten Kreisels nach Hinzufügung

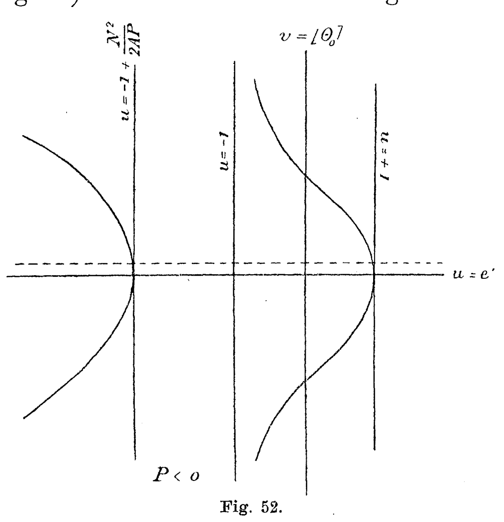


Fig. 52.

unseres Anstoßes in einer beliebig engen Nachbarschaft zur ursprünglichen Bahnkurve, dem Nordpole, verläuft. *Hinsichtlich der Bahnkurve findet also im Falle $P < 0$ sicher ein stetiger Übergang von der ursprünglichen zu der abgeänderten Bewegung statt.*

Die Bahnkurve der Kreiselspitze bringt indessen, wie wir wissen, die Bewegung nicht vollständig zum Ausdruck, indem sie über die Rotation des Kreisels um die Figurenaxe keinen Aufschluß giebt.

Bei der ungestörten Bewegung wird diese gemessen durch den Winkel χ; da sich die Winkelgeschwindigkeit χ' durch den Impuls N bei der aufrechten Bewegung folgendermaßen ausdrückt:

$$\chi' = \frac{N}{A},$$

so haben wir einfach (bei spezieller Wahl der Anfangszeit)

$$\chi = \frac{N}{A} t.$$

Nach Hinzufügung des Anstoßes $[\Theta_0]$ wollen wir, um vergleichbare Größen zu haben, die Rotation um die Figurenaxe durch den entsprechenden Winkel χ messen. Wir haben dann mit Rücksicht auf (2):

$$\chi' = \varphi' + \psi' = \frac{n - Nu}{A(1-u^2)} + \frac{N - nu}{A(1-u^2)} = \frac{2N}{A(1+u)}.$$

Da nun u in beliebiger Nähe von 1 bleibt, entwickeln wir nach Potenzen von $u - 1$ und vernachlässigen alle höheren Potenzen. So ergiebt sich

$$\chi' = \frac{N}{A} - \frac{N}{A}\frac{u-1}{2}.$$

Hier ist der zweite Term der rechten Seite, wie aus einer obigen Bemerkung hervorgeht, im Verhältnis zu dem Anstoße $[\Theta_0]$ von der zweiten Ordnung unendlich klein. Solche Größen pflegt man aber bei der in der Litteratur üblichen Handhabung der Stabilitätsbetrachtungen nicht mitzunehmen. Auch bei den Nachbarbewegungen der regulären Präcession im ersten Paragraphen dieses Kapitels haben wir, indem wir den Rest R in dem Ausdrucke von ψ vernachlässigten, die Glieder zweiter Ordnung (mit dem Faktor ε^2) unterdrückt. Beschränken wir uns also auch jetzt auf die Glieder erster Ordnung, so werden wir, indem wir die Integration nach t ausführen, wieder auf die ursprüngliche Formel zurückgeführt:

$$\chi = \frac{N}{A} t.$$

(Man bemerke übrigens, daß die jedenfalls nicht unbedenkliche Vernachlässigung der Glieder zweiter Ordnung nur eine vorläufige ist und daß sie für die in § 6 zu entwickelnde definitive Auffassung der Stabilitätskriterien gar nicht in Frage kommt.)

Hosted by Google

Unsere Betrachtung zeigt, dafs der Winkel χ der abgeänderten Bewegung dem Winkel χ der ursprünglichen bis auf Glieder zweiter Ordnung dauernd benachbart bleibt. Diese Aussage bezieht sich jedoch nur auf den Fall, wo der hinzugefügte Drehstofs eine rein horizontale Axe hat. Bei allgemeinerem Anstofs, durch welchen nicht nur ein gewisser Wert von $[\Theta_0]$ hinzugefügt, sondern auch die ursprüngliche Impulskomponente N abgeändert wird, liegt die Sache natürlich anders.

Betrachten wir z. B. den einfachsten Fall, wo $[\Theta_0] = 0$ genommen und N um die kleine Gröfse N' vermehrt wird. Die Bewegung bleibt dann nach wie vor die des aufrechten Kreisels. Der Winkel χ bei der abgeänderten Bewegung bestimmt sich durch die Gleichung

$$\chi = \frac{N + N'}{A} t.$$

Wie man sieht, weicht derselbe von dem Winkel χ der ungestörten Bewegung um ein Glied ab, welches der ersten Potenz des Anstofses N' proportional ist. Nichtsdestoweniger können wir zwischen die ursprüngliche und die abgeänderte Bewegung durch Verkleinerung von N' solche Bewegungen einschalten, welche einen stetigen Übergang von dem χ der einen zu dem der anderen Bewegung vermitteln.

Nach alledem werden wir zweifellos und zwar unabhängig davon, ob wir die soeben gemachte Vernachlässigung der Glieder zweiter Ordnung zulassen wollen oder nicht, sagen können:

Die Bewegung des aufrechten Kreisels im Falle $P < 0$ ist sicher eine stabile Bewegung.

Dieses Resultat stimmt natürlich vollkommen mit der bekannten Thatsache überein, dafs die Gleichgewichtslage des nicht aufgezogenen Kreisels ($N = 0$) eine stabile ist, wenn der Schwerpunkt unter dem Unterstützungspunkte liegt ($P < 0$).

Zweiter Fall: $P > 0$.

Sehr viel interessanter ist der zweite Fall $P > 0$. Die dritte der pag. 319 genannten vertikalen Tangenten liegt alsdann rechts von der Asymptote $u = -1$. Je nachdem sich dieselbe auch rechts von der Tangente $u = +1$ oder links von derselben befindet, ergeben sich zwei Unterfälle a) und b).

Der erste Unterfall tritt ein, wenn

(a) $$+1 < -1 + \frac{N^2}{2AP}, \quad \text{d. h.} \quad N^2 > 4AP,$$

der zweite, wenn

(b) $$+1 > -1 + \frac{N^2}{2AP}, \quad \text{d. h.} \quad N^2 < 4AP.$$

Wir vergleichen hiermit unsere frühere Unterscheidung zwischen



dem starken und dem schwachen Kreisel. Da wir $P > 0$ vorausgesetzt haben, müssen wir das Kriterium (3′) von pag. 249 heranziehen.

Tragen wir hier, der aufrechten Anfangslage der Figurenaxe entsprechend, für e den Wert $+1$ ein, so gehen die Ungleichungen jenes Kriteriums gerade in die Ungleichungen (a) und (b) über. *Der Unterfall* (a) *entspricht also einem starken, der Unterfall* (b) *einem schwachen Kreisel.* (Nebenbei bemerkt, ist der Fall eines negativen P stets den *starken* Kreiseln zuzurechnen, weil hier die Ungleichung (a) selbstverständlicher Weise befriedigt wird.)

Wir setzen zunächst wieder unsere Kurven dritter Ordnung für unsere beiden Fälle $P > 0$ her, wie sie der Gleichung (5) entsprechen. Bei dem starken Kreisel, Fall (a), zieht sich der unpaare Zug durch den Streifen -1 bis $+1$ hindurch, indem er $u = -1$ im Unendlichen und $u = +1$ auf der Abscissenaxe berührt. Bei dem schwachen Kreisel dagegen ist der unpaare Zug in den Streifen -1 bis $-1 + \frac{N^2}{2AP}$ eingeschlossen. Der paare Zug liegt beidemal rechts von dem unpaaren und berührt entweder die Tangente $-1 + \frac{N^2}{2AP}$ oder die Tangente $+1$ in ihrem Schnittpunkte mit der Abscissenaxe.

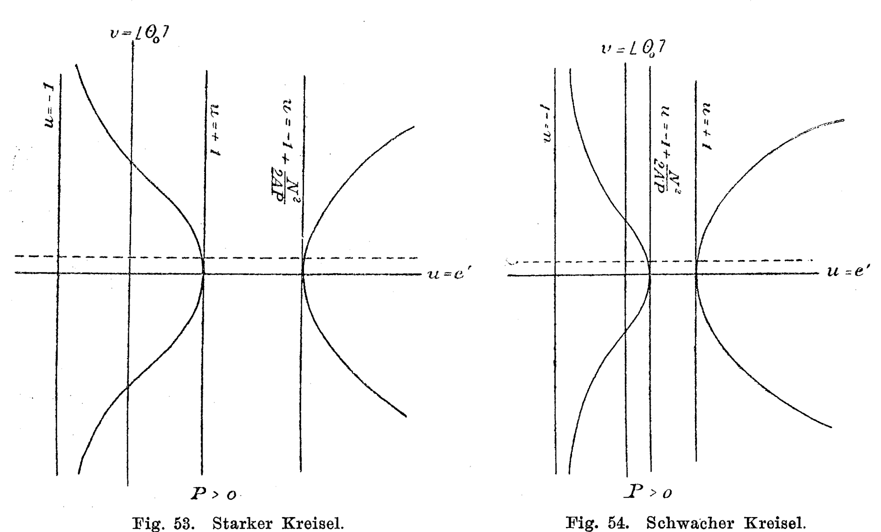


Fig. 53. Starker Kreisel. Fig. 54. Schwacher Kreisel.

Es kommt nun darauf an, aus der Gestalt dieser Kurven den Charakter der Bahn bei einer Störung $[\Theta_0]$ zu erschliefsen.*) Wir ziehen zu dem Zweck wieder die Parallele $v = [\Theta_0]$ zu der Abscissenaxe, deren Schnittpunkt mit dem unpaaren Zuge durch seine Abscisse die Gröfse

*) Vgl. hierzu: F. Klein, On the stability of the sleeping top. American Bulletin, 1896.

Hosted by Google

des zweiten Parallelkreises bestimmt. Hierbei ergiebt sich nun ein sehr interessanter Gegensatz zwischen dem starken und schwachen Kreisel.

In Fig. 53 liegt nämlich der genannte Schnittpunkt in unmittelbarer Nähe des Punktes $u = 1$, $v = 0$.

Bei dem starken Kreisel fällt also der Parallelkreis e' *um so kleiner aus, je kleiner wir den Anstoſs* $[\Theta_0]$ *wählen, und geht bei verschwindendem* $[\Theta_0]$ *in den Nordpol* $e = 1$ *stetig über. Die Bahnkurve der Kreiselspitze verharrt in unmittelbarer Nähe der ursprünglichen punktförmigen Bahnkurve; ihre Dimensionen können durch Verkleinerung des Anstoſses beliebig verkleinert werden.*

In Fig. 54 dagegen unterscheidet sich die Abscisse des soeben konstruierten Schnittpunktes von der Einheit stets um eine endliche Gröſse, welche nicht unter $1 + 1 - \frac{N^2}{2AP}$ herabgedrückt werden kann.

Bei dem schwachen Kreisel ändert sich also die Lage des zweiten Parallelkreises in unstetiger Weise. Bei der geringsten Störung springt dieser Parallelkreis, welcher sich bei der ungestörten Bewegung auf den Nordpol reduziert, sogleich in einen Kreis über, dessen e' *kleiner ist als* $-1 + \frac{N^2}{2AP}$. *Die Dimensionen der Bahnkurve können daher durch Verkleinerung von* $[\Theta_0]$ *nicht beliebig verkleinert werden. Die aufrechte Rotation des schwachen Kreisels nimmt also im System der Bahnkurven eine isolierte Stellung ein.*

Die letzten Bemerkungen zeigen bereits, daſs der schwache Kreisel in aufrechter Stellung instabil ist. Was den starken Kreisel im Falle $P > 0$ betrifft, so können wir bei ihm dieselben Überlegungen anstellen, wie oben im Falle $P < 0$. Wir sprechen daraufhin den allgemeinen Satz aus:

Der starke Kreisel ist in aufrechter Stellung stabil, der schwache Kreisel labil.

Den Grenzfall zwischen dem starken und schwachen Kreisel, d. h. den Kreisel mit $N^2 = 4AP$ haben wir ersichtlich den stabilen Fällen zuzurechnen. Alsdann können wir nämlich den Anstoſs $[\Theta_0]$ noch gerade so klein bemessen, daſs sich e' beliebig wenig von

$$-1 + \frac{N^2}{2AP} = -1 + 2 = +1$$

unterscheidet. Wir fügen daher hinzu:

Der Kreisel, welcher auf der Grenze zwischen dem starken und dem schwachen Kreisel steht, ist in aufrechter Lage gleichfalls stabil.

Übrigens wird die Bahnkurve im stabilen wie im labilen Falle die Gestalt einer *Rosette* haben, welche sich (wegen der allgemeinen Periodicitätseigenschaften der Bewegung) in regelmäſsigen Zeitintervallen fortgesetzt durch den Nordpol der Kugel hindurchzieht und aus lauter

Hosted by Google

kongruenten Schleifen besteht. Der Unterschied zwischen beiden Fällen offenbart sich nur in der *Gröfse dieser Rosette*, oder, genauer gesagt, in der *Veränderung ihrer Gröfse bei Verkleinerung des Anstofses*. Die Rosette im labilen Falle ist eine nicht minder reguläre, periodisch sich reproduzierende Kurve, wie im stabilen Falle, welche sogar, unter besonderen sogleich näher anzugebenden Umständen, von der Rosette des stabilen Falles für das Auge durch nichts verschieden ist. Wir betonen diesen Punkt besonders, weil hierüber vielfach irrige Vorstellungen verbreitet sein dürften.

Die Engländer bezeichnen in höchst anschaulicher Weise die aufrechte Kreiselbewegung als Bewegung des „sleeping top". Wenn nämlich, wie wir annehmen wollen, nicht nur mechanische, sondern auch geometrische Rotationssymmetrie um die Figurenaxe vorhanden ist, so scheint der Kreisel bei aufrechter Stellung dem Auge zu ruhen. Dafs diese Ruhe aber nur eine scheinbare ist, zeigt sich, wenn wir ihn durch einen Anstofs gewissermafsen aufwecken. Alsdann wird seine ursprünglich verborgene Bewegung auch äufserlich sichtbar. Nach seinem Verhalten beim Aufwachen beurteilen wir die Stabilität oder Labilität. Wenn sein Aufwachen ein sanftes ist, nennen wir die aufrechte Bewegung stabil; wenn dagegen die leiseste Störung hinreicht, um unverhältnismäfsig grofse Elongationen hervorzurufen, heifst die Bewegung labil.

Dafs überhaupt im Falle $P > 0$ bei aufrechter Stellung Stabilität möglich ist, stellt eine Thatsache von ganz eigenartigem Interesse dar, welche zunächst wieder paradox erscheinen möchte. Während der nicht aufgezogene Kreisel im Falle $P > 0$ in aufrechter Stellung natürlich gänzlich instabil ist und auf jeden kleinsten Anstofs mit einer vollen Pendelschwingung reagiert, wird er, in genügend starke Rotation versetzt ($N^2 > 4AP$), befähigt, dem Einflufs der Schwere bis zu einem gewissen Grade Widerstand zu leisten. Der schwache Kreisel vermittelt dabei den Übergang zwischen dem Kreisel von der Eigenrotation Null und dem starken Kreisel.

Die Lage des Parallelkreises e', bis zu welchem die Figurenaxe bei irgend einem Anstofs mindestens herabsinkt, kann als ein Mafs für die gröfsere oder geringere Schwäche des Kreisels angesehen werden. Die Lage dieses dem Anstofse $[\Theta_0] = 0$ entsprechenden Parallelkreises ist, wie wir sahen, gegeben durch

$$e' = -1 + \frac{N^2}{2AP}.$$

Für den Kreisel von der Eigenrotation Null wird dieser Wert gleich -1; die Figurenaxe beschreibt alsdann, wie soeben erwähnt,

Hosted by Google

im Nordpole angestoſsen einen gröſsten Kreis, welcher durch den Südpol hindurchgeht. Die im allgemeinen eintretende Rosette ist hier ausgeartet. Bei wachsendem N wächst der Wert von e' kontinuierlich und nähert sich für $N^2 = 4AP$ dem Werte $e = +1$.

Der Übergang zwischen dem labilen und dem stabilen Falle der aufrechten Kreiselbewegung ist auf diese Weise gewissermaſsen selbst ein stetiger. Wenn nämlich N^2 zwar kleiner als $4AP$ aber doch von $4AP$ sehr wenig verschieden ist, wird die Elongation der Bahnkurve bei beliebig kleinem Anstoſse zwar von Null verschieden aber doch unbeträchtlich; sie kann sogar durch geeignete Annahme von N unter jeden gegebenen Wert herabgedrückt werden. Immerhin bleibt auch dann die charakteristische Eigenschaft des labilen Falles bestehen, daſs, nachdem wir einmal über N verfügt haben, die Dimensionen der Bahnkurve durch Abänderung von $[\Theta_0]$ nicht beliebig verkleinert werden können.

Theoretisch ist also in diesem Falle (wo $\frac{4AP}{N^2} - 1$ eine absolut genommen kleine negative Zahl ist) die Bewegung jedenfalls labil; im Experiment dagegen würde sich eine derartige Bewegung von einer theoretisch stabilen nicht merklich unterscheiden. Beidemal haben wir eine Rosette von qualitativ ähnlichem Verlauf und auſserordentlich kleinen Dimensionen. Wir mögen daher etwa von einer *theoretischen und praktischen Labilität und Stabilität* sprechen und sagen: *Im Falle, wo N^2 nur sehr wenig kleiner ist als $4AP$, ist die Bewegung theoretisch labil, praktisch aber immer noch stabil.*

Im sechsten Paragraphen dieses Kapitels werden wir noch andere einfachere Beispiele von theoretischer Labilität und praktischer Stabilität, sowie von theoretischer Stabilität und praktischer Labilität kennen lernen. —

Wir mögen schlieſslich allgemein nach solchen Bewegungen des schweren *symmetrischen* Kreisels fragen, welche aus einer bloſsen Rotation um eine im Raum feste Axe bestehen.

Aus Symmetriegründen geht hervor, daſs eine solche Axe keine andere, als die Vertikale sein kann und daſs die Drehung um diese Axe gleichförmig erfolgen muſs. Die Bewegung gehört alsdann zur Klasse der regulären Präcessionen, und zwar handelt es sich hier speziell um eine solche Präcession, bei welcher der Herpolhodiekegel unendlich dünn ist, bei welcher also μ den Wert Null hat. Die andere Präcessionskonstante ν, welche uns hier direkt die Gröſse der Winkelgeschwindigkeit angiebt, ist daraufhin bestimmt. Die Theorie des Deviationswiderstandes liefert nämlich (s. Gl. (3) von pag. 77) für ν die Gleichung:

$$P = (C - A)\nu^2 \cos\vartheta. \tag{15}$$


Hosted by Google

Nur in dem Falle $\vartheta = 0$ verliert diese Gleichung ihre Gültigkeit, weil wir an der angezogenen Stelle aus der zunächst in Betracht kommenden Gleichung den Faktor $\sin \vartheta$ herausgehoben haben, vermöge dessen diese Gleichung im Falle $\vartheta = 0$ identisch erfüllt ist. *Mithin ist die aufrechte Figurenaxe die einzige Gerade, um welche sich der Körper mit jeder beliebigen Geschwindigkeit permanent drehen kann. Jede andere Axe erfordert, falls sie als permanente Axe auftreten soll, einen (bis auf das Vorzeichen) bestimmten Wert der Winkelgeschwindigkeit.*

Je nachdem dieser Wert reell oder imaginär ausfällt, werden wir die betreffende Axe als „zulässige“ oder „unzulässige Drehungsaxe“ bezeichnen. Um die Entscheidung hierüber zu treffen, wollen wir das Gesamtbündel der von O auslaufenden Halbstrahlen durch die Äquatorebene des Kreisels in zwei Halbbündel zerlegen. Indem wir uns die Figurenaxe so gewählt denken, daſs der Schwerpunkt bei vertikal aufgerichteter Figurenaxe über den Unterstützungspunkt zu liegen kommt ($P > 0$), wollen wir dasjenige Halbbündel, welches den Schwerpunkt enthält, als oberes, das andere als unteres bezeichnen. Alsdann zeigt die Gleichung (15):

Bei dem verlängerten Kreisel ($C < A$) sind alle Halbstrahlen des unteren, bei dem abgeplatteten alle des oberen Halbbündels zulässige permanente Drehungsaxen. Jeder dieser Axen kommen zwei entgegengesetzt gleiche Werte der Winkelgeschwindigkeit zu. Speziell bei dem Kugelkreisel sind die betreffenden Winkelgeschwindigkeiten allemal $\pm \infty$.

§ 5. Fortsetzung. Analytische Behandlung der durch einen Anstoſs abgeänderten aufrechten Kreiselbewegung. — Formeln für die pseudoregulären Präcessionen von kleinem Präcessionskreise.

Wir werden jetzt die im vorigen Paragraphen gegebene qualitative Diskussion der aufrechten Kreiselbewegung durch eine angenäherte quantitative Darstellung ergänzen, unter dem Gesichtspunkte, von hieraus eine exakte Grundlage für unsere spätere Kritik der Methode der kleinen Schwingungen zu gewinnen, einer Methode, welche in der modernen Dynamik eine bekannte wichtige Rolle spielt. Dabei haben wir an die Näherungsformeln vom neunten Paragraphen des vorigen Kapitels anzuknüpfen. Die dortigen Näherungsformeln für u können auf den vorliegenden Fall direkt übertragen werden. Dagegen bedürfen die Formeln für ψ einer Modifikation, weil in diesen der Term $1 - u_0^2$ im Nenner vorkam, welcher jetzt wenigstens in den stabilen Fällen bei verschwindendem Anstoſs verschwindet.

Wir schreiben zunächst die Näherungsformel für u im vorliegenden Falle hin. Um mit den Bezeichnungen des genannten § 9 in Einklang

Hosted by Google

zu bleiben, verstehen wir unter e den unteren, unter e' den oberen der beiden begrenzenden Parallelkreise, so daſs $e' = 1$ wird. Die in unserer Näherungsformel auftretende Gröſse ε bedeutete den halben Vertikalabstand der Kreise e' und e, so daſs jetzt

$$(1) \qquad \varepsilon = \frac{1-e}{2};$$

die Gröſse u_0 war der „mittlere Parallelkreis", dessen Ebene von den Ebenen der Parallelkreise e und e' den gleichen Vertikalabstand ε besitzt, woraus im vorliegenden Falle folgt:

$$(2) \qquad u_0 = 1 - \varepsilon.$$

Die Gleichung (8') von pag. 272 können wir daher mit Benutzung der in (7) pag. 272 eingeführten Abkürzung folgendermaſsen schreiben:

$$(3) \qquad 1 - u = \frac{1-e}{2}\left(1 - \cos\frac{\pi t}{\omega}\right); \quad \omega = \sqrt{\frac{A}{2P(e'' - u_0)}}\,\pi.$$

Hierbei haben wir gleichzeitig eine für das Folgende bequeme Verschiebung des Anfangspunktes der Zeit vorgenommen, indem wir statt des Sinus den Cosinus gesetzt haben, was zur Folge hat, daſs zu Beginn der Bewegung die Figurenaxe vertikal steht ($u = 1$ für $t = 0$).

In (3) führen wir statt u und e die entsprechenden Winkel ein, indem wir setzen:

$$u = \cos\vartheta, \quad e = \cos\eta$$

und gehen von den ganzen zu den halben Winkeln über. Dann folgt, wenn wir rechts und links die Quadratwurzel ziehen:

$$(4) \qquad \sin\frac{\vartheta}{2} = \sin\frac{\eta}{2}\sin\frac{\pi t}{2\omega},$$

Die Unsicherheit in dieser Formel bestimmt sich aus der Gröſse τ des relativen Fehlers von t. Nach Gleichung (5) von pag. 272 ist

$$(5) \qquad |\tau| < \sqrt{\frac{e''-e}{e''-e'}} - 1,$$

worin nach (1) $e = 1 - 2\varepsilon$, $e' = 1$ zu setzen und e'' aus Gleichung (9) von pag. 273 zu berechnen ist. Da bei der aufrechten Bewegung $n = N$ ist, so können wir in der letztgenannten Gleichung den Faktor $2(1-e)$ in Zähler und Nenner heben und erhalten

$$(6) \qquad e'' = \frac{N^2}{AP(1+e)} - 1 = \frac{N^2 - 2AP(1-\varepsilon)}{2AP(1-\varepsilon)}.$$

Infolgedessen wird

$$(5') \qquad |\tau| < \sqrt{\frac{N^2 - 4AP(1-\varepsilon)^2}{N^2 - 4AP(1-\varepsilon)}} - 1.$$



Diese Abschätzung liefert in jedem Falle einen Anhalt für die Beurteilung des Genauigkeitsgrades der Gleichung (4).

Wir fragen insbesondere nach denjenigen Fällen, wo die begrenzte Genauigkeit von Gleichung (4) in eine beliebige Genauigkeit übergeht, wo also $|\tau|$ beliebig klein gemacht werden kann. Dies tritt offenbar, allgemein zu reden, *in den stabilen Fällen* ein, wo wir durch Wahl des Anstoſses erreichen können, daſs ε beliebig klein wird. Alsdann weicht nämlich der Wert der Quadratwurzel in (5′) von 1 beliebig wenig ab.

In den labilen Fällen dagegen haben wir die Gröſse von ε nicht in unserer Gewalt. Die rechte Seite von (5′) wird dann, selbst bei beliebig kleinem Anstoſse, eine von Null verschiedene Gröſse; es liegt kein Grund zu der Annahme vor, daſs unsere Darstellung (4) auch in diesem Falle eine beliebig genaue wäre.

Dabei haben wir *den Grenzfall zwischen den stabilen und den labilen Fällen* ($N^2 = 4AP$) besonders zu berücksichtigen. Wir sahen, daſs wir diesen Fall bezüglich des Verhaltens der Bahnkurve durchaus den stabilen Fällen zuzuordnen haben, weil die Bewegung der Kreiselspitze bei hinreichend kleinem Anstoſse in unmittelbarer Nähe des Nordpoles verläuft. Dagegen zeigt sich jetzt, daſs bezüglich des Genauigkeitsgrades unserer Annäherungsformeln dieser Grenzfall auf Seite der labilen Fälle steht. Setzen wir nämlich in (5′) $N^2 = 4AP$, so wird die rechte Seite

$$\sqrt{\frac{2\varepsilon - \varepsilon^2}{\varepsilon}} - 1,$$

d. h., wenn wir ε hinreichend klein machen, gleich

$$\sqrt{2} - 1.$$

Hier haben wir also trotz des stabilen Charakters und trotz der Möglichkeit einer beliebigen Verkleinerung der Bahnkurve einen Fall vor uns, in dem wir von unserer Näherungsformel nur eine begrenzte Genauigkeit erwarten können.

Ähnlich liegen die Verhältnisse *in den theoretisch labilen, praktisch aber stabilen Fällen,* wo $N^2 - 4AP$ zwar kleiner als Null, aber nur äuſserst wenig von Null verschieden ist und wo gleichzeitig bei hinreichend kleinem Anstoſse auch ε äuſserst klein ausfällt. Auch in diesen Fällen genügt die Kleinheit von ε nicht, um die Gröſse des Fehlers beliebig herabzudrücken.

Zu Letzterem wäre erforderlich, daſs ε nicht nur klein schlechtweg, sondern auch klein gegen $(4AP - N^2)/4AP$ wäre, was nicht der Fall ist, da, wie wir pag. 323 sahen, die Differenz 2ε der Werte von e und e'

Hosted by Google

mindestens gleich $\frac{4AP - N^2}{2AP}$ ist. Mithin haben wir auch in diesem ebenso wie in den theoretisch und praktisch labilen Fällen nur begrenzte Annäherung zu erwarten.

Im Zusammenhange damit möge noch eine Bemerkung über diejenigen stabilen Fälle Platz finden, wo $N^2 - 4AP$ zwar gröſser als Null, aber nur äuſserst wenig von Null verschieden ist. In diesen Fällen ist es allerdings möglich, durch Wahl des Anstoſses die Dimensionen der Bahnkurve und insbesondere den Wert von ε beliebig zu verkleinern, es ist also möglich, ε nicht nur klein, sondern auch klein gegen $(N^2 - 4AP)/4AP$ zu machen; unsere Näherungsformel würde für *so* klein bemessene Anstöſse als beliebig genau gelten können. Sobald wir aber den Anstoſs nur ein wenig gröſser nehmen, so zwar, daſs ε nicht mehr klein gegen $(N^2 - 4AP)/4AP$ wird, kann der Fehler sogleich beträchtlich wachsen. Infolgedessen würde die Genauigkeit unserer Formel für alle nicht gar zu kleinen Anstöſse doch nur eine begrenzte sein. Wir werden in diesem Falle von einer *theoretisch beliebigen, praktisch aber begrenzten Annäherung sprechen.*

Die letzten etwas subtilen Unterscheidungen wollen wir noch einmal zusammenfassend so formulieren:

Unsere Näherungsformel besitzt eine theoretisch und praktisch begrenzte Genauigkeit in allen instabilen Fällen und in demjenigen stabilen Falle, welcher sich auf der Grenze von Stabilität und Labilität befindet. Sie besitzt eine in theoretischer und praktischer Hinsicht beliebige Genauigkeit in denjenigen stabilen Fällen, welche genügend weit von den labilen Fällen entfernt sind. Dagegen haben wir theoretisch beliebige, praktisch aber begrenzte Genauigkeit in denjenigen Fällen, welche zwar stabil sind, aber der Grenze der Labilität sehr nahe liegen.

Sodann wollen wir die Näherungsformel für ψ ableiten. Dabei werden wir, anstatt uns auf die allgemeinen Formeln von pag. 275 ff. zu stützen, die Untersuchung lieber von vorne beginnen, weil sie sich in dem vorliegenden Falle weiter führen läſst und einfacher gestaltet, wie es im allgemeinen möglich war.

Wir gehen also aus von der Gleichung

$$\psi' = \frac{n - Nu}{A(1 - u^2)}.$$

Da bei der aufrechten Bewegung $n = N$ ist, so können wir rechterhand den Faktor $1 - u$ fortheben. Nehmen wir noch mit der rechten Seite eine identische Umformung vor, so erhalten wir:

$$\psi' = \frac{N}{A}\,\frac{1}{1+u} = \frac{N}{2A}\left(1 + \frac{1-u}{1+u}\right).$$

Hosted by Google

Indem wir nun zu einer angenäherten Darstellung übergehen, beschränken wir uns in der Klammer auf das erste Glied. Das zweite liefert dann die erforderliche Fehlerabschätzung. Unsere angenäherte Darstellung soll also lauten, wenn wir sogleich die Integration nach t ausführen und die unwesentliche Integrationskonstante gleich Null setzen:

$$\psi = \frac{N}{2A} t. \tag{7}$$

Der Fehler ist dabei genau gegeben durch

$$f = \int \frac{N}{2A} \frac{1-u}{1+u} dt.$$

Wir können $N > 0$ voraussetzen, in welchem Falle der Integrand dauernd positiv ist. Setzen wir für u seinen kleinsten Wert $e = 1 - 2\varepsilon$ ein, so verkleinern wir den Nenner und vergröſsern gleichzeitig den Zähler des Integranden. Infolgedessen ist sicher

$$f < \int \frac{N}{2A} \frac{2\varepsilon}{2 - 2\varepsilon} dt,$$

d. h.

$$f < \frac{N}{2A} \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} t. \tag{8}$$

Somit haben wir eine obere Grenze für den absoluten Fehler der Näherungsformel (7) bestimmt. Der relative Fehler $\frac{f}{\psi}$ wird dementsprechend kleiner als

$$\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}. \tag{8'}$$

Ebenso einfach wie die Fehlerabschätzung ist die Diskussion des Genauigkeitsgrades von Gleichung (7). Die Genauigkeit wird offenbar eine beliebige, wenn wir, gleichviel wie, erreichen können, daſs ε beliebig klein wird; sie wird voraussichtlich eine begrenzte sein, wenn wir ε oder was dasselbe bedeutet, die Dimensionen der Bahnkurve nicht nach Belieben verkleinern können. Wir werden also sagen müssen:

Die Gleichung (7) *giebt eine beliebig gute Annäherung in allen stabilen Fällen* (*mit Einschluſs des Grenzfalles zwischen Stabilität und Labilität*), *sowie in den praktisch stabilen und theoretisch labilen Fällen; sie giebt dagegen nur eine begrenzte Annäherung in den Fällen thatsächlicher* (*praktischer*) *Labilität.*

Man bemerke, daſs hier die Diskussion wesentlich anders ausfällt, wie oben die Untersuchung des Genauigkeitsgrades von Gleichung (4). —

Nach dieser vorbereitenden Diskussion der Näherungsformeln untersuchen wir den Charakter der verschiedenen Bewegungen, wie er sich auf Grund unserer Näherungsformeln ergiebt. Zunächst fassen wir jetzt

diejenigen Fälle näher ins Auge, welche gleichzeitig durch (4) und (7) beliebig gut dargestellt werden, d. h. die stabilen Fälle, welche hinreichend weit von der Grenze der Labilität entfernt sind, bei hinreichender Kleinheit des Anstofses $[\Theta_0]$.

Offenbar können wir in diesen Fällen, da ja die Dimensionen der Bahnkurve verschwindend klein sein sollen, in (4) $\sin\frac{\eta}{2}$ und $\sin\frac{\vartheta}{2}$ durch $\frac{\eta}{2}$ und $\frac{\vartheta}{2}$ ersetzen. Gleichzeitig wollen wir den Wert von ω in Gleichung (3) vereinfachen, indem wir näherungsweise $\varepsilon = 0$, $u_0 = 1$ setzen. Dann ergiebt sich aus (6) und (3)

$$e'' = \frac{N^2 - 2AP}{2AP}, \quad \omega = \frac{A\pi}{\sqrt{N^2 - 4AP}}. \tag{9}$$

Die Gleichungen der Bahnkurve nehmen daher folgende Gestalt an:

$$\begin{cases} \vartheta = \eta \sin\left\{\sqrt{\frac{N^2 - 4AP}{4A^2}}\, t\right\}, \\ \psi = \frac{N}{2A}\, t. \end{cases} \tag{10}$$

Für die Vorstellung und Zeichnung ist es bequem, die Bahnkurve auf die Aquatorebene zu projizieren. Wir können hierzu eine Orthogonalprojektion benutzen (bei der stereographischen Projektion würde sich dasselbe Bild, nur im halben Mafsstabe, ergeben). Bezeichnen x und y die rechtwinkligen Koordinaten des Projektionspunktes bezüglich eines im Mittelpunkt der Einheitskugel gelegenen Koordinatenkreuzes, so haben wir etwa:

$$\begin{cases} x = \sin\vartheta\cos\psi = \eta \sin\left\{\sqrt{\frac{N^2 - 4AP}{4A^2}}\, t\right\} \cdot \cos\frac{N}{2A}\, t, \\ y = \sin\vartheta\sin\psi = \eta \sin\left\{\sqrt{\frac{N^2 - 4AP}{4A^2}}\, t\right\} \cdot \sin\frac{N}{2A}\, t. \end{cases} \tag{11}$$

Die hierdurch dargestellte Bewegung können wir folgendermafsen mit Worten beschreiben:

Die Bewegung der Horizontal-Projektion der Kreiselspitze besteht aus einer gewöhnlichen harmonischen Schwingung (dargestellt durch den ersten Faktor in x und y) von der Amplitude η und der viertel Schwingungsdauer ω, verbunden mit einer Drehung der Schwingungsrichtung (dargestellt durch den zweiten Faktor) von der Winkelgeschwindigkeit $N:2A$.

Die Gestalt der Bahnkurve wird wesentlich durch den Winkel bedingt, um welchen das Azimuth ψ etwa während der Zeit ω zunimmt. Wir bezeichnen denselben wie früher durch ψ_ω und haben nach (7) und (9)

$$\psi_\omega = \frac{\pi}{2}\frac{N}{\sqrt{N^2 - 4AP}}. \tag{12}$$

Hosted by Google

Ersichtlich ist

$$\psi_\omega > \frac{\pi}{2} \quad \text{im Falle} \quad P > 0,$$

$$\psi_\omega < \frac{\pi}{2} \quad \text{im Falle} \quad P < 0.$$

In dem Grenzfalle $P = 0$ wird ψ_ω gerade gleich $\pi/2$. Die Bahnkurve der Kreiselspitze wird dann einfach ein Kreis, der Präcessionskreis der kräftefreien Bewegung; Axe der Präcession ist der um den Anstofs $[\Theta_0]$ abgeänderte Anfangsimpuls N. Letztere Bahnkurvenbestimmung gilt übrigens aufser für den Grenzfall $P = 0$ auch für den Fall $N = \infty$, wie aus dem schon mehrfach benutzten Prinzipe folgt, wonach ein Kreisel von unendlich grofsem Eigenimpuls und endlichem Schweremomente P sich ebenso verhält, wie ein schwereloser Kreisel von endlichem N.

Die Gestalt der Bahnkurven ist hiernach in allen stabilen Fällen, wo unsere beiden Näherungsformeln beliebig genau werden, leicht zu übersehen. Die nachfolgenden charakteristischen Figuren, welche man bei allen analogen Schwingungsvorgängen wiederfinden wird, erläutern drei Typen derselben, $P > 0$, $P = 0$ bez. $N = \infty$ und $P < 0$. Die Bahnkurve in Fig. 55 schliefst sich zufällig fast genau, Fig. 56 stellt den Übergang zwischen 55 und 57 dar.

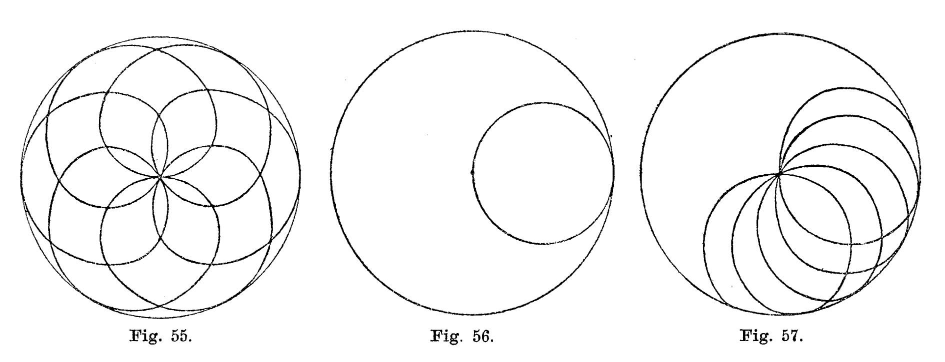


Fig. 55. Fig. 56. Fig. 57.

Wie wir sehen, sind unsere Schwingungen im stabilen Falle tautochron, d. h. in erster Annäherung ihrer Zeitdauer nach unabhängig von der Gröfse des Anstofses $[\Theta_0]$ und der damit zusammenhängenden Gröfse der Amplitude η, vorausgesetzt, dafs beide Gröfsen hinreichend klein genommen werden. Unsere Schwingungen zeigen also dasselbe Verhalten, welches von den sogenannten kleinen Pendelschwingungen her bekannt ist und welches für die sogenannten „kleinen Schwingungen" überhaupt charakteristisch ist.

Die kleinen Pendelschwingungen müssen sich natürlich als Spezial-

Hosted by Google

fall unter die Schwingungen des aufrechten Kreisels und zwar speziell eines Kreisels von verschwindendem Trägheitsmomente C einordnen. Da das Pendel in vertikaler Lage nur stabil ist, wenn der Massenpunkt unter dem Aufhängepunkt liegt, müssen wir im Vorhergehenden $P < 0$ voraussetzen. Und zwar haben wir unter m die schwingende Masse, unter l die Pendellänge verstanden:

$$P = -mgl, \quad A = ml^2.$$

Die Formel (9) liefert daher, wegen $N = Cr = 0$:

$$4\omega = 2\pi \sqrt{\frac{A}{-P}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

d. h. die bekannte Gleichung für die Periode der vollen Pendelschwingung.

Wir wenden uns nun zu den instabilen Fällen, sowie zu den theoretisch stabilen, praktisch aber instabilen Fällen. Auch zur Beurteilung dieser Fälle können die obigen Näherungsformeln von Nutzen sein; wir müssen uns dabei nur gegenwärtig halten, dafs die Genauigkeit dieser Darstellung keine beliebige mehr ist, und müssen die Gröfse der möglichen Fehler nach den Ungleichungen (5′) und (8′) in jedem Falle abschätzen. Jedenfalls werden wir aus dieser (wenngleich mit endlichen Fehlern behafteten) Darstellung schliefsen dürfen, dafs der qualitative Charakter der Bahnkurve im allgemeinen ein ähnlicher sein wird, wie in den stabilen Fällen, nur dafs die Dimensionen je nach dem Grade der Labilität sich vergröfsern und dafs im einzelnen quantitative Abweichungen von dem einfachen Sinusgesetz Platz greifen. Im grofsen und ganzen werden daher die Bahnkurven auch im labilen Falle, wie bereits pag. 324 hervorgehoben, Rosetten von ähnlicher Gestalt wie die vorhergehenden Figuren sein. Wollen wir die Bahnkurven in den labilen Fällen dagegen beliebig genau berechnen, so werden wir offenbar zu den elliptischen Integralen zurückgreifen müssen.

Natürlich müssen wir dabei nicht die für die Verhältnisse des stabilen Kreisels vereinfachte Näherungsformel (10), sondern die allgemeine Formel (4) zu Grunde legen. Insbesondere würde es ein grober Fehler sein, wenn wir die Schwingungsperiode ω aus der Gleichung (9) statt aus (3) entnehmen wollten. Die letztere Gleichung wird auch in den labilen Fällen ein vernünftiges Resultat liefern, welches um so brauchbarer ist, je kleiner sich der Fehler τ stellt. Die Gleichung (9) dagegen liefert ein ganz unsinniges Ergebnis. Es würde sich nämlich bei einem labilen Kreisel wegen $N^2 - 4AP < 0$ ein imaginärer Wert für ω berechnen. Es wäre offenbar eine handgreifliche Verdrehung des wahren Sachverhaltes, wenn man aus dieser Berechnung von ω schliefsen wollte, dafs die Bewegung des instabilen Kreisels unperiodisch

Hosted by Google

verlaufe und die Kreiselspitze sich dementsprechend je länger je mehr von dem Nordpole entferne. Trotzdem findet man oft diesen gänzlich falschen Schlufs gemacht. Was aber noch viel merkwürdiger ist, es liefert diese Verdrehung, zum Prinzip erhoben, ein, wie wir später sehen werden, sehr fruchtbares Instrument, um über die Stabilität der Bewegungen ein vorläufiges Urteil zu gewinnen; man nennt dieses Verfahren die Methode der kleinen Schwingungen!

Ein ganz besonderes Interesse darf *die Bewegung des aufrechten schwachen Kreisels im Grenzfalle* $[\Theta_0] = 0$ beanspruchen. Wir wollen uns vorstellen, dafs wir der Figurenaxe in der aufrechten Anfangslage eine Reihe allmählich abnehmender Anstöfse erteilen, und wollen den Limes untersuchen, dem sich die Bahnkurve für $[\Theta_0] = 0$ nähert. Bei den allgemeinen Untersuchungen des folgenden Paragraphen wird diese Bewegung, wie wir schon jetzt bemerken, eine prinzipielle Rolle spielen.

Wir wollen uns zunächst fragen, inwieweit wir diese Bewegung durch unsere Annäherungsformeln beherrschen können. Wir bestimmen also den Fehler τ für den vorliegenden Fall und haben uns zu dem Zwecke ein Urteil über die Lage der Wurzeln e, e' und e'' zu bilden. Die kleinste Wurzel e wird durch denjenigen Parallelkreis gegeben, bis zu welchem die Kreiselspitze bei Hinzufügung eines in der Grenze verschwindenden Anstofses mindestens heruntersinkt. Dies ist nach der Fig. 54 von pag. 322 der Kreis $u = e = -1 + \frac{N^2}{2AP}$. Die nächstgröfsere Wurzel wird wegen der aufrechten Anfangslage $e' = 1$. Um die dritte Wurzel e'' zu finden, gehen wir auf den Ausdruck von U in Gleichung (5′) (vgl. pag. 318) zurück. Setzen wir hier $[\Theta_0] = 0$, so ergiebt sich

$$(13)\qquad \begin{cases} A^2 U = -N^2(1-u)^2 + 2AP(1-u)(1-u^2), \\ = 2AP(u-e)(1-u)^2. \end{cases}$$

Die dritte Wurzel wird also in diesem besonderen Falle mit der zweiten Wurzel identisch; wir haben

$$e'' = e' = 1.$$

Dann aber liefert die Ungleichung (5) wegen des verschwindenden Nenners als obere Grenze für den Fehler τ den Wert ∞! *In diesem Spezialfalle der instabilen Kreiselbewegung (aber auch nur in diesem) wird unsere angenäherte Darstellung, soweit sich dieses aus der Fehlerabschätzung beurteilen läfst, gänzlich unbrauchbar, indem die angegebene obere Grenze des Fehlers jeden beliebigen Betrag erreichen kann.*

Zum Glück wird aber auch gerade in diesem Spezialfalle die genaue

Hosted by Google

Darstellung so einfach, dafs wir unsere Näherungsformeln leicht entbehren können. Es zeigt sich nämlich, dafs die elliptischen Integrale in elementar ausführbare ausarten, entsprechend dem Umstande, dafs zwei unserer Verzweigungspunkte e' und e'' zusammenrücken. Nach Gleichung (13) wird nämlich

$$t = \int \frac{du}{\sqrt{U}} = \sqrt{\frac{A}{2P}} \int \frac{1}{1-u} \frac{du}{\sqrt{u-e}};$$

das Integral rechts drückt sich durch einen Logarithmus in folgender Weise aus:

$$\int \frac{1}{1-u} \frac{du}{\sqrt{u-e}} = \frac{1}{1-e} \lg \frac{\sqrt{1-e} + \sqrt{u-e}}{\sqrt{1-e} - \sqrt{u-e}}.$$

Infolgedessen wird mit Rücksicht auf den oben angegebenen Wert von e:

$$(14) \qquad t = \frac{A}{\sqrt{4AP - N^2}} \lg \frac{\sqrt{1-e} + \sqrt{u-e}}{\sqrt{1-e} - \sqrt{u-e}}.$$

Die Unterdrückung der Integrationskonstanten in dieser Formel kommt einer speziellen Festlegung der Anfangszeit gleich. Da die rechte Seite für $u = e$ verschwindet, so bedeutet die Anfangszeit $t = 0$ denjenigen Moment, wo die Kreiselspitze den tiefsten Punkt passiert. Die Zeit wird also in Gleichung (14) (und zwar mit gutem Grunde) nicht wie bisher von dem Eintritt der Störung in der aufrechten Lage, sondern von der tiefsten Lage an gerechnet.

Dem Anstofse $[\Theta_0] = 0$ entsprechend wird die Ausgangsgeschwindigkeit der Kreiselspitze im Nordpole $\vartheta_0' = 0$ (wir haben ja allgemein $[\Theta] = A\vartheta'$). *In Übereinstimmung hiermit wird die Zeit, während welcher die Kreiselspitze von dem Nordpole bis zu dem Parallelkreis e herabsinkt,* und welche wir nach Früherem mit ω zu bezeichnen haben, *geradezu unendlich grofs.* In der That liefert Gleichung (14) für diese Zeit, bez. für die in umgekehrtem Sinne gemessene Zeit, während welcher u von e bis 1 wächst, den Wert

$$\omega = \infty.$$

Die explicite Darstellung der Bahnkurve verlangt ferner die Berechnung des Integrales für ψ. Wir setzen zu dem Zwecke in die allgemeine Formel

$$\psi = \int \frac{n - Nu}{A(1-u^2)} \frac{du}{\sqrt{U}}$$

$n = N$ und tragen den Wert von U aus Gleichung (13) ein. So ergiebt sich

$$\psi = \frac{N}{\sqrt{2AP}} \int \frac{1}{1-u^2} \frac{du}{\sqrt{u-e}}.$$

Hosted by Google

Wiederum läſst sich das Integral auf elementarem Wege ausführen. Wir haben nämlich

$$\int \frac{1}{1-u^2} \frac{du}{\sqrt{1-u}} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1-u} \frac{du}{\sqrt{u-e}} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+u} \frac{du}{\sqrt{u-e}}.$$

Das erste Integral rechts wurde bereits oben angegeben; das zweite liefert

$$\int \frac{1}{1+u} \frac{du}{\sqrt{u-e}} = \frac{2}{\sqrt{1+e}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{u-e}}{\sqrt{1+e}}.$$

Mithin ergiebt sich

$$(15) \qquad \psi = \frac{1}{2} \frac{N}{\sqrt{4AP-N^2}} \lg \frac{\sqrt{1-e}+\sqrt{u-e}}{\sqrt{1-e}-\sqrt{u-e}} + \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{u-e}}{\sqrt{1+e}}.$$

Da die ganze rechte Seite für $u = e$ verschwindet, so giebt unsere Formel direkt an, um wieviel der Winkel ψ wächst, während die Kreiselspitze von dem unteren Parallelkreise e ausgehend in die allgemeine Lage u übergeht.

Die Gleichung (15) liefert uns die gesuchte Darstellung der Bahnkurve. Wir haben unsere Aufmerksamkeit namentlich auf den ersten Term der rechten Seite zu richten. Dieser wächst unaufhörlich, wenn u sich der 1 nähert und wird für $u = 1$ logarithmisch unendlich. Der zweite Term kommt im Verhältnis zum ersten nicht wesentlich in Frage, weil er für $u = 1$ endlich bleibt. Die Gestalt der Bahnkurve ist daraufhin klar: *Unsere Kurve windet sich um den Nordpol unaufhörlich herum, indem sie sich ihm beständig nähert, ohne ihn jemals zu erreichen.* Wir haben im Wesentlichen eine *logarithmische Spirale* vor uns.

Die ungestörte aufrechte Bewegung stellt hiernach im Falle des schwachen Kreisels, wie man im Anschlusse an Poincarés Untersuchungen zur Himmelsmechanik sagt, eine *asymptotische Lösung des Kreiselproblems* dar, weil es eine Schaar von Bewegungen giebt, welche sich ihr asymptotisch nähern.

Verfolgen wir die Bahnkurve von dem Parallelkreise e aus nach der anderen Seite, so erhalten wir einen dem soeben beschriebenen spiegelbildlich gleichen Ast, welcher gleichfalls dem Nordpole asymptotisch zustrebt. Die gesamte Bahnkurve besteht also in unserem Falle nicht, wie im allgemeinen, aus unendlich vielen, sondern nur aus zwei spiegelbildlich gleichen Teilbögen.

Trotzdem schlieſst sich unsere aperiodische Spiralkurve in gewissem Sinne stetig an die periodischen Bahnkurven bei von Null verschiedenem Anstoſse an. Wir haben uns vorzustellen, daſs bei abnehmendem $[\Theta_0]$ die Durchlaufungsdauer und die Spannweite jedes einzelnen der unendlich vielen Teilbögen gröſser und gröſser wird, und daſs gleichzeitig auch

die Anzahl von Malen, mit der sich der Teilbogen um den Nordpol herumschlingt, unbegrenzt zunimmt. *Nach der anderen Seite hin, d. h. nach der Seite der aufrechten Kreiselbewegung selbst, ist der Übergang von unserer spiraligen Grenzkurve zu der instabilen gleichförmigen Rotation natürlich ein völlig diskontinuierlicher.* In der That ändert sich die punktförmige Bahnkurve der aufrechten Kreiselbewegung unvermittelt sprungweise in die spiralige Grenzkurve ab, wenn wir erstere durch einen Anstofs stören und diesen Anstofs zu Null abnehmen lassen.

Hier ordnet sich auch ein spezieller Fall der gewöhnlichen Pendelbewegung ein. Wenn wir nämlich einen nicht aufgezogenen Kreisel ($N = 0$), d. i. ein Pendel, bei senkrecht über dem Unterstützungspunkte gelegenem Schwerpunkt anstofsen, so schwingt die Spitze von dem höchsten durch den tiefsten Punkt der Kugel hindurch und beschreibt einen gröfsten Kreis. Wenn wir den Anstofs immer mehr zu Null abnehmen lassen, bleibt die Bahnkurve ungeändert dieselbe. Nur die Geschwindigkeit im höchsten Punkte wird in der Grenze Null, die Schwingungsdauer unendlich. Dementsprechend liefern unsere Formeln in diesem Falle

$$e = -1, \quad \psi = \text{const.}$$

Die nächstfolgende (in orthographischer Projektion hergestellte) Figur 58 ist für die besonderen Werte

$$A = P = 1, \quad N = \sqrt{2}$$

entworfen, in welchem Falle $e = 0$ wird und die Gleichung der Bahnkurve sich folgendermafsen schreiben läfst:

$$\psi = \frac{1}{2} \lg \frac{1 + \sqrt{u}}{1 - \sqrt{u}} + \operatorname{arctg} \sqrt{u}.$$

Bei dem kräftefreien dreiaxigen Körper ist eine entsprechende asymptotische Bewegung seit Poinsot bekannt (vgl. oben pag. 132, Anm.). Dafs aber auch der schwere symmetrische Kreisel einer solchen Bewegung fähig ist, scheint bisher eigentümlicher Weise nicht bemerkt zu sein.

Im Anschlufs an die Bewegung des aufrechten starken Kreisels bringen wir einen Nachtrag zu der früheren Behandlung der *pseudoregulären Präcession,* bei welcher der Fall unerledigt blieb, wo die Bahnkurve der Kreiselspitze in nächster Nähe des Nordpols verlief. Dies nehmen wir jetzt an; es sollen also die Parallelkreise e und e' $(e < e')$ sehr wenig von einander und von 1 verschieden sein. Aufserdem sollen die für die pseudoreguläre Präcession charakteristischen Bedingungen gelten, wonach der Impuls nahezu in Richtung der Figurenaxe fallen und eine

beträchtliche Länge (N^2 grofs gegen AP) haben soll. Wir werden vermuten dürfen, dafs die Bewegung ähnlich verlaufen wird, wie die Bewegung des aufrechten starken Kreisels bei hinreichend kleinem Anstofs, was wir analytisch bestätigen werden.

Da wir wieder unsere Näherungsformeln verwenden wollen, prüfen wir zunächst deren Genauigkeitsgrad. Die Formel für u giebt, wie wir wissen, eine beliebige Genauigkeit, wenn die obere Grenze des Fehlers τ

$$\sqrt{\frac{e''-e}{e''-e'}}-1$$

beliebig klein ausfällt. Hierzu genügt noch nicht, dafs e und e' hinreichend wenig verschieden sind, sondern es kommt noch die weitere Bedingung hinzu, dafs e'' den Werten e, e' nicht sehr nahe liegen darf. Wir müssen uns also ein Urteil über die Gröfse von e'' bilden.

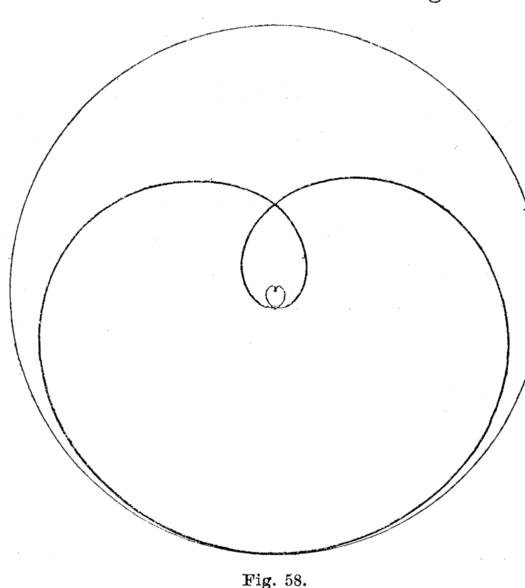


Fig. 58.

Nach Gleichung (9) von pag. 273 wird

$$e''=\frac{n^2+N^2-2nNe}{2AP(1-e^2)}-e';$$

nähert sich e immer mehr der 1, so nähern sich auch die Werte n und N einander; es verschwindet also Zähler und Nenner gleichzeitig, so dafs eine besondere Untersuchung nötig wird. Wir gehen auf den ursprünglichen Ausdruck von U (s. Gleichung (7′) von pag. 238) zurück. Tragen wir hier $u=e$ ein, so wird

$$(Ne-n)^2=(k-N^2-2APe)(1-e^2)$$

oder

$$\frac{n^2+N^2-2nNe}{1-e^2}=k-2APe.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung hat eine einfache mechanische Bedeutung; es war nämlich (s. Gleichung (3) von pag. 219)

$$k=|i|^2+2AP\cos\vartheta;$$

mithin ist die fragliche Gröfse direkt gleich $|i|_e^2$, d. h. gleich dem Quadrat der Länge des Impulses in der Anfangslage e. Nach Voraus-

Hosted by Google

setzung ist diese Gröfse im Verhältnis zu AP eine sehr grofse Zahl und wenig von N^2 verschieden. Hieraus folgt, dafs e'' ebenfalls einen grofsen Zahlenwert besitzt und dafs wir, gerade so wie bei der aufrechten Bewegung, näherungsweise setzen können

$$(16) \qquad e'' = \frac{N^2 - 2AP}{2AP},$$

wobei $|i|_e^2$ durch N^2 und e' durch 1 ersetzt ist.

Die Näherungsformel (8′) von pag. 272 für u besitzt also auch in diesem Falle der pseudoregulären Präcession eine beliebig hohe Genauigkeit. Wir schreiben dementsprechend

$$(17) \left\{ \begin{array}{c} u = u_0 + \varepsilon \sin \frac{\pi t}{\omega} = u_0 + \delta, \\ u_0 = \frac{e' + e}{2}, \quad \varepsilon = \frac{e' - e}{2}, \quad \omega = \pi \sqrt{\frac{A^2}{N^2 - 4AP}}, \quad \delta = \varepsilon \sin \frac{\pi t}{\omega}. \end{array} \right.$$

Gröfsere Weiterungen verursacht die Herstellung einer geeigneten Näherungsformel für ψ. Wir haben

$$\psi = \int \frac{n - Nu}{A(1 - u^2)} dt = \int \frac{n - N}{2A(1 - u)} dt + \int \frac{n + N}{2A(1 + u)} dt = \psi_1 + \psi_2.$$

Die Berechnung von ψ_2 macht keine Schwierigkeit. Benutzen wir die Identität

$$\frac{1}{1 + u} = \frac{1}{1 + u_0 + \delta} = \frac{1}{1 + u_0} - \frac{\delta}{(1 + u_0)^2} + \frac{\delta^2}{(1 + u_0)^2 (1 + u)},$$

so wird näherungsweise

$$(18) \qquad \psi_2 = \frac{n + N}{2A(1 + u_0)} t + \frac{(n + N)}{2A(1 + u_0)^2} \cdot \frac{\omega \varepsilon}{\pi} \cdot \cos \frac{\pi t}{\omega}.$$

Das fortgelassene Restglied ist, wie man sich leicht überzeugt, im Verhältnis zu den beibehaltenen Gliedern bei hinreichend kleinem ε allemal beliebig klein.

Bei der Berechnung von ψ_1 nützt uns die vorherige Entwickelung nichts, weil dabei die als klein vorausgesetzte Gröfse $1 - u_0$ in den Nenner treten und die Abschätzung des Fehlers illusorisch machen würde. Wir sind daher auf die wirkliche Ausführung der Integration angewiesen.

ψ_1 hat, wenn wir für u den Wert aus Gleichung (17) benutzen, die Form:

$$\psi_1 = c \int \frac{dt}{a - \sin \alpha t}, \quad \alpha = \frac{\pi}{\omega}, \quad a = \frac{1 - u_0}{\varepsilon} > 1, \quad c = \frac{n - N}{2A\varepsilon}.$$

Die Integration liefert, wie man verificieren kann,

$$(19) \qquad \psi_1 = \frac{-c}{\alpha \sqrt{a^2 - 1}} \operatorname{arctg} \frac{1 - a \sin \alpha t}{\sqrt{a^2 - 1} \cos \alpha t}.$$

Hosted by Google

Wir werden hier also auf eine kompliciertere Abhängigkeit von t geführt, welche sich nicht, wie in der für ψ_2 gegebenen Formel, unmittelbar in ein der Zeit proportionales und ein periodisches Glied zerlegt. Auf die Fehlerabschätzung werden wir hier der Kürze halber nicht eingehen.

Zunächst wollen wir unsere letzte Formel mit der früheren Darstellung der pseudoregulären Präcession und der aufrechten Kreiselbewegung in Zusammenhang bringen. Bei der pseudoregulären Präcession mit nicht verschwindendem Präcessionskreise ist $1 - u_0$ von Null verschieden und a wegen des kleinen Nenners ε sehr grofs. Infolgedessen geht das Argument des Arcus-Tangens über in $\operatorname{tg} \alpha t$ und die Formel ψ_1 in

$$\frac{c}{\sqrt{a^2 - 1}}\, t = \frac{n - N}{2A(1 - u_0)}\, t.$$

Dieser Term, zusammen mit dem ersten Gliede in (17), bestimmt die mittlere Präcessionsgeschwindigkeit bei der pseudoregulären Präcession in der früher (pag. 302) angegebenen Weise.

Sehen wir andrerseits zu, was Gleichung (19) bei der aufrechten Bewegung giebt, wo die Bahnkurve durch den Nordpol der Einheitskugel hindurchzieht. Hier wird $e' = 1$ und $1 - u_0 = \varepsilon$. Mithin haben wir $a = 1$. Das Argument des Arcus-Tangens nimmt in diesem Falle nur die drei Werte $+\infty$, $-\infty$ und 0 an. Im allgemeinen ist sein Wert $\pm\infty$, je nach dem Vorzeichen von $\cos \alpha t$; in denjenigen Momenten aber, wo $\alpha t = (4n + 1)\frac{\pi}{2}$ wird, d. h. (vgl. Gleichung (17)), wo die Kreiselspitze den Nordpol passiert, springt das Argument von $+\infty$ durch 0 nach $-\infty$; der Wert des Arcus-Tangens vermehrt sich dabei sprungweise um -2π. (Um dieses einzusehen, mufs man allerdings nicht den Grenzfall $a = 1$ selbst, sondern ein $a > 1$ betrachten.) In der Gleichung (7) von pag. 330, durch welche wir die ψ-Koordinate bei der aufrechten Bewegung darstellten, kam diese sprungweise Änderung nicht zum Ausdruck. Vielmehr giebt diese Gleichung nur den einen Bestandteil ψ_2 (und zwar nur das erste Glied desselben) wieder. Dagegen lehrt ein Blick auf die Figuren 55—57 die Bedeutung des in Rede stehenden Termes verstehen. Beim Passieren des Nordpols wächst ψ in der That notwendigerweise momentan und zwar um π, da sich die Bahnkurve durch den Nordpol hindurch mit stetiger Tangente fortsetzt. Gleichzeitig schliefsen wir daraus, dafs der (sonst nicht ganz leicht zu bestimmende) Grenzwert des Faktors:

$$\frac{c}{\alpha\sqrt{a^2 - 1}} = \frac{(n - N)\pi}{2\pi A\sqrt{(1 - u_0)^2 - \varepsilon^2}}$$

für $1 - u_0 = \varepsilon$ und $n = N$ gleich $\frac{1}{2}$ sein wird. Diesen Grenzwert wollen wir auch im Falle, daſs die Bahnkurve nicht genau durch den Nordpol hindurchgeht, benutzen, und für (19) einfacher schreiben:

$$(19') \qquad \psi_1 = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\varepsilon - (1 - u_0) \sin \frac{\pi}{\omega} t}{\sqrt{(1 - u_0)^2 - \varepsilon^2} \cos \frac{\pi}{\omega} t}.$$

Die definitiven Formeln zur Beschreibung einer pseudoregulären Präcession von sehr kleinem Präcessionskreise werden daher nach (17), (18) und (19′) die folgenden:

$$(20) \qquad \begin{cases} u = u_0 + \varepsilon \sin \frac{\pi t}{\omega}, \\ \psi = \frac{n + N}{2A(1 + u_0)} t + \frac{n + N}{2A(1 + u_0)^2} \frac{\omega \varepsilon}{\pi} \cos \frac{\pi t}{\omega} \\ \qquad\qquad + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\varepsilon - (1 - u_0) \sin \frac{\pi t}{\omega}}{\sqrt{(1 - u_0)^2 - \varepsilon^2} \cos \frac{\pi t}{\omega}}. \end{cases}$$

Der Vergleich unserer Bewegung mit der aufrechten Kreiselbewegung giebt uns ein deutliches Bild von dem Ursprung des Termes ψ_1. Der plötzliche Sprung der ψ-Koordinate im Falle der aufrechten Bewegung muſs sich bei unserer pseudoregulären Präcession in eine stetige, aber eventuell sehr schnelle Änderung auflösen, welche jedesmal dann eintritt, wenn die Kreiselspitze dem Nordpole sehr nahe rückt. Es ist begreiflich, daſs diese ausnahmsweise Anderung des Azimuthes sich dem allgemeinen Schema von Präcession und Nutation nicht anpaſst. Dementsprechend sehen wir, daſs der allgemeine Charakter der Gleichungen zur Darstellung der pseudoregulären Präcession gegen früher erheblich verändert ist und namentlich, *daſs wir die Bewegung nicht wie früher in eine reguläre Präcession und eine einfache harmonische Schwingung auflösen können.*

Einer ähnlichen Modifikation würden natürlich auch die Gleichungen bedürfen, durch welche wir die Nachbarbewegungen der regulären Präcession dargestellt haben, falls letztere in nächster Nähe des Nordpols stattfindet. *Auch hier würde sich die Spaltung der Bewegung in eine mittlere Präcession und eine darüber gelagerte Nutation nicht mehr glatt ausführen lassen.*

Trotz des formalen Unterschiedes in der Gestalt der Gleichungen bleiben doch wesentliche Eigenschaften der allgemeinen pseudoregulären Präcession erhalten.

Hosted by Google

Wir sahen bereits, dafs sich die Zeitdauer ω eines Überganges von dem einen zu dem anderen Begrenzungskreise auch jetzt durch die Näherungsformel (17)

$$\omega = \sqrt{\frac{A^2}{N^2 - 4AP}}\,\pi,$$

darstellen läfst, welche mit Gleichung (15′) von pag. 305 identisch ist.

Ferner berechnen wir nach (20) die Gröfse $2\psi_\omega$, d. h. die Änderung des Azimuthes ψ während zweier aufeinanderfolgender Übergänge. Der Arcus-Tangens wächst während dessen um -2π, der Winkel ψ daher um

$$2\psi_\omega = \frac{n+N}{2A(1+u_0)}\,2\omega - \pi.$$

Hier gehen wir noch zur Grenze $u_0 = 1$, $n = N$ über, welche der aufrechten Bewegung entspricht und erhalten:

$$2\psi_\omega = \frac{N}{A}\,\omega - \pi.$$

Setzen wir für ω den eben angegebenen Wert ein und entwickeln diesen, indem wir von $\frac{AP}{N^2}$ wie früher bei der pseudoregulären Präcession nur die erste Potenz beibehalten, so ergiebt sich schliefslich:

$$2\psi_\omega = \left\{\left(1 - \frac{4AP}{N^2}\right)^{-\frac{1}{2}} - 1\right\}\pi = \frac{2AP}{N^2}\,\pi.$$

Dieser Wert stimmt genau mit demjenigen überein, den wir bei der gewöhnlichen pseudoregulären Präcession aus Gleichung (11) von pag. 303 berechnen würden.

Für die Anwendungen (insbesondere für die Ballistik) haben die pseudoregulären Präcessionen von sehr kleinem Präcessionskreise eine gewisse Bedeutung, weshalb ihre nachträgliche Erledigung an dieser Stelle geboten schien.

§ 6. Allgemeines über die Stabilität und Labilität der Bewegungen.

Aufgabe dieses Paragraphen soll es sein, unsere bereits mehrfach angewandte Begriffsbestimmung der stabilen und labilen Bewegungen zu verschärfen und gegen andere Definitionen dieses Begriffes abzuwägen. Das Beispiel des Kreisels wird uns dabei einen geeigneten Ausgangspunkt für allgemeinere Betrachtungen liefern.

Am frühesten kommt ein Stabilitätsbegriff bewegter Systeme in der astronomischen Mechanik vor. Er spielt bereits bei Laplace eine bekannte wichtige Rolle, der seine Scheinbeweise für die Stabilität des Planetensystems gab.*) Und zwar nennt man nach Laplace ein Punkt-

*) Vgl. z. B. Jacobis vierte Vorlesung über *Dynamik.*

system stabil, wenn im Laufe der Zeit kein Punkt sich ins Unendliche entfernen kann. Wie man sieht, ist dieser Stabilitätsbegriff speziell auf die Bedürfnisse der Astronomie und die Verhältnisse bei einem nicht starren Punktaggregate zugeschnitten. Er hat mit dem, was wir im Folgenden als Stabilität bezeichnen werden, sehr wenig zu thun.

Vom physikalischen Standpunkte aus hat wohl zuerst*) Lord Kelvin auf die Stabilitätsfragen aufmerksam gemacht. Es giebt nach ihm „kaum eine für die Naturerkenntnis wichtigere mechanische Frage wie die nach der Stabilität und Labilität der Bewegungen."**) Seitdem werden diese Dinge von zahlreichen namentlich englischen Autoren behandelt. Die hier gewöhnlich zu Grunde gelegte Definition der Stabilität entnehmen wir der Preisschrift von Herrn E. J. Routh, *On the stability of a given state of motion.****) Nach Routh soll die Bewegung eines Systems *stabil* heifsen, *wenn bei einer beliebigen aber kleinen Störung die Abweichung zwischen den zu gleichen Zeiten Platz greifenden Lagenkoordinaten des Systems in der abgeänderten und der ursprünglichen Bewegung dauernd klein bleibt.* (Unter einer „kleinen" Gröfse wird dabei eine solche verstanden, „deren Quadrat vernachlässigt werden kann".)

Wir haben zunächst das Wort „Störung" näher zu präzisieren. Wir verstehen darunter zunächst den *Inbegriff der Differenzen zwischen den Anfangswerten der Impulskoordinaten bei der ursprünglichen und der abgeänderten Bewegung.* Hierbei müssen wir uns allerdings bezüglich dessen, was bei einem beliebigen mechanischen System unter den Impulskoordinaten verstanden werden soll, auf spätere Ausführungen berufen.

Es liegt nun nahe, an der mitgeteilten Definition eine durch die Forderungen moderner Strenge gebotene Modifikation vorzunehmen. Wir werden lieber, statt von *kleinen*, von *beliebig kleinen* Störungen und Abweichungen sprechen. Damit knüpfen wir an die wohlfundierten Grundbegriffe der Differentialrechnung, speziell den Grenzbegriff, an.

Gleichzeitig sondern wir durch diese Modifikation die in unserem Beispiel von pag. 325 als *praktisch stabil* bezeichneten Fälle von den *theoretisch stabilen* ab. Bei den praktisch stabilen, theoretisch labilen Fällen der aufrechten Kreiselbewegung war nämlich die Abweichung der Kreiselspitze von ihrer Anfangslage (infolge besonderer Wahl der Konstanten A, P und N) dauernd klein; sie konnte aber nicht (durch

*) In der ersten Auflage der Natural Philosophy, 1867.

**) Vgl. Thomson und Tait: Natural Philosophy, art. 346, Vol. I pag. 416.

***) London 1877, vgl. Kap. I, art. 1, sowie das Lehrbuch desselben Autors, *Rigid Dynamics,* Part II, art. 256 und 257.


Hosted by Google

Verkleinerung der Störung) beliebig klein gemacht werden. Nach der vorangestellten Routhschen Definition würden diese Fälle daher zu den stabilen, nach Anbringung der vorgeschlagenen Modifikation aber zu den instabilen zu rechnen sein. Ob letzteres oder ersteres an sich vorzuziehen sei, bleibe dahin gestellt. Jedenfalls aber wird die exakte Handhabung der Stabilitätsdefinition durch die Forderung *beliebiger* Kleinheit von Störung und Abweichung, d. h. durch die Beschränkung auf *theoretische* Stabilität, erleichtert. Auf die Behandlung der praktisch stabilen, theoretisch labilen Fälle behalten wir uns vor, am Schlusse des Paragraphen zurückzukommen.

Wir erwähnen sogleich noch eine zweite Modifikation, welche wir vorschlagen möchten. Die obige Definition verlangt, dafs die Abweichungen zwischen den Lagen-*Koordinaten* des Systems klein seien (bez. beliebig klein gemacht werden können). Die Auswahl des Koordinatensystems aber ist, zumal vom Standpunkte der allgemeinen Lagrangeschen Mechanik, ganz in unsere Willkür gegeben. Es ist sehr wohl möglich, dafs die Abweichungen zwischen den Lagenkoordinaten bei einer gewissen Wahl des Koordinatensystems im Verlaufe der Bewegung beliebig klein bleiben, bei einer anderen beliebig grofs werden — sofern wir nicht die Wahl des Koordinatensystems gewissen Beschränkungen unterwerfen, auf die wir an dieser Stelle nicht eingehen können. *In der obigen Fassung betrifft also die Stabilitätsdefinition genau genommen eine mechanisch gegenstandslose Eigenschaft der Bewegung, welche vom Koordinatensystem nicht unabhängig ist.*

Es ist leicht diesen Übelstand zu beseitigen. Wir müssen nicht von den *Abweichungen der Lagenkoordinaten*, sondern von den *Abweichungen der Lagen des Systems* sprechen. Diese nennen wir beliebig klein, wenn die Entfernungen der Orte jedes einzelnen Systempunktes bei der einen und bei der anderen Bewegung in entsprechenden Zeitmomenten beliebig klein sind. Die Entfernung zweier Punkte aber ist ein von der Koordinatenauswahl unabhängiger Begriff.

Um auch bei der Gröfsenabschätzung der Störung vom Koordinatensystem unabhängig zu sein, können wir uns den Gesamtimpuls des Systems in die zu jedem einzelnen Massenpunkte gehörigen Einzelimpulse aufgelöst denken, welche jederzeit aus Masse und Geschwindigkeit des Punktes bestimmt werden können. Die Störung wird alsdann beliebig klein heifsen, wenn die Abweichungen zwischen den zu jedem Systempunkte gehörigen Einzelimpulsen im Anfange der ursprünglichen und der gestörten Bewegung unterhalb einer beliebig vorzuschreibenden Grenze liegen.

Daraufhin werden wir die Routhsche Definition der Stabilität

Hosted by Google

folgendermaſsen präzisieren können: *Eine Bewegung heiſse stabil, wenn die aus einer Störung resultierenden Abweichungen zwischen entsprechenden Lagen des Systems dadurch dauernd unter eine gegebene Grenze herabgedrückt werden können, daſs man die Gröſse der Störung unterhalb einer geeignet zu bestimmenden Grenze wählt.*

Wir wollen diese Definition eingehend auf ihre Zweckmäſsigkeit prüfen.

Vom rein logischen Standpunkte aus ist natürlich jede Definition zulässig, welche nicht mit sich selbst im Widerspruch ist und der überhaupt irgendein Objekt in der Wirklichkeit entspricht. Vom naturwissenschaftlichen Standpunkte aus aber müssen wir von einer Stabilitätsdefinition mehr verlangen als ihre bloſse innere oder äuſsere Widerspruchslosigkeit. Allgemein verbindet man nämlich mit dem Worte „instabil“ die Auffassung eines ausnahmsweisen und turbulenten Vorganges. Wir werden daher, um dieser Auffassung gerecht zu werden, von unserer Definition verlangen müssen, daſs keine durchaus reguläre und gewöhnliche Bewegung unter den Begriff der instabilen, keine augenscheinlich irreguläre unter den der stabilen Vorgänge falle.

Es soll nun an einer Reihe von Beispielen gezeigt werden, daſs unter diesem Gesichtspunkte die obige Definition der Stabilität ungeeignet ist. Die betreffenden Beispiele entnehmen wir zum Teil der Theorie des Kreisels, zum Teil den einfachsten Problemen der Punktmechanik.

Betrachten wir zunächst die reguläre Präcession und die benachbarten Bewegungen, wie im § 1 dieses Kapitels. Hier konstatieren wir aus dem Anblick der Fig. 47, daſs die abgeänderte Bahnkurve dauernd in der Nähe der ursprünglichen verläuft; und zwar gilt dieser Sachverhalt für jede beliebige Art der Störung.

Anders liegt die Sache, wenn wir nicht nur die räumliche Gestalt der Bahnkurve, sondern auch, wie es die obige Stabilitätsdefinition verlangt, das Tempo berücksichtigen, in welchem sie von der Kreiselspitze durchlaufen wird. Wir sahen pag. 287, daſs bei der abgeänderten Bewegung die mittlere Winkelgeschwindigkeit

$$\frac{n - Nu_0}{A(1 - u_0^2)}$$

von der Präcessionsgeschwindigkeit

$$\frac{n - Ne}{A(1 - e^2)}$$

bei der ursprünglichen Bewegung im allgemeinen, d. h. immer dann, wenn der Anstoſs nicht gerade die Knotenlinie zur Axe hat, verschieden ist, allerdings um so weniger, je kleiner wir den Anstoſs wählen. Diese


Hosted by Google

Verschiedenheit genügt aber, um im Laufe der Zeit eine endliche Differenz zwischen der Lage der Kreiselspitze in den beiden verglichenen Fällen der Bewegung herbeizuführen Wir können direkt ein (mit abnehmender Störung natürlich wachsendes) Zeitintervall t bestimmen, nach dessen Ablauf die Differenz der ψ-Werte bei unseren beiden Bewegungen beispielsweise größer als $\frac{\pi}{2}$ wird.

Wollten wir dieses vermeiden, so müßten wir den Charakter der Störung der besonderen Bedingung unterwerfen, daß lediglich die $[\Theta]$-Komponente des Impulses bei der Störung alteriert wird. Das wäre aber eine willkürliche Festsetzung, welche in der bisherigen Definition nicht vorgesehen ist.*) Überdies würde auch dann noch die abgeänderte Präcessionsgeschwindigkeit mit der ursprünglichen (vgl. pag. 320) nur bis auf Größen übereinstimmen, welche der zweiten Potenz der Störung $[\Theta_0]$ proportional sind. Bei entsprechender Vergrößerung des Zeitintervalles t können wir auch in diesem Falle eine beliebige endliche Differenz in den gleichzeitigen Werten der ψ-Koordinate bei der ursprünglichen und der abgeänderten Bewegung konstatieren.

Hiernach ist klar, daß nach dem Wortlaut unserer obigen Definition die allereinfachste Bewegung des Kreisels, die reguläre Präcession, als instabil zu bezeichnen wäre.

Entsprechendes gilt in erhöhtem Maße von den allgemeinen Bewegungen des Kreisels. Hier bleibt bei einem hinreichend kleinen Anstoße nicht einmal die Bahnkurve der Kreiselspitze ihrer Gestalt nach dauernd in beliebiger Nähe der ursprünglichen. In der That ändert sich bei einer Abänderung des Impulses im allgemeinen (vgl. die Figuren 29—35 des vorigen Kapitels) auch die Spannweite der Teilbögen, sowie die Zeit, in welcher letztere durchlaufen werden. Allerdings können diese Änderungen beliebig klein gemacht werden, wenn wir die Impulsänderung hinreichend klein wählen. Wenn wir aber nur einen genügend großen Zeitraum in Betracht ziehen, entstehen aus solchen beliebig kleinen Änderungen beliebige endliche Differenzen zwischen entsprechenden Lagen der Kreiselspitze. *Wollten wir also an der obigen Definition festhalten, so müßten wir die sämtlichen Bewegungen des Kreisels schlechtweg für instabil erklären.* Dies trifft insbesondere auch für die aufrechte Bewegung des starken Kreisels zu, wenn wir die Koordinate χ berücksichtigen und eine Abänderung der Impulskomponente N zulassen oder ganz allgemein dann, wenn wir auch

*) In Wirklichkeit wird eine solche Festsetzung bei den englischen Autoren allerdings meist nachträglich eingeführt. Vgl. den folgenden Paragraphen.

Hosted by Google

solche Abweichungen mit in Rechnung setzen, welche der zweiten Potenz der Störung proportional sind (vgl. pag. 320).

Um auch noch ein Beispiel aus der Mechanik des einzelnen Massenpunktes zu nennen, betrachten wir mit Herrn Appell*) die kreisförmige Bewegung eines Massenpunktes in einer festen Ebene unter dem Einflusse einer anziehenden Centralkraft von dem Wirkungsgesetze r^n. Es zeigt sich, daſs bei einer Störung die abgeänderte Bahnkurve *dauernd* dem ursprünglichen Kreise bei hinreichend kleinem Anstoſs beliebig nahe bleibt, falls $n > -3$ ist. Anders die Lage des Punktes auf der Bahnkurve. Diese wird offenbar nur dann für die Dauer der Bewegung wenig geändert werden, wenn der Zusatzstoſs keine Komponente in Richtung der ursprünglichen Bahn hat, wenn also der Zusatzstoſs die Geschwindigkeit des Punktes ungeändert läſst. Hr. Appell sieht sich daher auf Grund der obigen Definition genötigt, die Bewegung des Punktes auch im Falle $n > -3$ für instabil zu erklären.

Die genannten Miſsstände kann man teilweise vermeiden, wenn man prinzipiell nur solche Impulsänderungen zuläſst, welche die Energie des Systems nicht verändern. In dem Werke von Thomson und Tait wird eine derartige Störung als „konservativ“ bezeichnet, und die Beschränkung auf konservative Störungen sogleich in die Stabilitätsdefinition aufgenommen.**) Bei dieser Modifikation des Stabilitätsbegriffes wird in dem zuletzt genannten Beispiele die kreisförmige Bahn im Falle $n > -3$ für stabil zu erklären sein***); überhaupt wird so das Auftreten „säkularer Störungen“, wie man die mit der Zeit wachsenden Abweichungen der abgeänderten von der ursprünglichen Lage nennen kann, in vielen Fällen vermieden (wenigstens insoweit, daſs diese säkularen Glieder nur noch von der Gröſsenordnung der zweiten Potenz der Impulsänderung sind).

Es bleiben aber noch genug andere Übelstände bestehen. Betrachten wir z. B. die kräftefreie Bewegung des einzelnen Massenpunktes nach dem Galileischen Trägheitsgesetze. Werden wir uns entschlieſsen können, diese sozusagen regulärste aller Bewegungen für instabil zu erklären? Nach dem Wortlaute der üblichen Definition müſsten wir es thun. Denn die durch einen Zusatzstoſs abgeänderte Bewegung des Punktes, welche beim Fehlen äuſserer Kräfte wieder eine gleichförmige und geradlinige ist, entfernt sich von der ursprünglichen Bahn mehr und mehr, wie klein wir auch die Störung bemessen mögen.

*) Mécanique rationelle, t. II, art. 458.

**) Natural Philosophy, art. 346, 347.

***) Natural Philosophy, art. 350.

Wir ziehen ferner das interessante Beispiel der geodätischen Linien heran, d. h. der kräftefreien Bahnen eines einzelnen Massenpunktes, welcher gezwungen wird, auf einer irgendwie gekrümmten Fläche zu bleiben. Hier haben wir zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem die Krümmung der Fläche (im Gaussischen Sinne) positiv oder negativ ist. Lassen wir unsern Massenpunkt auf einer Fläche von negativer Krümmung laufen (z. B. auf einem einschaligen Hyperboloid) und erteilen ihm einen kleinen Stoſs, so entfernt sich die so gestörte Bahn von der ursprünglichen immer mehr; wir können keine Grenze angeben, unterhalb deren die Gröſse des Stoſses liegen müſste, damit die Entfernung des Punktes bei der abgeänderten Bewegung von der entsprechenden Lage bei der ursprünglichen Bewegung unter einer vorgegebenen Grenze bleibe. Hiernach müſsten wir alle geodätischen Bahnen auf Flächen negativer Krümmung mit Thomson und Tait*) als instabile Bahnen bezeichnen. Auf den Flächen von positiver Krümmung andrerseits sind geodätische Bahnen, welche im Sinne der obigen Definition stabil zu nennen sind, jedenfalls denkbar. Man zeigt nämlich, daſs, wenn man auf einer solchen Fläche von irgend einem Punkte aus zwei geodätische Linien konstruiert, welche sich in ihrer Anfangsrichtung unendlich wenig unterscheiden, diese sich fortgesetzt schneiden müssen, in Intervallen, die je nach der Gröſse des Krümmungsmaſses verschieden sind. Betrachten wir also eine dieser beiden Linien als die ursprüngliche Bahn unseres Massenpunktes, die andere als die durch eine Störung abgeänderte, so wird die erstere beständig um die letztere *herumoscillieren.* Können wir ferner nachweisen, daſs die Amplitude der Oscillationen mit wachsender Zeit nicht systematisch zunimmt, so werden wir bei Beschränkung auf konservative Störungen die Bahnkurve auch nach der obigen Definition für stabil erklären können.**)

Alles in allem werden wir aber sagen müssen: *Die obige Stabilitätsdefinition, nach welcher eine dauernde Kleinheit der Abweichungen verlangt wird, ist zu eng. Sie verweist unter anderem die allereinfachsten*

*) l. c. art. 355, wo man auch die äuſserst einfachen Beweise der im Text genannten Sätze über geodätische Linien nachlesen wolle.

**) Thomson und Tait, l. c., art. 355. Der Schluſs auf die (im Sinne der Autoren gemeinte) Stabilität der Bahnkurve ohne vorherige Untersuchung der Oscillationsamplitude scheint allerdings voreilig. In der That sind z. B. auf dem Rotationsellipsoid die Meridiane im Thomsonschen Sinne instabile Bahnen: Bei Hinzufügung eines seitlichen Anstoſses gehen sie in ungeschlossene Kurven über, welche abwechselnd einen in der Nähe des Nordpols und einen in der Nähe des Südpols gelegenen Parallelkreis berühren und das Ellipsoid mit einer von 2π verschiedenen Spannweite umschlingen. Verfolgen wir eine solche Kurve weit genug, so entfernt sie sich von dem ursprünglichen Meridiane mehr und mehr.

Hosted by Google

und regulärsten Bewegungen (Galileische Trägheitsbewegung!) in die Klasse der instabilen Bewegungen, was der natürlichen Auffassung des Wortes widerspricht.

Man könnte versuchen, die obige Definition im wesentlichen beizubehalten und sie nur darin abzuändern, daſs man die Kleinheit der Abweichungen nicht für jeden beliebigen, sondern für einen begrenzten Zeitraum fordert. Man würde dann die Stabilität durch folgendes Postulat definieren:

Es soll möglich sein, die Störung so klein zu wählen, daſs für einen gegebenen Zeitraum $t < T$ die Abweichungen zwischen entsprechenden Lagen des Systems bei der ursprünglichen und der abgeänderten Bewegung unterhalb einer vorgegebenen Grenze bleiben.

Auf Grund dieser Definition würde die Galileische Trägheitsbewegung, die geodätischen Bahnen auf dem Hyperboloid, die allgemeine Kreiselbewegung u. s. w. sofort in die Kategorie der stabilen Bahnen einrücken. Es würden sich aber Übelstände anderer Art ergeben. Es würden nämlich Bewegungen von so zweifellos irregulärem Charakter wie die aufrechte Rotation des schwachen Kreisels für stabil erklärt werden müssen.

Rufen wir uns zunächst das Verhalten des schwachen Kreisels im Grenzfalle eines unendlich abnehmenden Anstoſses ($\lim [\Theta_0] = 0$) ins Gedächtnis zurück. Unsere frühere Untersuchung zeigte, daſs die Kreiselspitze in diesem Grenzfalle allerdings nicht in beliebiger Nähe des Nordpols bleibt, daſs aber ihre Geschwindigkeit im Nordpole selbst gleich Null ist. Und zwar wurde die Zeit ω, während welcher die Kreiselspitze in Fig. 58 von einem beliebigen Punkte der Spirale bis in den Nordpol gelangt, unendlich groſs.

Hiernach übersieht man das Verhalten der Kreiselspitze bei einem von Null verschiedenen aber auſserordentlich kleinen Anstoſse $[\Theta_0]$.

Die Bahnkurve ist dann keine Spirale, aber sie wird den Nordpol immerhin noch einige Male in nächster Nähe umkreisen; die Geschwindigkeit ϑ', mit welcher sie aus dem Nordpole herausrückt, ist nicht gleich Null, aber immerhin auſserordentlich klein.

Sicherlich können wir nun für den Anstoſs $[\Theta_0]$ eine obere Grenze so festsetzen, daſs bei jedem kleineren Anstoſse für jede Zeit $t < T$ (T etwa gleich einem Jahre) die Abweichung der Lagenkoordinate ϑ in der abgeänderten und der ursprünglichen Bewegung kleiner als ε (ε etwa gleich einer Bogensekunde) wird.

Mit anderen Worten: *Die Bewegung des aufrechten schwachen Kreisels wäre bei Zugrundelegung unserer jetzigen Definition stabil!*

Ähnliche Betrachtungen lieſsen sich in dem gleichfalls allgemein

Hosted by Google

als instabil anerkannten Falle der Rotation des unsymmetrischen schwerelosen Kreisels um seine mittlere Hauptträgheitsaxe anstellen. Auch hier wird die Geschwindigkeit, mit der die Rotationsaxe bei einem zu Null abnehmenden Anstoſse die mittlere Hauptträgheitsaxe verläſst, in der Grenze gleich Null. Für eine begrenzte Zeit $t < T$ bleibt daher die abgeänderte Bewegung bei geeigneter Wahl des Anstoſses auch hier in beliebiger Nähe der ursprünglichen.

Wir schlieſsen hieraus: *Unsere jetzige Stabilitätsdefinition, nach welcher die Kleinheit der Abweichung uur für einen begrenzten Zeitraum verlangt wird, ist zu weit. Sie läſst Bewegungen als stabil passieren, die wir vernünftiger Weise durchaus als labil ansehen müssen.*

Wir sind somit in ein eigentümliches Dilemma geraten, dem wir nur dadurch entgehen können, daſs wir unsere früher bereits mehrfach in Anwendung gebrachte Stabilitätsdefinition wieder aufnehmen. Wir wollten eine Bewegung stabil nennen, wenn zwischen ihr und der durch einen beliebigen Anstoſs abgeänderten Bewegung ein *stetiger Übergang* möglich ist. Es kommt nur darauf an, diesen etwas unbestimmt gehaltenen Stetigkeitsbegriff näher zu präzisieren und durch ein analytisches Kriterium zu kennzeichnen. Wir wollen zu dem Zwecke folgendermaſsen verfahren: Wir ändern die fragliche Bewegung durch einen endlichen Anstoſs von beliebigem Charakter ab. Alsdann lassen wir die Gröſse des Anstoſses zu Null abnehmen und suchen die Grenze auf, der die abgeänderte Bewegung hierbei zustrebt. *Wenn diese Grenze existiert und mit der vorgelegten Bewegung übereinstimmt, nennen wir den Übergang zwischen der ursprünglichen und der abgeänderten Bewegung einen stetigen.*

Unsere endgültige Stabilitätsdefinition, ausgesprochen für ein beliebiges mechanisches System, wird daraufhin folgendermaſsen lauten:

Eine Bewegung soll stabil heiſsen, wenn sie übereinstimmt mit dem Limes, welchem die aus einer beliebigen Impuls-Änderung resultierende Bewegung bei nach Null abnehmender Gröſse dieser Änderung zustrebt. Dagegen soll sie labil genannt werden, wenn sie von dem so erhaltenen Limes verschieden ist, oder wenn bei verschiedenen Arten der Impulsänderung verschiedene Limites herauskommen oder wenn ein Limes überhaupt nicht existiert.

Offenbar wird nach dieser Definition beispielsweise die reguläre Präcession, die allgemeine Bewegung des Kreisels, bei welcher die Bahnkurve zwischen zwei Parallelkreisen hin und her läuft, die Galileische Trägheitsbahn u. s. w. zu den stabilen Bewegungen, die aufrechte Bewegung des schwachen Kreisels, die Rotation des dreiaxigen Körpers um die mittlere Hauptträgheitsaxe u. s. w., wie billig, zu den labilen

Hosted by Google

Bewegungen zu rechnen sein. In der That sahen wir z. B. bei dem aufrechten schwachen Kreisel, daſs bei zu Null abnehmendem Werte des Anstoſses $[\Theta_0]$ eine ganz bestimmte Bewegung (von spiraliger Bahnkurve) übrig blieb, welche von der einfachen Rotation um die Vertikale verschieden war. Was die geodätischen Bahnen auf dem Rotationshyperboloid betrifft, so würden diese im allgemeinen stabil sein mit Ausnahme des Kehlkreises, welcher instabil ist und eine asymptotische Lösung darstellt, wie wir nicht näher ausführen wollen.

Ein weiterer Punkt, in dem unsere Stabilitätsdefinition der sonst üblichen ersichtlich überlegen ist, verdient besonders hervorgehoben zu werden. Wenn man die Stabilität der Bewegungen im gewöhnlichen Sinne aus der Kleinheit der Abweichung beurteilt, welche aus einer kleinen Störung resultiert, und wenn man diese Abweichung durch Näherungsformeln darstellt, so vernachlässigt man (vgl. pag. 320) gewöhnlich alle diejenigen Glieder, welche wie die zweite oder eine höhere Potenz der Störung verschwinden. Ist die betreffende Vernachlässigung aber in einem säkularen (etwa mit t multiplizierten) Terme vorgenommen, so wächst die hierdurch bedingte Ungenauigkeit der Näherungsformel mit der Zeit immer mehr an; während also die Näherungsformel auf eine dauernd kleine Abweichung schlieſsen läſst, kann es vorkommen, daſs in Wirklichkeit die Abweichung zwischen der gestörten und der ursprünglichen Bewegung jeden beliebigen Betrag erreicht. In diesem Falle würde eine Bewegung nach der gewöhnlichen Methode stabil erscheinen, während doch bei einer Störung mit der Zeit endliche Abweichungen auftreten. Dagegen ist die Handhabung unserer definitiven Stabilitätsdefinition von solchen Schwierigkeiten gänzlich frei. Bei uns handelt es sich nicht um Abweichungen erster oder zweiter Ordnung, sondern um direkte *Gleichheit* zwischen der ursprünglichen und dem Limes der gestörten Bewegung. Diese Gleichheit läſst sich aber nicht nur mit gröſserer Schärfe, sondern auch mit gröſserer Leichtigkeit beurteilen, wie die Kleinheit der Abweichung bei der gewöhnlichen Definition.

Wir können unsere neue Definition auch dadurch empfehlen, daſs wir zeigen: *Im Falle des Gleichgewichts, wo die Begriffe stabil und labil seit langem feststehen, deckt sie sich mit der allgemein acceptierten Bedeutung dieser Worte.* Es genüge in der Hinsicht ein einfaches Beispiel. Ein schwerer Massenpunkt auf der Kugeloberfläche befindet sich im obersten Punkte (Nordpol) im labilen, im untersten (Südpol) im stabilen Gleichgewicht. Dies folgt aus unserer Definition der Stabilitätsverhältnisse der Bewegung, von denen die der Ruhe ein spezieller Fall sind, und stimmt mit der gewöhnlichen Auffassung überein. Geben



wir nämlich dem im Nordpole befindlichen Punkte einen Stofs, so beschreibt er einen gröfsten Kreis auf der Kugel; lassen wir die Gröfse des Stofses immer mehr zu Null abnehmen, so bleibt die Bahn des Punktes die frühere, nur die Geschwindigkeit nimmt ab; im Nordpole wird sie in der Grenze gleich Null, in allen übrigen Punkten des gröfsten Kreises bleibt sie von Null verschieden. Der Limes ist hier also eine bestimmte wohldefinierte Bewegung, welche von dem ursprünglichen Ruhezustande verschieden ist. Übrigens ergiebt sich je nach der Richtung des Anstofses ein anderer Limes. Lassen wir dagegen auf den im Südpole ruhenden Punkt einen Anstofs wirken, so pendelt der Punkt auf einem gröfsten Kreise hin und her, wobei die Gröfse des Ausschlages von der Gröfse des Anstofses abhängt und mit diesem zu Null abnimmt. Der Limes, von dem unsere Definition spricht, ist hier also die ursprüngliche Ruhelage selbst.

Wir könnten schliefslich noch einen auf der Kugel ruhenden *schwerelosen* Massenpunkt betrachten. Stofsen wir diesen an, so beschreibt er einen gröfsten Kreis mit konstanter Geschwindigkeit; lassen wir die Gröfse des Stofses Null werden, so wird auch die Geschwindigkeit in jedem Punkte der Bahn gleich Null. Man könnte im Zweifel sein, ob man den so erhaltenen Limes als Ruhe oder als Bewegung bezeichnen soll. Jedenfalls wird man sagen müssen, dafs ein bestimmter Limes nicht existiert, da die Lage des gröfsten Kreises von der Richtung des Anstofses abhängt. Für solche Fälle scheint die wohl auch sonst angewandte Bezeichnung des „indifferenten Gleichgewichtes“ passend.

Wir wollen keineswegs leugnen, dafs nicht auch der zu Anfang dieses Paragraphen aufgestellte Stabilitätsbegriff, zumal wenn er durch die Einschränkung auf konservative Anstöfse verbessert ist, der Untersuchung würdig wäre. Wir möchten nur in dem dort definierten Falle nicht von Stabilität schlechtweg, sondern etwa von *absoluter Stabilität* sprechen. Also:

Wenn eine Bewegung so beschaffen ist, dafs sie bei einer hinreichend kleinen konservativen Änderung der Impulskoordinaten in eine Bewegung übergeht, in welcher die Lagen des Systems den entsprechenden Lagen in der ursprünglichen Bewegung dauernd beliebig nahe bleiben, so nennen wir die Bewegung absolut stabil. Dafs eine solche Bewegung auch unserer definitiven Stabilitätserklärung genügt, ist selbstverständlich. Die pag. 347 genannte Kreisbahn ist unter der angegebenen Bedingung $n > -3$ in diesem Sinne absolut stabil. Dabei müssen wir allerdings wiederholt bemerken, dafs die in der Litteratur (z. B. bei Routh sowie bei Thomson und Tait) gewöhnlich eingeschlagene Untersuchungsmethode, nach welcher die absolute Stabilität ans den Gliedern erster Ordnung unter

Vernachlässigung der höheren Glieder erschlossen wird, von unserem Standpunkte aus unvollständig ist. Nach der vorstehenden Definition können wir eine Bewegung nur dann absolut stabil nennen, wenn die abgeänderte Bewegung nicht nur in den Gliedern erster Ordnung, sondern schlechtweg der ursprünglichen dauernd beliebig benachbart bleibt.

Wir können noch eine Reihe anderer Unterscheidungen treffen. Wenn wir den Ton darauf legen wollen, daſs bei Abänderung einer stabilen Bewegung das System nach gewissen Zeitintervallen in dieselben Lagen kommt, wie bei der ursprünglichen, so können wir die Bewegung *oscillierend stabil* nennen. Der Gegensatz hiervon wäre *divergierend stabil*. Die geodätischen Bahnen auf den Flächen positiver Krümmung sind, soweit sie überhaupt stabil sind, allemal oscillierend, die auf den negativ gekrümmten Flächen divergierend stabil. Die Galileische Trägheitsbahn liefert ein weiteres Beispiel von divergierender Stabilität. Daſs absolute und oscillierende Stabilität nicht zusammenzufallen brauchen, kann an dem Beispiel der geodätischen Linien auf dem Ellipsoid gezeigt werden (vgl. die Anm. auf pag. 348).

Ferner können wir noch unterscheiden zwischen *partieller* und *totaler Stabilität*. Von partieller Stabilität würden wir sprechen, wenn unser Stabilitätskriterium nur für gewisse Anstöſse, von totaler dann, wenn es schlechtweg, d. h. für alle möglichen Anstöſse erfüllt ist. Unsere bisherige Stabilitätsdefinition bezog sich hiernach auf totale Stabilität. Beschränken wir uns dagegen mit Thomson und Tait auf konservative Anstöſse, so fragen wir nach einer Art partieller Stabilität. Auch sonst interessiert man sich in der Litteratur, wie wir im folgenden Paragraphen sehen werden, zumal im Falle der sogenannten cyklischen Systeme, meist nur für partielle Stabilität.

Endlich wollen wir noch einmal den Gegensatz zwischen *theoretischer und praktischer Stabilität und Labilität* betonen. Unsere bisherigen Entwickelungen in diesem Paragraphen bezogen sich sämtlich auf theoretische Stabilität. Es kann aber, wie wir schon im vorigen Paragraphen sahen, vorkommen, daſs eine Bewegung unserem Stabilitätskriterium nicht genügt, daſs sie aber doch für praktische Zwecke so gut wie stabil ist. Dies wird eintreten, wenn der in Frage kommende Limes von der ursprünglichen Bewegung zwar verschieden, aber nur so wenig verschieden ist, daſs er nahezu mit jener zusammenfällt.

Das Umgekehrte wird der Fall sein, wenn der Limes der abgeänderten Bewegung allerdings mit der ursprünglichen identisch ist, wenn aber selbst kurz vor dem Grenzübergange, d. h. bei schon sehr klein gewordenen Werten der Impulskoordinatenänderungen die abgeänderte Bewegung noch wesentlich von der ungestörten differiert. Ein

Hosted by Google

Beispiel für ein in diesem Sinne *praktisch labiles, theoretisch stabiles Gleichgewicht* liefert ein Massenpunkt, der sich reibungslos in einer sehr kleinen Mulde auf der Spitze eines Berges befindet. Ein *theoretisch labiles und praktisch stabiles Gleichgewicht* stellt ein Punkt dar, der auf einer geringfügigen Erhöhung im Boden eines Thales liegt.

Wir wollen zum Schlusse bemerken, daſs man unsere Stabilitätsdefinition, wenn man will, in der Weise modifizieren könnte, daſs man auſser den Impuls- auch die Lagenkoordinaten bez. daſs man statt der Impuls- die Lagen- und Geschwindigkeitskoordinaten des Systems einer kleinen Änderung unterzieht, wie solches bei den Gleichgewichtsuntersuchungen in der That häufig geschieht. Indessen scheint diese Modifikation keine erheblichen Konsequenzen zu haben. Überdies dürfte unsere Abänderung der Impulskoordinaten am besten dem physikalischen Begriffe einer Störung entsprechen und dürfte den Vorzug verdienen vor einer Abänderung der Geschwindigkeitskoordinaten, welche zwar formal-mathematisch jener gleichwertig aber ihrem physikalischen Sinne nach weniger zweckentsprechend sein würde wie jene.

§ 7. Energiekriterien für die Stabilität des Gleichgewichtes und der Bewegung.

Die Handhabung unserer Stabilitätsdefinition des vorigen Paragraphen setzt die Kenntnis der Bahnkurven im allgemeinen und namentlich die Kenntnis desjenigen Limes voraus, dem die Bewegung bei verschwindender Störung zustrebt. Die Entscheidung, ob eine Bewegung stabil oder labil sei, ist hiernach ziemlich mühevoll. Man wird wünschen, diese Entscheidung zu vereinfachen und wird namentlich nach Kriterien suchen, welche ohne Kenntnis der allgemeinen Bewegung, also ohne Integration der mechanischen Differentialgleichungen, zum Ziele führen. Wir werden in dieser Hinsicht kaum etwas Neues zu bringen haben; unsere Aufgabe soll vielmehr wesentlich kritischer Natur sein. Wir beabsichtigen namentlich im folgenden Paragraphen zu zeigen, daſs das gangbarste Kriterium, welches aus der sogenannten Methode der kleinen Schwingungen folgt, zu mancherlei Einwänden Anlaſs giebt.

Als Vorbild für die zunächst anzustellende Untersuchung muſs das bekannte *Kriterium für die Stabilität des Gleichgewichtes* dienen, welches von Lagrange zuerst ausgesprochen und von Dirichlet in einer kurzen aber bedeutungsvollen Arbeit*) genau formuliert und bewiesen ist. Dirichlet betrachtet ein beliebiges mechanisches System, dessen Ver-

*) Crelles Journal, Bd. 32, pag. 85—88, 1846.

Hosted by Google

bindungen von der Zeit unabhängig sind, und welches lediglich „konservativen Kräften“ unterworfen ist, d. h. solchen Kräften, deren Arbeit durch eine Funktion der Koordinaten, den negativ genommenen Wert der potentiellen Energie V, dargestellt werden kann. Für ein solches System gilt der Satz der lebendigen Kraft in der Form

$$T + V = h.$$

Das Resultat der Dirichletschen Untersuchung lautet nun bekanntlich so: *Das Gleichgewicht ist sicher stabil, wenn in der fraglichen Gleichgewichtslage V ein wirkliches Minimum ist.*

Den Beweis führen wir mit Rücksicht auf die sogleich zu nennende Verallgemeinerung des Kriteriums etwas abweichend von Dirichlet folgendermaſsen:

In der Gleichgewichtslage ist $T = 0$; der Wert von V kann, da er nur bis auf eine additive Konstante definiert ist, ebenfalls gleich Null gesetzt werden; also wird in der Gleichgewichtslage auch $h = 0$. Ist nun V ein wirkliches Minimum, so können wir solche Grenzen für die die Lage des Systems bestimmenden Koordinaten angeben, daſs V gröſser als eine (genügend klein zu wählende) positive Gröſse k ausfällt, sobald eine oder mehrere der Lagenkoordinaten einem oder mehreren der genannten Grenzwerte gleich werden, und gleichzeitig die Werte der übrigen Lagenkoordinaten innerhalb dieser Grenzen verbleiben. Um uns kurz ausdrücken zu können, wollen wir von der Gesamtheit der Wertsysteme unserer Lagenkoordinaten, welche innerhalb der genannten Grenzen liegen, als von einem „Gebiet“ sprechen und wollen diejenigen Koordinaten-Wertsysteme, in denen mindestens eine Koordinate mit einem der für diese Koordinate aufgestellten Grenzwerte übereinstimmt, als „Begrenzung des Gebietes“ bezeichnen. Dann haben wir auf der Begrenzung unseres Gebietes

$$V > k.$$

Um so mehr wird also, weil T notwendig positiv ist,

$$T + V > k, \tag{1}$$

und zwar unabhängig von den Werten, die wir den in T eingehenden Geschwindigkeitskoordinaten beilegen mögen.

Wir erteilen nun dem System eine Störung. Für die so entstehende Bewegung gilt wieder der Satz der lebendigen Kraft. Die Störung können wir so klein bemessen, daſs die Konstante der lebendigen Kraft $h < k$ wird. Für die gestörte Bewegung gilt also

$$T + V < k. \tag{2}$$

Es ist nun klar, daſs diese Bewegung ganz und dauernd innerhalb des vorher angegebenen Gebietes verläuft. Im entgegengesetzten Falle

Hosted by Google

würde es nämlich einmal eintreten, dafs eine Lagenkoordinate (oder eventuell mehrere gleichzeitig) die oben angegebenen Grenzen erreichte, während die übrigen Lagenkoordinaten noch solche Werte besäfsen, die dem Innern des Gebietes angehörten. In diesem Augenblicke müfste aber die Ungleichung (1) gelten, welche mit der gleichzeitig geltenden Ungleichung (2) unvereinbar ist.

Die Grenzen des Gebietes können nun beliebig verengert und die vorstehenden Schlüsse, bei entsprechender Verkleinerung der Störung, wiederholt werden.

Hiernach bleibt das System bei der abgeänderten Bewegung dauernd in einer beliebig engen Nachbarschaft der ursprünglichen Gleichgewichtslage. Letztere ist also nach unserer sowie nach jeder sonstigen Definition des Wortes sicher stabil.

Das somit bewiesene Kriterium *reicht* hiernach *hin*, um die Stabilität des Gleichgewichtes zu garantieren. Es entsteht aber weiter die Frage, ob die Forderung dieses Kriteriums auch *notwendig* ist, oder anders ausgedrückt, ob sich der Lagrange-Dirichletsche Satz in dem Sinne umkehren läfst, dafs beim Nichtvorhandensein eines Minimums (oder vielleicht nur beim Vorhandensein eines Maximums) das Gleichgewicht sicher instabil ist. Hierüber giebt es noch keine abschliefsenden Resultate. Wenigstens können die Herren Liapounoff und Hadamard in ihren einschlägigen Arbeiten*) die Umkehrung des in Rede stehenden Satzes nur unter spezielleren Voraussetzungen über die Beschaffenheit von V aussprechen (z. B. unter der Voraussetzung, dafs sich in der Potenzentwicklung von V das Nichtvorhandensein eines Minimums an den quadratischen Gliedern oder das Vorhandensein eines Maximums an den Gliedern niedrigster Ordnung erkennen läfst).

Wir kommen nun zu einer interessanten Übertragung des vorhergehenden „Energiekriteriums" („energy test of stability") von dem Falle des Gleichgewichtes auf den der Bewegung. Diese Übertragung ist von Routh**) geleistet worden.

Wir gehen mit Routh ebenso wie bei dem Gleichgewichtskriterium (unter den oben angegebenen Voraussetzungen über die Beschaffenheit der Verbindungen des Systems und der auf das System wirkenden Kräfte) von dem Energieausdrucke

---

*) Vgl. Liapounoff, Journal de Liouville, sér. V, t. 3 (Sur la stabilité de l'équilibre), wo weitere Litteraturangaben über die Arbeiten des Verf. zu finden sind, und Hadamard, ebendaselbst (Sur certaines trajectoires en dynamique); vgl. speziell pag. 365.

**) Vgl. Rigid dynamics, Part. II, Cap. III, art. 95 u. ff. Stability of motion, Cap. VI, art. 1—3.

Hosted by Google

$$T + V = h$$

aus. Die linke Seite, die Gesamtenergie des Systems, ist eine bekannte Funktion der Lagen- und Geschwindigkeitskoordinaten, welche für alle Stadien der vorgelegten Bewegung den konstanten, gleichfalls bekannten numerischen Wert h besitzt. Man kann nun zeigen, daſs, wenn die Gesamtenergie für die vorgelegte Bewegung ein Extrem (d. h. ein Maximum oder Minimum) bezüglich der sämtlichen darin vorkommenden Lagen- und Geschwindigkeitskoordinaten ist, die vorgelegte Bewegung absolut stabil sein muſs.

Allerdings kann in der Weise, wie es hier zunächst ausgedrückt ist, die Sache gar nicht eintreten. Betrachten wir nämlich insbesondere die Abhängigkeit der Gesamtenergie von den Geschwindigkeitskoordinaten. Da die lebendige Kraft eine positive quadratische Funktion der Geschwindigkeitskoordinaten darstellt, wird sie im allgemeinen wachsen mit wachsenden, abnehmen mit abnehmenden Werten der Geschwindigkeitskoordinaten. Soll aber die Gesamtenergie ein wirkliches Extrem sein, so müſste T bei Vermehrung oder Verminderung der Geschwindigkeitskoordinaten entweder nur wachsen oder nur abnehmen.

Infolgedessen sieht man sich mit Routh genötigt, die Stabilitätsfrage spezieller zu stellen. Man wird, um aus dem Energiekriterium einen wirklichen Nutzen ziehen zu können, nicht nach der totalen, sondern der partiellen Stabilität irgendwelcher Art fragen (vgl. den Schluſs des vorigen Paragraphen). Man wird also von den Anfangswerten der Impulskoordinaten einzelne (wir wollen sie $N, n, \ldots.$ nennen) festhalten und den Anstoſs so einrichten, daſs er nur eine Veränderung der übrigbleibenden Impulskoordinaten bewirkt. Überdies wollen wir der Einfachheit halber voraussetzen, daſs diese Impulskoordinaten $N, n, \ldots,$ wie unten im Falle des Kreisels, auch im Verlaufe der Bewegung konstant bleiben, so daſs wir im Folgenden von den „Impulskonstanten" $N, n, \ldots.$ reden werden.

Die Impulskoordinaten sind aber, wie später allgemein gezeigt werden wird, einfache (und zwar lineare) Funktionen der Geschwindigkeitskoordinaten, wobei noch die Lagenkoordinaten in die Koeffizienten eingehen können. Bezeichnen wir die Geschwindigkeitskoordinaten mit $\vartheta', \varphi', \ldots,$ so haben wir demnach Gleichungen der folgenden Gestalt:

$$(3) \qquad f_1(\vartheta', \varphi', \ldots) = N, \quad f_2(\vartheta', \varphi', \ldots) = n, \ldots,$$

welche ebensowohl für die ursprüngliche, wie für die abgeänderte Bewegung gelten. (Routh betrachtet übrigens allgemeiner statt solcher Impulsgleichungen irgendwelche „erste Integralgleichungen" des Problems, deren linke Seiten ein Aggregat der Lagen- und Geschwindigkeitskoordi-

Hosted by Google

naten und deren rechte Seiten Konstante sind. Der Anstoſs müſste dann so gewählt werden, daſs die Konstanten der rechten Seiten durch ihn nicht geändert werden.)

Daraufhin werden wir aus dem Ausdrucke der Gesamtenergie so viele Geschwindigkeitskoordinaten eliminieren können, als wir Bedingungsgleichungen der vorstehenden Form haben, wobei die Impulskonstanten $N, n, \ldots$ (bez. die Integrationskonstanten $N, n, \ldots$) in den Energieausdruck eingehen werden. Die Forderung, daſs der so entstehende Energieausdruck ein wirkliches Extrem bezüglich der sämtlichen explizite in ihm enthaltenen Lagen- und Geschwindigkeitskoordinaten darstelle, besagt ersichtlich weniger, als die frühere Forderung, daſs er ein Extrem schlechtweg (bezüglich aller Koordinaten) sei. Wir werden sogleich sehen, daſs unsere jetzige Forderung thatsächlich beispielsweise bei gewissen Kreiselbewegungen erfüllt ist.

Dies vorausgeschickt, sprechen wir das Routhsche Energiekriterium, wie folgt, aus:

Die vorgelegte Bewegung ist in sämtlichen nicht eliminierten Lagen- und Geschwindigkeitskoordinaten absolut stabil, wenn der Energieausdruck nach erfolgter Elimination ein wirkliches Extrem bezüglich eben dieser Lagen- und Geschwindigkeitskoordinaten ist, und zwar partiell stabil gegenüber allen solchen Störungen, welche die in den Energieausdruck eingeführten Konstanten $N, n, \ldots$ ungeändert lassen.

Der Beweis gestaltet sich ähnlich wie im Falle des Gleichgewichtes: Wenn $T + V$ für die vorgelegte Bewegung ein wirkliches Minimum ist (der Fall des Maximums ist ähnlich zu behandeln), so können wir solche positive und negative Inkremente für jede einzelne der nichteliminierten Lagen- und Geschwindigkeitskoordinaten angeben, daſs der jeweilige Wert von $T + V$ vergröſsert wird, sobald wir mindestens einer der Lagen- oder Geschwindigkeitskoordinaten eins der bez. Inkremente erteilen, während gleichzeitig die übrigen Koordinaten ungeändert bleiben oder doch nur um weniger als die festgesetzten Inkremente abgeändert werden. Und zwar möge die so entstehende Vermehrung von $T + V$ in jedem Augenblicke der Bewegung gröſser werden als die positive (genügend klein zu wählende) Gröſse k:

$$T + V > h + k, \tag{1'}$$

Für die durch eine einmalige Störung abgeänderte Bewegung besteht gleichfalls der Satz von der lebendigen Kraft. Die Störung kann so klein gewählt werden, daſs der ursprüngliche Wert von h um weniger als k vermehrt wird. Wir haben also längs der ganzen abgeänderten Bewegung

$$T + V < h + k. \tag{2'}$$

Hosted by Google

Dabei setzen wir eine partielle Störung voraus, welche die Werte der Konstanten $N, n, \ldots$ ungeändert läſst.

Aus (1′) und (2′) schlieſst man wie oben, daſs die Differenzen zwischen den Koordinaten bei der ursprünglichen und der abgeänderten Bewegung niemals die Gröſse der vorher festgesetzten Inkremente erreichen können. Da diese Inkremente aber selbst beliebig klein gewählt werden können, so folgt unmittelbar die absolute Stabilität der vorgelegten Bewegung in Bezug auf alle nicht eliminierten Koordinaten.

Zunächst soll die Forderung des Routhschen Kriteriums noch etwas schärfer präzisiert werden. Es genügt eigentlich nicht, zu verlangen, daſs die Energiefunktion $T + V$ ein Extrem schlechtweg sei. Beim Beweise wurde vielmehr vorausgesetzt, *daſs sich für alle Werte der Zeit oder, was dasselbe bedeutet, für alle Stellen der ursprünglichen Bahn ein und dieselbe positive (bez. negative) Zahl k angeben läſst,* oberhalb (bez. unterhalb) deren die Änderung der Energiefunktion bei Vermehrung eines oder mehrer ihrer Argumente um gewisse von Null verschiedene Zuwächse liegt. Die letztere Forderung besagt mehr als die Forderung, daſs $T + V$ an jeder einzelnen Stelle ein Extrem sein solle. Es könnte z. B. sehr gut sein, daſs wir für jeden Wert von t eine Zahl k von der genannten Beschaffenheit angeben können, daſs aber dieser Wert bei wachsendem t immer kleiner (bez. gröſser) wird und in der Grenze $t = \infty$ von Null nicht mehr verschieden ist. Wir wollen ein solches Extrem, wie es beim Beweise des Routhschen Satzes vorausgesetzt wird, im Anschluſs an eine in der Funktionentheorie übliche Bezeichnung ein *gleichmäſsiges Extrem* nennen, wobei sich das Wort „gleichmäſsig“ auf die Abhängigkeit der Energiefunktion von der Zeit bezieht und nichts anderes besagen soll, als daſs die von Null verschiedene Zahl k unabhängig von den Werten der Zeit fixiert werden kann. Hiernach würde das Routhsche Kriterium genauer so auszusprechen sein: *Die Bewegung ist sicher absolut stabil, wenn die Energiefunktion ein Extrem bezüglich ihrer sämtlichen Argumente, der Lagen- und Geschwindigkeitskoordinaten ist, und zwar gleichmäſsig für alle Werte von t.*

Der Zusammenhang dieses Bewegungskriteriums mit dem vorangehenden Gleichgewichtskriterium ist klar. Wenn V ein Minimum bezüglich der sämtlichen Lagenkoordinaten ist, so ist auch $T + V$ in der Gleichgewichtslage $T = 0$ ein Minimum bezüglich der sämtlichen Lagen- und Geschwindigkeitskoordinaten. Wenn umgekehrt $T + V$ ein Minimum bezüglich der sämtlichen Lagen- und Geschwindigkeitskoordinaten ist, so braucht man nur die sämtlichen Geschwindigkeitskoordinaten gleich Null zu setzen, um zu sehen, daſs gleichzeitig auch V ein

Minimum bezüglich sämtlicher Lagenkoordinaten sein mufs. *Im Falle des Gleichgewichtes geht also das Routhsche Kriterium, soweit es sich auf ein Minimum von $T + V$ bezieht, in das Lagrange-Dirichletsche Kriterium über und umgekehrt.* Eine Spezialisierung des Anstofses, wie sie oben durch die Gleichungen (3) vorgesehen wurde, wird dabei in diesem besonderen Falle überflüssig.

Die andere Aussage des Routhschen Satzes, wonach die Bewegung auch absolut stabil ist, wenn $T + V$ ein Maximum für diese Bewegung darstellt, kommt im Falle des Gleichgewichtes offenbar nicht in Frage. Da nämlich im Falle des Gleichgewichtes T sicherlich ein Minimum ist, so kann $T + V$ kein Maximum sein. In der That wächst ja T und auch $T + V$, wenn wir beispielsweise die Werte der Lagenkoordinaten festhalten, die der Geschwindigkeitskoordinaten aber irgendwie verändern.

Natürlich wird die Handhabung des Routhschen Bewegungskriteriums weniger bequem und seine Tragweite weniger umfassend, wie die des Gleichgewichtskriteriums, weil wir bei ersterem mehr über den Charakter der Bewegung voraussetzen müssen, wie bei letzterem über den des Gleichgewichtes und weil wir das Auftreten eines extremen Energiewertes bei der Bewegung überhaupt nur sozusagen durch eine Beschränkung der Beweglichkeit des Systems im Sinne der Gleichungen (3) erreichen können. In der That, wenn wir mit Routh verlangen, dafs die Gesamtenergie ein Extrem nicht nur bezüglich der Lagenkoordinaten, sondern auch noch bezüglich einer Anzahl (nicht eliminierter) Geschwindigkeitskoordinaten sein soll, so stellen wir gegenüber dem Gleichgewichtsfalle so viel Bedingungen mehr, als die Anzahl der nichteliminierten Geschwindigkeitskoordinaten beträgt. Es kommt noch bei genauer Formulierung des Bewegungskriteriums der lästige Zusatz der Gleichmäfsigkeit des Extrems für alle Werte von t hinzu, ein Zusatz, welcher bei dem Gleichgewichtskriterium ersichtlich von selbst überflüssig wird.

Dementsprechend wird das Anwendungsgebiet des Routhschen Kriteriums ziemlich beschränkt. Die Beispiele, die Routh l. c. giebt, unterscheiden sich nach erfolgter Elimination eigentlich nicht mehr wesentlich von Gleichgewichtsproblemen. Die Bewegung, deren Stabilität untersucht werden soll, wird nämlich meist so gewählt, dafs sie durch Nullsetzen aller im Energieausdrucke explicite vorkommenden Geschwindigkeitskoordinaten charakterisiert werden kann.*) In diesem

*) Es gehören hierher namentlich die sogenannten cyklischen Bewegungen, über welche wir uns später verbreiten werden.

Hosted by Google

Falle ist der Ausdruck der lebendigen Kraft, was die Geschwindigkeitskoordinaten angeht, gerade so wie im Gleichgewichtsfalle, von selbst ein Minimum. Es bleibt nur noch übrig den Energieausdruck auch bezüglich der Lagenkoordinaten auf seine Extremeigenschaft hin zu untersuchen, was dann nicht mehr Schwierigkeit macht, wie die Untersuchung der potentiellen Energie im Falle des Gleichgewichtes. Auch die Forderung der Gleichmäſsigkeit des Extrems wird bei solchen Bewegungsfällen überflüssig.

Von dieser speziellen Beschaffenheit sind auch die folgenden beiden Beispiele, welche wir der Theorie des Kreisels entnehmen. Es handle sich um die mehrfach besprochenen Fälle der *aufrechten Bewegung* und der *regulären Präcession.* Dabei wollen wir den Kreisel speziell als Kugelkreisel vom Trägheitsmomente A voraussetzen. Der Energieausdruck lautet hier

$$(4)\qquad T + V = \frac{A}{2}\left(\vartheta'^2 + \sin^2\vartheta \cdot \psi'^2 + (\varphi' + \cos\vartheta \cdot \psi')^2\right) + P\cos\vartheta.$$

Die Konstanz der Impulskomponenten n und N bei der einzelnen Bewegung bringt nach pag. 222 folgende Relationen für die Geschwindigkeitskoordinaten φ' und ψ' mit sich:

$$(5)\qquad A(\psi' + \cos\vartheta\varphi') = n, \qquad A(\varphi' + \cos\vartheta\psi') = N.$$

Die Störung soll in dem Sinne partiell gewählt werden, daſs diese Impulskonstanten nicht geändert werden. Der Anstoſs soll also lediglich die [Θ-]Komponente des Impulses alterieren, d. h. die Knotenlinie zur Axe haben.

Mittelst der Gleichungen (5) werden wir nun φ' und ψ' aus (4) eliminieren. Es ergiebt sich dabei, weil die rechte Seite von (4) ebenso wie die Koeffizienten in (5) die Lagenkoordinaten φ und ψ selbst nicht enthalten, ein Ausdruck, welcher nur von ϑ und ϑ' abhängt, nämlich

$$(4')\qquad T + V = \frac{1}{2A}\left[A^2\vartheta'^2 + \frac{(n - N\cos\vartheta)^2}{\sin^2\vartheta} + N^2 + 2AP\cos\vartheta\right].$$

Diese Funktion zweier Variabler haben wir auf ihre Extremeigenschaften hin zu prüfen.

Bei der *aufrechten Bewegung* ($\vartheta = \vartheta' = 0$) ist $n = N$. Da diese Relation durch den Anstoſs nicht abgeändert werden soll, so ergiebt sich für die gestörte Bewegung aus (4′) der vereinfachte Energieausdruck:

$$2A(T + V) = A^2\vartheta'^2 + \frac{N^2}{\cos^2\vartheta/2} + 2AP\cos\vartheta.$$

Indem wir die bekannten Regeln für die Aufsuchung der Maxima und Minima einer Funktion von zwei Variabeln anwenden, entwickeln



wir den vorstehenden Ausdruck an der Stelle $\vartheta = \vartheta' = 0$ nach dem Taylorschen Lehrsatze und erhalten:

$$2A(T+V) = N^2 + 2AP + A^2\vartheta'^2 + \frac{1}{4}(N^2 - 4AP)\vartheta^2 + \cdots$$

Hier verschwinden die linearen Glieder in ϑ und ϑ'; die quadratischen bilden eine positive definite quadratische Form, sofern

$$(6) \qquad N^2 - 4AP > 0$$

ist. In diesem Falle besitzt also $T + V$ für $\vartheta = \vartheta' = 0$ ein wirkliches Minimum. Die Bewegung des aufrechten Kreisels ist also, gegenüber solchen partiellen Störungen, welche den gemeinsamen Wert von N und n ungeändert lassen, unter der Bedingung (6) absolut stabil.

Wir haben somit unser früheres Stabilitätskriterium wiedergefunden, allerdings in einer weniger scharfen Form, indem statt des Zeichens $\geqq$ das Zeichen $>$ getreten ist. Daſs in der abgeänderten Bewegung unter der Bedingung (6) der Wert von ϑ dauernd in der Nähe des ursprünglichen Wertes $\vartheta = 0$ liegt, ist uns aus § 4 und 5 genugsam bekannt. Unsere früheren Betrachtungen zeigten auſserdem, daſs auch im Hinblick auf die Koordinaten φ und ψ, sowie bei Abänderung von N im Falle $N^2 - 4AP \geqq 0$ die aufrechte Bewegung als stabil, wenn auch nicht als absolut stabil zu bezeichnen ist und daſs im Falle $N^2 - 4AP < 0$ die aufrechte Bewegung labil wird. Über die letzteren Punkte giebt unsere jetzige Betrachtung natürlich keinen Aufschluſs.

Wir betrachten sodann das Beispiel der *regulären Präcession.* Diese Bewegung ist dadurch charakterisiert, daſs $\vartheta' = 0$ ist und daſs ϑ einen Wert ϑ_0 hat, der sich aus der Gleichung $A\mu\nu = P$ oder (vgl. pag. 279)

$$(7) \qquad \frac{n - N\cos\vartheta_0}{\sin^2\vartheta_0} \cdot \frac{N - n\cos\vartheta_0}{\sin^2\vartheta_0} = AP$$

bestimmt. Wir denken uns diese Bewegung wiederum durch einen Anstoſs gestört, welcher die Impulskonstanten n und N ungeändert läſst und lediglich die (in der Energiefunktion nicht explicit auftretende) Impulskomponente $[\Theta]$ beeinfluſst. Darauf entwickeln wir den Ausdruck $2A(T+V)$ an der Stelle $\vartheta = \vartheta_0$, $\vartheta' = 0$ nach dem Taylorschen Satze. Das konstante Glied, welches den Energiebetrag bei der regulären Präcession bedeutet, ist nach Gleichung (4′)

$$a_0 = \left(\frac{n - N\cos\vartheta_0}{\sin\vartheta_0}\right)^2 + N^2 + 2AP\cos\vartheta_0;$$

dieses kommt für das Folgende nicht wesentlich in Betracht. Hierauf suchen wir die Glieder erster Ordnung in $\vartheta - \vartheta_0$ und ϑ' auf, welche von der Form sind

$$a_1(\vartheta - \vartheta_0) + a_2\vartheta',$$

Hosted by Google

Offenbar verschwindet der Koeffizient a_2. Der Koeffizient a_1 ist gleich dem Werte von

$$\frac{\partial\{2A(T+V)\}}{\partial\vartheta}$$

für $\vartheta = \vartheta_0$. Rechnet man den genannten Differentialquotienten aus, so findet man ohne Mühe

$$(8) \qquad 2\sin\vartheta\left\{\frac{n-N\cos\vartheta}{\sin^2\vartheta}\cdot\frac{N-n\cos\vartheta}{\sin^2\vartheta}-AP\right\}$$

Dieser Ausdruck verschwindet aber wegen Gleichung (7). Die Glieder erster Ordnung verschwinden also, wie es für das Eintreten eines Maximums oder Minimums erforderlich ist.

Die Glieder zweiter Ordnung haben sodann die Form

$$a_{11}(\vartheta-\vartheta_0)^2 + 2a_{12}(\vartheta-\vartheta_0)\vartheta' + a_{22}\vartheta'^2.$$

Hier sieht man ohne weiteres, daſs $a_{22} = A^2$, $a_{12} = 0$ ist. Es bleibt also nur noch

$$a_{11} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\{2A(T+V)\}}{\partial\vartheta^2}\right)_{\vartheta=\vartheta_0}$$

zu berechnen. Führen wir in (8) eine abermalige Differentiation nach ϑ aus und setzen $\vartheta = \vartheta_0$, so ergiebt sich

$$a_{11} = \sin\vartheta_0\frac{d}{d\vartheta_0}\left(\frac{n-N\cos\vartheta_0}{\sin^2\vartheta_0}\cdot\frac{N-n\cos\vartheta_0}{\sin^2\vartheta_0}\right)$$
$$= \frac{(N^2+n^2-2Nn\cos\vartheta_0)(1+3\cos^2\vartheta_0)}{\sin^4\vartheta_0}.$$

Dieser Ausdruck ist sicher positiv. Der erste Faktor des Zählers bedeutet nämlich das Quadrat derjenigen Strecke, welche wir erhalten, wenn wir den Endpunkt der Impulskomponente N mit dem Endpunkte der Impulskomponente n verbinden; die übrigen Faktoren sind offenbar gleichfalls positiv. Mithin stellen die Glieder zweiter Ordnung

$$\frac{(N^2+n^2-2Nn\cos\vartheta_0)(1+3\cos^2\vartheta_0)}{\sin^4\vartheta_0}(\vartheta-\vartheta_0)^2 + A^2\vartheta'^2$$

eine positive quadratische Form dar. Die Existenz eines Minimums ist hierdurch bewiesen. Aus dem Kriterium von Routh folgt daher, daſs die reguläre Präcession in Bezug auf die Koordinate ϑ absolut stabil ist gegenüber allen solchen Störungen, welche die Impulskonstanten n und N ungeändert lassen — in Übereinstimmung mit den Resultaten von § 1. Das Verhalten der Bahn bei Abänderung von n und N und bei Berücksichtigung der Koordinaten φ und ψ entzieht sich unserer letzten Betrachtung; wir haben früher gesehen, daſs bei solchen allgemeinen Störungen die Bewegung zwar stabil aber nicht mehr absolut stabil ist.

Hosted by Google

Wiederum entsteht die Frage nach der Umkehr des Routhschen Kriteriums. Können wir etwa behaupten, daſs im Falle $T + V$ kein wirkliches Minimum oder Maximum vorstellt, die Bewegung nicht absolut stabil sein könne? Hierüber ist bisher nichts Sicheres bekannt. Der Vergleich mit dem Dirichletschen Kriterium und die oben berichteten Schwierigkeiten, welche sich der Umkehrung des letzteren entgegenstellen, lassen eine etwaige Umkehrung des Routhschen Kriteriums nicht gerade als aussichtsvoll erscheinen. —

§ 8. **Über die Methode der kleinen Schwingungen.**

Wir gehen nun auf die bekannteste Methode zur Untersuchung der Stabilitätsfragen ein, auf die sogenannte *Methode der kleinen Schwingungen.* Die vorangehenden Kreiselbetrachtungen liefern uns das Mittel, diese wichtigen und in der Litteratur immer wiederkehrenden Entwickelungen nach ihrem inneren Werte zu verstehen. Historisch hat sich die Methode der kleinen Schwingungen aus der Betrachtung des Pendels entwickelt, dessen kleine Schwingungen ja von altersher studiert sind und eine weittragende theoretische und praktische Bedeutung haben.

Indessen werden wir die Methode der kleinen Schwingungen hier weiter zu fassen haben, als sie für das Pendel in Betracht kommt. Die Pendelschwingungen sind nämlich *Schwingungen um eine Gleichgewichtslage;* demgegenüber werden wir, da es sich für uns um die Stabilität der Bewegungen handelt, allgemein *Schwingungen um einen Bewegungszustand* besprechen.

Zunächst ein paar Worte über die Methode im allgemeinen.

Indem man die auf ihre Stabilität zu prüfende Bewegung als vollständig bekannt ansieht, denkt man sich die Lagenkoordinaten bei dieser Bewegung als bekannte Funktionen der Zeit gegeben. Man ändert nun die Bewegung durch einen Anstoſs ab und faſst die Differenzen der Lagenkoordinaten bei der ursprünglichen und der abgeänderten Bewegung in's Auge, welche man samt ihren Differentialquotienten nach der Zeit als kleine Gröſsen voraussetzt, da man nach den kleinen Schwingungen des Systems fragt. Sodann entwickelt man die Differentialgleichungen für diese Koordinatendifferenzen aus den allgemeinen Differentialgleichungen des Systems und vereinfacht sie durch Vernachlässigung höherer Potenzen der als klein vorausgesetzten Gröſsen. Es trifft sich in gewissen ziemlich allgemeinen Fällen, daſs die so vereinfachten Differentialgleichungen leicht integriert werden können. Aus ihren Lösungen beurteilt man den Charakter der abgeänderten Bewegung und zieht hieraus seine Schlüsse auf die Stabilität oder

Hosted by Google

eigentlich auf die absolute Stabilität des ursprünglich vorgelegten Bewegungszustandes. Des Genaueren wollen wir diese Methode an dem bereits mehrfach behandelten *Problem des aufrechten Kreisels* auseinandersetzen, welches ja als direkte Verallgemeinerung des gewöhnlichen Pendelproblems angesehen werden kann.

Zunächst bemerken wir, wie pag. 316, daſs die Eulerschen Winkel φ, ψ, ϑ zur Behandlung des aufrechten Kreisels nicht recht geeignet sind, da bei der ursprünglichen aufrechten Lage den Koordinaten φ und ψ eine selbständige Bedeutung abgeht. Wir benutzen daher wieder die Kombination

$$(1) \qquad \varphi + \psi = \chi.$$

Als weitere Lagenkoordinaten mögen die Gröſsen x und y von pag. 331 dienen, welche die rechtwinkligen Koordinaten der auf die Äquatorebene projicierten Kreiselspitze bedeuten:

$$(2) \qquad \begin{cases} x = \sin\vartheta \cos\psi, \\ y = \sin\vartheta \sin\psi. \end{cases}$$

In diesen Koordinaten ist die ursprüngliche Bewegung charakterisiert durch die Gleichungen

$$x = y = 0, \qquad C\chi' = N.$$

Wir denken uns nun die Bewegung durch eine Störung abgeändert, wobei wir jedoch (wie pag. 361) von einer Veränderung der Winkelgeschwindigkeit χ' absehen wollen. Die Werte von x und y sind dann selbst die Differenzen zwischen den Lagenkoordinaten bei der ursprünglichen und der abgeänderten Bewegung. Es handelt sich vor allem darum, die Differentialgleichungen der x und y, d. h. der abgeänderten Bewegung zu ermitteln. Wir benutzen das Schema der allgemeinen Lagrangeschen Gleichungen. Hierzu ist erforderlich, den Ausdruck der lebendigen Kraft, sowie die Komponenten der Schwere in den Koordinaten x, y und χ zu kennen.

Nach Gleichung (6) von pag. 156 haben wir für den symmetrischen Kreisel, den wir hier, um das Pendel bequem in die Betrachtung einzubegreifen, vor dem Kugelkreisel bevorzugen wollen,

$$T = \frac{A}{2}(\sin^2\vartheta \cdot \psi'^2 + \vartheta'^2) + \frac{C}{2}(\varphi' + \cos\vartheta \cdot \psi')^2.$$

Aus (1) und (2) folgt nun:

$$\sin\vartheta = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg}\psi = \frac{y}{x},$$

$$\vartheta' = \frac{xx' + yy'}{\sqrt{(x^2+y^2)(1-x^2-y^2)}}, \quad \psi' = \frac{xy' - yx'}{x^2+y^2}, \quad \varphi' = \chi' - \frac{xy' - yx'}{x^2+y^2}.$$



Mithin wird

$$T = \frac{A}{2}\left(\frac{(xy' - yx')^2}{x^2 + y^2} + \frac{(xx' + yy')^2}{(x^2 + y^2)(1 - x^2 - y^2)}\right)$$
$$+ \frac{C}{2}\left(\chi' - (1 - \sqrt{1 - x^2 - y^2})\frac{xy' - yx'}{x^2 + y^2}\right)^2.$$

Andrerseits rechnen wir die potentielle Energie V in die neuen Koordinaten x und y um. Wir haben:

$$V = P\cos\vartheta = P\sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

Aus diesem Werte von V ergeben sich die Komponenten der Schwerkraft nach den Koordinaten x und y in bekannter Weise als partielle Differentialquotienten.

Bei der Aufstellung der Differentialgleichungen wollten wir alle höheren Potenzen der als klein vorausgesetzten Gröſsen x und y und ihrer Differentialquotienten x' und y' vernachlässigen. *Es kommt dieses auf dasselbe heraus, wie wenn wir die Ausdrücke für T und V nach x, x', y und y' entwickeln und in der Entwickelung nur die quadratischen Terme beibehalten.* Thun wir dieses, so heben sich die Nenner fort und es vereinfachen sich jene Ausdrücke zu:

$$(3)\qquad \begin{cases} T = \frac{A}{2}(x'^2 + y'^2) + \frac{C}{2}(\chi'^2 + \chi'(xy' - yx')), \\ V = P - \frac{P}{2}(x^2 + y^2). \end{cases}$$

Hierauf berechnen wir die Komponenten des Impulses $[X]$, $[Y]$ und $[\chi]$, sowie die Komponenten der Schwere X und Y. (Die auf die χ-Koordinate wirkende Komponente ist ersichtlich gleich Null.) Es ergiebt sich

$$[X] = \frac{\partial T}{\partial x'} = Ax' - \frac{C}{2}\chi' y,$$
$$[Y] = \frac{\partial T}{\partial y'} = Ay' + \frac{C}{2}\chi' x,$$
$$[\chi] = \frac{\partial T}{\partial \chi'} = C\left(\chi' + \frac{1}{2}(xy' - yx')\right),$$
$$X = -\frac{\partial V}{\partial x} = Px,$$
$$Y = -\frac{\partial V}{\partial y} = Py,$$

wobei wir noch in dem für $[\chi]$ angegebenen Werte die Glieder zweiter Ordnung in x und y gegen χ' konsequenter Weise wegstreichen werden.

Die auf die χ-Koordinate bezügliche Lagrangesche Gleichung lautet nun einfach

$$(4)\qquad \frac{d[\chi]}{dt} = 0 \quad \text{oder} \quad C\chi' = \text{const} = N.$$

Hosted by Google

Berechnen wir noch

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{C}{2}\chi' y' \quad \text{und} \quad \frac{\partial T}{\partial y} = -\frac{C}{2}\chi' x',$$

so nehmen die beiden anderen Lagrangeschen Gleichungen

$$\frac{d[X]}{dt} - \frac{\partial T}{\partial x} = X, \quad \frac{d[Y]}{dt} - \frac{\partial T}{\partial y} = Y$$

mit Rücksicht auf (4) die folgende Gestalt an:

$$(5) \qquad \begin{cases} Ax'' - Ny' = Px, \\ Ay'' + Nx' = Py. \end{cases}$$

Die Differentialgleichungen haben, wie wir sehen, eine äufserst einfache Struktur; es sind *homogene lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten.*

Hier mögen wir zunächst an den Spezialfall des Pendels erinnern. Setzen wir $C = 0$ und also auch $N = 0$, ferner $A = ml^2$, $P = -mgl$, indem wir an ein Pendel von der Länge l denken, dessen Massenpunkt m sich in der Ruhelage senkrecht unterhalb des Unterstützungspunktes befindet, so folgt aus (5)

$$(5') \qquad \begin{cases} Ax'' = Px, \\ Ay'' = Py, \end{cases} \quad \text{oder} \quad \begin{aligned} x'' &= -\frac{g}{l}x, \\ y'' &= -\frac{g}{l}y. \end{aligned}$$

Die Integration liefert sofort das bekannte Schwingungsgesetz des Pendels bei hinreichend kleinem Ausschlag.

Die Gleichungen (5) unterscheiden sich von (5′), wie man sieht durch das Auftreten von Termen in x' und y'. Diese, können wir sagen, zeigen uns das Vorhandensein einer Rotation („Gyration“ um die Kreiselaxe) an; sie werden deshalb in dem Werke von Thomson und Tait als *„gyroskopische Terme“* bezeichnet. Wir beabsichtigen später auf die interessante Theorie dieser Terme ausführlich einzugehen. Hier sei nur noch bemerkt, dafs ihre Koeffizienten in (5), nämlich $\begin{vmatrix} 0 & -N \\ +N & 0 \end{vmatrix}$ eine sogenannte schiefe Determinante bilden.

Die Lösung unserer Differentialgleichungen (5) ergiebt sich nach einer bekannten Regel*) in folgender Weise. Man fasse zunächst die

*) Die folgenden Rechnungen sind für die Integration eines beliebigen Systems linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten typisch. Die Technik derartiger Integrationen wird namentlich im zweiten Bande der Rigid dynamics von Routh sehr weit durchgebildet.


Hosted by Google

zwei Gleichungen (5) in eine zusammen, indem man sie bez. mit 1 und i multipliziert und addiert. Die komplexe Verbindung $x + iy$ heiſse z. So entsteht

$$Az'' + iNz' = Pz. \tag{6}$$

Darauf setze man versuchsweise an:

$$z = ae^{i\lambda t}; \tag{7}$$

dann liefert (6) folgende Bedingung für die soeben eingeführte Gröſse λ:

$$A\lambda^2 + N\lambda + P = 0. \tag{8}$$

Hieraus folgen zwei Werte $\lambda = \mu$ und $\lambda = \mu'$, nämlich

$$\left.\begin{matrix}\mu \\ \mu'\end{matrix}\right\} = \frac{-N \pm \sqrt{N^2 - 4AP}}{2A} \tag{9}$$

und zwei partikuläre Lösungen von (8), nämlich

$$z = ae^{i\mu t} \text{ bez. } z = a'e^{i\mu' t}$$

mit je einer willkürlichen Konstanten a bez. a'; aus ihnen setzt sich die allgemeine Lösung durch Superposition zusammen. Die allgemeine Lösung von (8) lautet daher, wenn wir noch a und a' in einen reellen und imaginären Teil spalten ($a = \alpha - i\beta$, $a' = \alpha' - i\beta'$):

$$z = (\alpha - i\beta)e^{i\mu t} + (\alpha' - i\beta')e^{i\mu' t}. \tag{10}$$

Für das Weitere hat man zwei Hauptfälle zu unterscheiden, je nachdem μ und μ' reell oder komplex sind. *Ersteres tritt ein, wenn* $N^2 - 4AP > 0$, *letzteres, wenn* $N^2 - 4AP < 0$ *ist.*

I) Ist $N^2 - 4AP > 0$, so schreiben wir statt (10), indem wir z in seinen reellen und imaginären Teil auflösen:

$$\begin{cases} x = \alpha \cos \mu t + \beta \sin \mu t + \alpha' \cos \mu' t + \beta' \sin \mu' t, \\ y = \beta \cos \mu t - \alpha \sin \mu t + \beta' \cos \mu' t - \alpha' \sin \mu' t. \end{cases} \tag{11}$$

Als Anfangsbedingungen schreiben wir etwa vor:

$$x = y = y' = 0.$$

Dann folgt aus (11):

$$\alpha + \alpha' = 0, \quad \beta + \beta' = 0, \quad \mu\alpha + \mu'\alpha' = 0,$$

d. h.

$$\alpha = \alpha' = 0, \quad \beta = -\beta' = \frac{\eta}{2}.$$

Die hier eingeführte und noch disponible Gröſse η entspricht der unbestimmt gelassenen Gröſse der Anfangsgeschwindigkeit x'.

Nunmehr ergiebt sich aus (11)

$$\begin{cases} x = \frac{\eta}{2}(\sin \mu t - \sin \mu' t) = \quad \eta \cos \frac{\mu + \mu'}{2} t \cdot \sin \frac{\mu - \mu'}{2} t, \\ y = \frac{\eta}{2}(\cos \mu t - \cos \mu' t) = -\eta \sin \frac{\mu + \mu'}{2} t \cdot \sin \frac{\mu - \mu'}{2} t. \end{cases} \tag{12}$$

Hosted by Google

Berechnen wir schliefslich $\frac{\mu + \mu'}{2}$ und $\frac{\mu - \mu'}{2}$ aus (9), so können wir für (12) schreiben:

$$(13)\quad \begin{cases} x = \eta \cos \frac{N}{2A} t \cdot \sin \frac{\sqrt{N^2 - 4AP}}{2A} t, \\ y = \eta \sin \frac{N}{2A} t \cdot \sin \frac{\sqrt{N^2 - 4AP}}{2A} t. \end{cases}$$

Somit sind wir genau auf die pag. 331 entwickelten Gleichungen (11) zurückgeführt.

II) Betrachten wir nun den zweiten Hauptfall $N^2 - 4AP < 0$, wo μ und μ' komplex werden. Wir setzen

$$\mu = \nu + i\nu', \quad \mu' = \nu - i\nu',$$

lösen (10) in einen reellen und imaginären Teil auf und erhalten

$$(14)\quad \begin{cases} x = + \{\alpha e^{-\nu' t} + \alpha' e^{+\nu' t}\} \cos \nu t + \{\beta e^{-\nu' t} + \beta' e^{+\nu' t}\} \sin \nu t, \\ y = - \{\beta e^{-\nu' t} + \beta' e^{+\nu' t}\} \cos \nu t + \{\alpha e^{-\nu' t} + \alpha' e^{+\nu' t}\} \sin \nu t. \end{cases}$$

Aus den Anfangsbedingungen

$$x = y = y' = 0$$

folgt sodann

$$\alpha + \alpha' = \beta + \beta' = -\beta + \beta' = 0,$$

d. h.

$$\beta = \beta' = 0, \quad \alpha = -\alpha' = \frac{\eta}{2}.$$

Mithin wird:

$$(15)\quad \begin{cases} x = \eta \left(\frac{e^{-\nu' t} - e^{+\nu' t}}{2}\right) \cos \nu t, \\ y = \eta \left(\frac{e^{-\nu' t} - e^{+\nu' t}}{2}\right) \sin \nu t. \end{cases} \quad \begin{cases} \nu = -\frac{N}{2A}, \\ \nu' = \frac{\sqrt{4AP - N^2}}{2A}. \end{cases}$$

III) Schliefslich müssen wir auch noch den Grenzfall durchrechnen, wo $N^2 - 4AP = 0$ wird, wo also μ und μ' zusammenfallen. Die vollständige Lösung der Differentialgleichung (8) mit der erforderlichen Anzahl willkürlicher Konstanten hat man in diesem Falle in der folgenden Form anzusetzen:

$$z = (a + a't)\, e^{i\mu t}.$$

Für den reellen und imaginären Teil von z ergiebt sich jetzt, wenn wir wieder $a = \alpha - i\beta$, $a' = \alpha' - i\beta'$ machen:

$$x = + (\alpha + \alpha' t) \cos \mu t + (\beta + \beta' t) \sin \mu t,$$
$$y = - (\beta + \beta' t) \cos \mu t + (\alpha + \alpha' t) \sin \mu t.$$

Unter den früheren Anfangsbedingungen folgt ferner

$$\alpha = \beta = \beta' = 0$$

Hosted by Google

und, indem wir α' durch η ersetzen:

$$(16) \qquad \begin{cases} x = \eta t \cos \mu t, \\ y = \eta t \sin \mu t, \end{cases} \quad \mu = -\frac{N}{2A}.$$

Wir wollen nun die in den Gleichungen (13), (15) und (16) gewonnenen Resultate im Sinne der Methode der kleinen Schwingungen diskutieren.

Die durch (13) dargestellte Bewegung der Kreiselspitze ist ihrem zeitlichen Verlaufe nach vollkommen periodisch. Sie stellt also eine Schwingung dar und zwar eine kleine Schwingung, weil die maximale Entfernung η der Kreiselspitze von ihrer ursprünglichen Lage um so kleiner ausfällt, je kleiner wir den Anfangswert von x', d. h. die anfängliche Störung wählen. Nach (12) können wir diesen Schwingungsvorgang übrigens auch auffassen als Überlagerung zweier einfach-harmonischer Schwingungen („Fundamentalschwingungen"), von den Perioden $\frac{2\pi}{\mu}$ und $\frac{2\pi}{\mu'}$.

Anders die durch (15) und (16) gegebenen Bewegungen. Diese besitzen einen periodischen und einen aperiodischen Bestandteil. Letzterer bewirkt, daſs die Entfernung des Punktes x, y von der Ruhelage, nämlich

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \eta \, \frac{e^{-\nu' t} - e^{+\nu' t}}{2} \text{ bez. } = \eta t$$

mit wachsendem t gröſser und gröſser wird, genauer gesagt, daſs sie bei hinreichend groſsem t jede beliebige Grenze übersteigt, wie klein auch der ursprüngliche Anstoſs gewesen sein möge. Die Bewegung ist alsdann keine Schwingung und sicherlich keine kleine Schwingung. Die Bahnkurve hat vielmehr eine Spiralengestalt. Gleichung (15) stellt im wesentlichen eine logarithmische, Gleichung (16) eine Archimedische Spirale vor.

Welche Schlüsse wird man nun aus diesem Verhalten bezüglich der Stabilität der aufrechten Kreiselbewegung zu ziehen haben? Wir wollen uns dabei zunächst auf einen völlig naiven Standpunkt stellen, von dem aus die in den rechnenden Naturwissenschaften überall übliche Vernachlässigung höherer Potenzen ohne Bedenken acceptiert wird. Von diesem Standpunkte aus werden wir die Gleichungen (13), (15) und (16), wenn auch nicht als genaue, so doch als angenäherte Beschreibung der wirklichen Bahn ansprechen und werden direkt sagen:

Im ersten Hauptfalle $N^2 - 4AP > 0$ ist die Bewegung der Kreiselspitze stabil oder sogar in unserer Terminologie absolut stabil. Im zweiten Hauptfalle $N^2 - 4AP < 0$, sowie im Grenzfalle $N^2 - 4AP = 0$ dagegen ist die Bewegung instabil.

Hosted by Google

Zu dieser Schlufsweise haben wir nun Stellung zu nehmen.

Wollen wir dieselbe zunächst nach ihrem Erfolge beurteilen, so werden wir sagen müssen: *Die Unterscheidung zwischen den stabilen und den labilen Fällen wird im allgemeinen, aber auch nur im allgemeinen richtig getroffen.* In der That ist ja die Ungleichung $N^2 - 4AP \gtrless 0$ unser wohlbekanntes Stabilitätskriterium. Dabei wird aber der Grenzfall $N^2 - 4AP = 0$ hier falsch klassifiziert; er erscheint den labilen Fällen zugeteilt, während er (vgl. pag. 323) bei strenger Methode durchaus den stabilen Fällen zuzurechnen ist.

Ferner sehen wir, was die Gestalt der Bahnkurven angeht: *Im ersten Hauptfalle wird die Bewegung der Kreiselspitze durch unsere jetzige Methode richtig wiedergegeben, d. h. mit um so gröfserer Annäherung, je kleiner der ursprüngliche Anstofs war. Im zweiten Hauptfalle dagegen, sowie im Grenzfalle liefern unsere jetzigen Formeln ein ganz falsches Bild der Bewegung.* In der That unterschied sich in strenger Behandlung z. B. die Bahnkurve für $N^2 - 4AP = 0$ ihrem qualitativen Charakter nach durch nichts von den Bahnkurven $N^2 - 4AP > 0$. Auch die Bahnkurven im Falle $N^2 - 4AP < 0$ besafsen im allgemeinen dieselben Periodicitätseigenschaften, wie die stabilen Bahnkurven im Falle $N^2 - 4AP > 0$; der Spiralencharakter, welcher nach den jetzigen Formeln diesen Bahnkurven allgemein anhaften soll, kam in Wirklichkeit nur in einem besonderen Spezialfalle zum Vorschein. Man könnte auch daran erinnern, dafs die Gröfsen x und y ihrer geometrischen Bedeutung nach sicher kleiner als 1 sein müssen, während sie den Formeln (15) und (16) zufolge beliebiger Werte fähig sein sollen.

Noch übler steht die Sache, wenn wir unser Verfahren auf seine innere Berechtigung hin prüfen. Betrachten wir zunächst den vermeintlichen aus der Methode der kleinen Schwingungen folgenden Nachweis, dafs die aufrechte Bewegung im Falle $N^2 - 4AP > 0$ stabil sei.

Indem wir in den Differentialgleichungen der Bewegung bez. in den Ausdrücken für T und V diejenigen Vernachlässigungen eintreten lassen, welche nur (oder höchstens) im stabilen Falle gerechtfertigt sind, machen wir von vornherein die Annahme, dafs die Bewegung stabil sei. Wir führen dann die oben angegebenen Rechnungen aus und finden, dafs im Falle $N^2 - 4AP > 0$ das Resultat der Rechnung unserer ursprünglichen Annahme nicht gerade widerspricht. Wollten wir nun hieraus umgekehrt auf die Richtigkeit jener Annahme schliefsen, so würden wir uns eines offenbaren „circulus vitiosus" schuldig machen. Nichtsdestoweniger wird dieser Schlufs bei der Methode der kleinen Schwingungen regelmäfsig angewandt.

Hosted by Google

Unsere hiermit formulierte Kritik ist nicht etwa neu. Wir wollen in dieser Hinsicht einige Worte von Dirichlet citieren, welche im Anfange der oben citierten Arbeit über die Stabilität des Gleichgewichtes vorkommen. Das im vorigen Paragraphen besprochene Kriterium des Gleichgewichtes war ursprünglich von Lagrange gerade nach der Methode der kleinen Schwingungen begründet. Dirichlet setzt die Unhaltbarkeit dieser Begründung auseinander und bemerkt unter anderem: „Es kann mit Recht bezweifelt werden, ob Gröfsen, für die man unter der *Voraussetzung*, dafs sie immer klein bleiben — denn nur in dieser liegt die Befugnis, die höheren Glieder zu vernachlässigen — kleine Grenzen findet, nach einer beliebigen Zeit wirklich in diese oder überhaupt nur in enge Grenzen eingeschlossen sein werden.“*) Genau derselbe Einwand läfst sich aber gegen die meisten modernen Arbeiten erheben, in denen die Methode der kleinen Schwingungen zur Untersuchung der Bewegungsstabilität herangezogen wird.

Man sieht übrigens an diesem Beispiele, wie lange es dauert, bis die Ergebnisse der strengeren mathematischen Forschung in den angewandten Wissenschaften Eingang und Berücksichtigung finden.

Günstiger scheinbar stehen die Chancen für den aus unserer Methode fliefsenden vermeintlichen Nachweis, dafs die Bewegung im Falle $N^2 - 4AP \leqq 0$ instabil sei. Zu Beginn der Rechnung machen wir nämlich, wie gesagt, bei der Vernachlässigung der höheren Glieder die ausdrückliche Annahme, dafs die Werte von x und y dauernd klein bleiben oder, genauer gesagt, durch Wahl des Anstofses beliebig klein gemacht werden können. Diese Annahme wird nun durch das Resultat der Rechnung im Falle $N^2 - 4AP \leqq 0$ in unzweideutiger Weise ad absurdum geführt. Es scheint daher der Schlufs berechtigt, dafs jene Annahme unzulässig ist, dafs also x und y nicht dauernd klein bleiben, und dafs die Bewegung in diesem Falle instabil ist.

Genau genommen wird aber hierdurch nicht die Unzulässigkeit der Annahme kleiner x, y, sondern nur die Unzulässigkeit der getroffenen Vernachlässigungen dargethan. Es könnte sehr wohl sein, dafs die x und y und also auch die höheren Glieder in den fraglichen Entwicklungen dauernd beliebig klein aber nicht beliebig klein gegen die beibehaltenen ersten Glieder gemacht werden können, sofern nämlich letztere für besondere Werte der Konstanten identisch verschwinden. In diesem Falle wäre die Vernachlässigung der höheren Glieder offenbar unberechtigt; die betreffende Bewegung könnte dann, nach der

*) Ähnlich äufsert sich Jacobi in der vierten Vorlesung über Dynamik. Vgl. Ges. W. Supplementb. pag. 30.

Hosted by Google

Methode der kleinen Schwingungen behandelt, instabil erscheinen, während sie in Wirklichkeit stabil sein könnte.

Solch ein Fall liegt gerade in dem Grenzfalle $N^2 - 4AP = 0$ vor, bei dem ja die Stabilitätsentscheidung, wie sie durch die Methode der kleinen Schwingungen geliefert wird, irreführend ist.

Hiernach werden wir unsere Kritik der Methode folgendermafsen zusammenfassend formulieren: *Weder sind die in jener Methode stabil erscheinenden Fälle als stabil bewiesen, noch sind die als labil erscheinenden in Wirklichkeit immer labil. Die Methode sagt also über die Stabilität und Labilität der Bewegungen strenge genommen nichts.*

Der Nutzen der Methode besteht daher, von diesem rigorosen Standpunkte aus beurteilt, lediglich darin, dafs sie für manche stabile Fälle (in unserem Beispiel die Fälle $N^2 - 4AP > 0$) auf bequemem Wege Annäherungsformeln liefert, wobei allerdings der Grad der Annäherung und die Berechtigung der Formeln zunächst unkontrollierbar bleiben.

Von einem mehr praktischen Standpunkte aus wird man dieses Verdikt allerdings wesentlich modifizieren müssen. Solange man keine allgemeine einwandfreie Methode hat, wird man mit einer unstrengen vorlieb nehmen müssen, zumal die Probleme, welche bisher mit der Methode der kleinen Schwingungen behandelt worden sind, das gröfste Interesse beanspruchen und nicht einfach zurückgeschoben werden können.

Natürlich bezieht sich unsere Kritik nur auf den zeitigen Stand der Methode, nicht auf die Methode selbst. Diese hat ohne Frage einen wertvollen Kern von Wahrheit, welcher, von Schlacken befreit, nicht nur vorläufige, sondern auch zuverlässige Aufschlüsse über die interessantesten Fragen der modernen Mechanik verspricht. Vermutlich wird es nur nötig sein, der Methode einige Einschränkungen und Verschärfungen hinzuzufügen.

In welcher Richtung diese Verschärfungen zu suchen sind, kann nach dem Früheren nicht zweifelhaft sein. *Man mufs aus den exakten Differentialgleichungen den Bewegungsvorgang wenigstens im Umrifs herzuleiten und auf Grund einer solchen allgemeinen Kenntnis der Bewegung den Fehler abzuschätzen suchen, den man in der Methode der kleinen Schwingungen bei der Vernachlässigung der höheren Terme begeht.* In solcher Weise haben wir in der That zu Ende des vorigen Kapitels unsere Formeln zur näherungsweisen Berechnung der Kreiselbewegung gewonnen, welche sich ja mit den aus der Methode der kleinen Schwingungen folgenden Näherungsformeln in allen den Fällen als identisch erwiesen, wo die letzteren brauchbar waren.

Hosted by Google

In der Litteratur liegen zahlreiche Bestrebungen in der angedeuteten Richtung bereits vor. Wir erwähnen die Arbeiten von Hrn. Liapounoff*), und namentlich Poincaré's**) Untersuchungen zur Himmelsmechanik, sowie überhaupt die modernen Beiträge zur Störungsrechnung, welche sich zum grofsen Teil gerade mit der mathematischen Präcisierung der in der Methode der kleinen Schwingungen vorkommenden Entwicklungen befassen. Auch in den Werken von Hrn. Routh***), welche die reichste Fundgrube für Stabilitätsfragen sind, finden sich bereits Ansätze zur mathematischen Verschärfung der Methode vor.

§ 9. Über die Bewegung des schweren unsymmetrischen Kreisels.

Wir wollen jetzt über die spärlichen Resultate berichten, welche man bisher bezüglich der Bewegung des schweren allgemeinen Kreisels gewonnen hat.

Die Differentalgleichungen für den allgemeinen Kreisel können etwa nach dem Schema der Eulerschen Gleichungen (s. pag. 141, Gleichung (3)) gebildet werden. Wir wollen dieselben nicht hinschreiben, sondern nur ihre mechanische Bedeutung wiederholen: Sie besagen, dafs die Impulsänderung in jedem Momente gleich dem unendlich kleinen Drehstofs der Schwere ist. Um die Axe und Gröfse desselben zu bestimmen, markieren wir im Körper den Schwerpunkt S; er habe im XYZ-System die Koordinaten ξ, η, ζ. Dabei setzen wir der Allgemeinheit wegen voraus, dafs die Richtung OS mit keiner der Hauptaxen, welche zu Koordinatenaxen gewählt sein mögen, zusammenfalle. Die Axe des Drehmomentes der Schwere wird alsdann die auf OS und der Vertikalen gleichzeitig senkrechte Gerade. Seine Gröfse beträgt $P \sin \vartheta$, wo $P = mgE$, d. h. gleich dem Produkt aus dem Gewicht des Kreisels in die Entfernung der Punkte O und S, ϑ gleich dem Winkel zwischen der Vertikalen und dem Halbstrahl OS gesetzt ist.

Ähnlich wie im dritten Paragraphen des vorigen Kapitels können wir auch hier unmittelbar eine Aussage über das Verhalten des Impulses machen, welche analytisch ein erstes Integral der Bewegungs-

*) Vgl. oben pag. 356.

**) Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste, vgl. z. B. Cap. IV, wo allerdings (pag. 177) die Definition der Stabilität noch ganz im Sinne der Methode der kleinen Schwingungen formuliert wird.

***) Rigid dynamics, Part II, Cap. VII, Stability of motion, Cap. VII. Die hier gegebenen Ausführungen liefern bereits darüber Aufschlufs, weshalb in unserem Beispiel für den Grenzfall $N^2 - 4AP = 0$, wo die Perioden der beiden Fundamentalschwingungen zusammenfallen, die Entscheidung des Stabilitätscharakters auf Grund lediglich der linearen Entwickelungsterme falsch ausfallen kann.

Hosted by Google

gleichungen liefert. Wegen der horizontalen Lage der Axe des Schweremomentes schreitet nämlich der Impuls-Endpunkt notwendig dauernd in horizontaler Richtung vorwärts. *Die Vertikalkomponente des Impulses ist also konstant,* wir haben wieder

$$n = \text{const}.$$

Aufserdem gilt natürlich auch jetzt der Satz von der lebendigen Kraft, welchen wir ja im zweiten Kapitel für jeden starren Körper und jedes konservative Kraftsystem abgeleitet haben:

$$T + V = h.$$

Wollen wir diese Gleichung in Worte fassen, so haben wir uns der geometrischen Bedeutung des Ausdrucks der lebendigen Kraft (vgl. pag. 96) zu erinnern und haben ferner die potentielle Energie $V = mg \cdot E \cos\vartheta$ in naheliegender Weise zu interpretieren. Wir können dann sagen:

Das halbe skalare Produkt aus Impuls- und Drehungsvektor vermehrt um das Produkt aus dem Gewicht des Kreisels in die vertikale Erhebung des Schwerpunkts bleibt während der Bewegung des allgemeinen Kreisels konstant.

Dagegen verliert in unserem Falle die vom symmetrischen Kreisel her bekannte Gleichung $N = \text{const}$ ihre Gültigkeit, welche offenbar lediglich eine Folge der symmetrischen Massenverteilung war.

Die vollständige analytische Beherrschung der unsymmetrischen Kreiselbewegung ist aber auf Grund der obigen beiden Integrale noch nicht möglich. Bevor wir über die weiteren Versuche in dieser Richtung sprechen, wird es gut sein, das zu erreichende Ziel schärfer ins Auge zu fassen. Das Ziel mufs offenbar dieses sein: eine klare Vorstellung von dem Bewegungsvorgange zu gewinnen. Derjenige Weg wird der beste sein, der am direktesten auf dieses Ziel hinführt.

Demgegenüber erscheint in zahlreichen Arbeiten über Mechanik, z. B. in den sogleich zu nennenden, der Zielpunkt wesentlich verschoben. Man gewinnt den Eindruck, als ob die wichtigste Aufgabe der analytischen Mechanik darin bestände, ein Problem auf Quadraturen zurückzuführen bez. solche Probleme aufzufinden, die sich durch Quadraturen lösen lassen. In Wirklichkeit ist doch aber die Zurückführung auf Quadraturen nur ein Mittel zum Zweck, welches noch dazu in den seltensten Fällen anwendbar ist und welches selbst da, wo es anwendbar ist, seinen Zweck nicht einmal vollständig erreicht, sofern nämlich die gefundenen Integrale eine komplizierte Bauart haben. Die einseitige Betonung der Quadrierbarkeit oder Nichtquadrierbarkeit entspricht fraglos nur der schulmäfsigen Gewöhnung der Mathematiker und ist in der Sache selbst nicht begründet.

Hosted by Google

Wenn es sich im Speziellen so trifft, daſs ein Problem auf Quadraturen oder allgemeiner auf bekannte Funktionen führt, so wird man natürlich von diesem Umstande gern Nutzen ziehen. Dabei wird man sich aber gegenwärtig halten, daſs mit der geschlossenen analytischen Darstellung der Integrale nur der erste Schritt gethan ist und daſs die Hauptaufgabe darin bestehen muſs, auf Grund dieser Darstellung zu einem vollständigen geometrischen und mechanischen Verständnis der Bewegung zu gelangen.

In allen anderen Fällen, wo eine Zurückführung auf bekannte Funktionen nicht möglich ist, wird man dagegen ein anderes Verfahren einschlagen müssen — ein Verfahren, welches überhaupt bei der Integration von Differentialgleichungen geboten ist: Man suche sich zunächst über den *qualitativen* Verlauf der durch die Differentialgleichungen definierten Bahnkurven eine Vorstellung zu bilden, indem man etwa die singulären Stellen der Differentialgleichungen, die instabilen Bewegungsfälle, die möglichen periodischen und asymptotischen Bahnkurven u. s. w. studiert. Dann erst entwickle man aus dieser vorläufigen Kenntnis heraus geeignete konvergente oder nichtkonvergente *Näherungsmethoden,* welche die *quantitative* Berechnung der Bahn mit beliebiger oder begrenzter Genauigkeit ermöglichen. Als Vorbild können dabei die Untersuchungen Poincarés über das Dreikörperproblem gelten, der seine groſsen Erfolge gerade der eben skizzierten freieren und allgemeineren Auffassung des Integrationsgeschäftes verdankt.

In diesem Sinne ist für die Behandlung des unsymmetrischen Kreisels wenig geschehen. Die zunächst zu nennenden Arbeiten gehen vielmehr ausschlieſslich auf Fälle geschlossener analytischer Darstellbarkeit aus.

Frau S. Kowalevski*) findet, daſs auſser den oben genannten Integralen noch ein weiteres in ziemlich einfacher algebraischer Form angegeben werden kann, wenn die Massenverteilung des Kreisels den folgenden Bedingungen genügt: Das Trägheitsellipsoid sei wieder ein Rotationsellipsoid ($A = B$), der Schwerpunkt liege aber nicht auf der Figurenaxe, sondern in der Äquatorebene ($\zeta = 0$); auſserdem sei

$$2\,C = A\,(= B).$$

Unter diesen Annahmen gelingt es, die allgemeine Bewegung vollständig zu behandeln.

Frau Kowaleski**) drückt die Lagen- und Geschwindigkeitskoordi-

*) Sur le problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe, Acta Mathematica, Bd. 12. 1888.

**) Bez. Herr F. Kötter: *Sur le cas traité par Mme. Kowalevski* etc. Acta Mathem. 17, 1893.

naten des Kreisels durch zwei Hülfsgröfsen aus, welche ihrerseits mit der Zeit durch Integrale zusammenhängen, in denen die Quadratwurzel aus einem Ausdrucke fünften Grades vorkommt. Solche Integrale, welche die nächste Verallgemeinerung der elliptischen Integrale darstellen, bezeichnet man als *hyperelliptische. Im Falle der Frau Kowalevski läfst sich also die allgemeine Bewegung eines unsymmetrischen Kreisels von spezieller Massenverteilung durch hyperelliptische Integrale vollständig darstellen.*

Diesem allgemeinen analytischen Schema ist die erforderliche geometrische Diskussion später durch Herrn Joukowsky*) hinzugefügt worden. Es gelingt Herrn Joukowsky den Bewegungsvorgang durch einige einfache geometrische Sätze zu beschreiben und sogar durch ein Modell zu illustrieren.

Die allgemeine Frage nach allen Fällen des schweren Kreisels, in denen aufser den beiden genannten noch ein drittes algebraisches Integral vorhanden ist, ist neuerdings von Herrn R. Liouville**) in Angriff genommen worden.

Von einem anderen Standpunkte, dem der allgemeinen Lie'schen Gruppentheorie, gehen die Untersuchungen der Herren Levi-Cività***) und Liebmann†) aus. Die genannten Autoren fragen, wie die Massenverteilung (die kinetische Energie) und die Kräfteverteilung (die potentielle Energie) beschaffen sein müssen, wenn zwei in den Geschwindigkeitskoordinaten lineare erste Integrale möglich sein sollen. In diesem Falle ist man sicher, dafs sich das Problem durch Quadraturen erledigen läfst.

Die Fragestellung ist hier insofern eine weitere wie in dem vorhergenannten Falle, als es sich nicht speziell um den schweren Kreisel handelt, vielmehr das Gesetz der äufseren Kraft selbst passend bestimmt werden soll. Die Untersuchung ergiebt im Ganzen 25 mögliche Fälle, von denen jedoch die meisten imaginär sind (d. h. einer mechanisch nicht realisierbaren Massenverteilung entsprechen). Dafs übrigens hiermit die Frage nach der Gesamtheit der integrabeln Fälle nicht erledigt ist, zeigt schon der in der Liebmannschen Tabelle nicht enthaltene Fall der Frau Kowalevski, wo man mit Quadraturen zum Ziele gelangt, ohne dafs zwei in den Geschwindigkeitskoordinaten lineare Integrale vorhanden sind.

---

*) Vgl. Jahresbericht der deutschen Mathematikervereinigung, Bd. IV, 1895.

**) Vgl. Acta Mathematica, Bd. XX, 1897.

***) Sul moto di un corpo rigido intorno ad un punto fisso. Accademia dei Lincei, 1896.

†) Vgl. oben pag. 161.

Wie man schon aus den hier gegebenen Andeutungen erkennt, gehen diese Untersuchungen von Levi-Cività und Liebmann durchaus nach der abstrakt-mathematischen Seite hin vor. —

Während es sich in den bisher aufgeführten Fällen darum handelte, die *allgemeine* Bewegung des unsymmetrischen Kreisels aufzufinden und analytisch darzustellen, wollen wir jetzt etwas eingehender über zwei Fälle *particulärer* Kreiselbewegung berichten, welche man in analytischer und geometrischer Hinsicht vollkommen beherrscht. Der eine von diesen Fällen ist von Herrn W. Heſs*) bemerkt worden; sein Studium wurde später von einer Anzahl russischer Mathematiker**) vertieft. Der andere Fall ist von Herrn O. Staude***) behandelt. In dem Heſs'schen Falle wird der Charakter der einzuleitenden Bewegung einer gewissen einfachen Bedingung unterworfen; gleichzeitig wird auch eine besondere Voraussetzung über die Lage des Schwerpunktes im Körper gemacht. In den von Herrn Staude untersuchten Bewegungen dagegen bleibt die Massenverteilung ganz allgemein, während der Charakter der Bewegung dafür in ausgiebigerer Weise spezialisiert wird.

Man bemerke übrigens vorab, daſs der Grad der Partikularisation in diesen beiden Fällen kein höherer ist, wie in dem Kowalevskischen oder wie im Falle des schwerelosen unsymmetrischen oder des schweren symmetrischen Kreisels. Allemal werden nämlich *drei* beschränkende Bedingungen vorangestellt; in den drei letzten Fällen beziehen sich diese Bedingungen lediglich auf die Massenverteilung, im Falle von Heſs teils auf die Massenverteilung teils auf die Bewegung, im Staudeschen Falle lediglich auf die Beschaffenheit der Bewegung.

Um in naturgemäſser Weise auf den Heſs'schen Fall der Kreiselbewegung hinzuleiten†), wollen wir uns die Frage stellen, unter welchen Umständen es bei einem allgemeinen Kreisel eintreten kann, *daſs der Impuls dauernd in einer durch den Unterstützungspunkt O gehenden, im Körper festen Ebene enthalten sei.*††) Analytisch gewandt, bedeutet dieses,

*) Über die Eulerschen Bewegungsgleichungen u. s. w. Math. Ann. Bd. 37, 1890.

**) Vgl. in analytischer Hinsicht P. Nekrassoff: *Recherches analytiques sur un cas de rotation d'un solide pesant autour d'un point fixe,* Math. Ann. Bd. 47, 1896, wo weitere Litteraturangaben zu finden sind, in geometrischer Hinsicht N. Joukowsky, Jahresbericht der deutschen Mathematikervereinigung Bd. III 1892/93.

***) *Über permanente Rotationsaxen*, Crelles Journal, Bd. 113, 1894. Mit demselben Gegenstand beschäftigt sich eine russische Arbeit von Hrn. B. Mlodzieiowski, Moskau 1894. Vgl. auch Routh, Rigid dynamics, Bd. II, art. 214.

†) Vgl. hierzu: A. Sommerfeld, Bemerkungen zum Heſs'schen Falle der Kreiselbewegung. Göttinger Nachrichten 1898.

††) Dabei schliessen wir zunächst den Fall aus, wo der Impulsvektor im Körper absolut fest ist. Diesen Fall werden wir nachher behandeln. Er führt gerade auf die von Herrn Staude untersuchten Rotationen.

Hosted by Google

ob und wann ein in den Impulskoordinaten L, M, N lineares homogenes Integral mit konstanten Koeffizienten möglich ist.

Die Lage des Impulses zu irgend einer Zeit ergiebt sich, wenn wir den jeweils vorhandenen Impuls mit dem unendlich kleinen Drehstofs der Schwere zusammensetzen. Die Axe des letzteren steht auf der durch den Schwerpunkt S und den Unterstützungspunkt O gehenden Vertikalebene senkrecht. Der Endpunkt des Impulses schreitet also stets senkrecht gegen die Axe OS, die wir die „Schwerpunktsaxe“ nennen wollen, fort.

Soll nun der Impuls dauernd in einer festen Ebene des Körpers liegen, so kann dieses keine andere Ebene sein, als die durch O gelegte Normalebene der Schwerpunktsaxe. Diese Ebene werde mit e bezeichnet; ihre Gleichung lautet, wenn wie früher ξ, η, ζ die Koordinaten des Schwerpunktes in dem Hauptträgheitskreuz XYZ bedeuten:

$$\xi L + \eta M + \zeta N = 0.$$

Dies ist bereits der Form nach das von Herrn Hefs gefundene partikuläre Integral.

Es ändert sich aber nicht nur die Lage der Impulsaxe infolge der Schwere, sondern auch die Lage des Körpers und insbesondere die Lage der Schwerpunktsaxe infolge der dem Impuls entsprechenden instantanen Rotation. Soll nun der Winkel zwischen Impuls- und Schwerpunktsaxe dauernd ein Rechter sein, so mufs nicht nur der Impuls-Endpunkt infolge der Schwerewirkung senkrecht zur Schwerpunktsaxe, sondern auch der Schwerpunkt infolge der instantanen Rotation senkrecht zur Impulsaxe fortschreiten. Dies findet aber nur dann statt, *wenn die Rotationsaxe beständig in der durch Impuls- und Schwerpunktsaxe bestimmten Ebene enthalten ist.*

Durch unsere letzte Forderung wird der Massenverteilung eine Bedingung auferlegt, die wir jetzt weiter zu untersuchen haben. Wir erinnern zu dem Zwecke an den geometrischen Zusammenhang zwischen der Lage des Drehungsvektors und der des Impulsvektors. Nach pag. 102 können wir die Richtung des Impulsvektors aus der des Drehungsvektors finden, wenn wir in einem der Durchstofsungspunkte der Drehungsaxe mit dem Trägheitsellipsoide

$$AX^2 + BY^2 + CZ^2 = 1$$

die Tangentialebene konstruieren und von O aus auf diese das Lot fällen; dieses giebt alsdann die Richtung des Impulsvektors an. In unserem Falle ist es indessen bequemer, statt mit dem Trägheitsellipsoid, dessen linke Seite den *Ausdruck der doppelten lebendigen Kraft in den Geschwindigkeitskoordinaten* angiebt, mit einem Ellipsoide zu operieren,


Hosted by Google

welches man das „reciproke Trägheitsellipsoid“ nennt und dessen linke Seite den *Ausdruck der doppelten lebendigen Kraft in den Impulskoordinaten* darstellt. Die Gleichung dieses Ellipsoides ist:

$$\frac{X^2}{A} + \frac{Y^2}{B} + \frac{Z^2}{C} = 1.$$

Man erkennt dann, genau so wie pag. 101 und 102, die Richtigkeit der folgenden Konstruktion: Um die Richtung des Drehungsvektors aus der des Impulsvektors zu finden, markiere man auf dem reciproken Trägheitsellipsoide die Durchstofsungspunkte der Impulsaxe und konstruiere in einem dieser Punkte die Tangentialebene an unser Ellipsoid; dann liefert das von O auf diese Ebene gefällte Lot die Richtung des Drehungsvektors.

Wir denken uns nun in dem reciproken Trägheitsellipsoide die Schwerpunktsaxe OS gezogen und durch O ihre Normalebene e gelegt, in welcher der Impulsvektor enthalten sein soll. Diese Ebene e schneidet das Ellipsoid in einem Kegelschnitt, welcher, wie wir jetzt zeigen werden, ein *Kreis* sein mufs.

Sei nämlich P irgend ein Punkt des Kegelschnittes und t seine Tangente in P. Dann giebt OP eine mögliche Richtung der Impulsaxe an. Durch t werde ferner die Tangentialebene e' an das Ellipsoid gelegt und von O auf diese Ebene das Lot OQ gefällt, welches die zur Impulsaxe OP gehörige Richtung der Drehungsaxe bestimmt. Nach der obigen Bedingung müssen die Geraden OP, OQ und OS beständig in einer Ebene liegen. Es steht aber unsere Tangente t sowohl auf OQ wie auf OS senkrecht, da sie die Schnittlinie der auf OQ und OS in Q bez. O errichteten Normalebenen e und e' darstellt. Mithin steht t auch auf OP senkrecht. Unser Kegelschnitt hat also die Eigenschaft, dafs die Tangente in jedem seiner Punkte auf dem vom Mittelpunkte auslaufenden Radiusvektor senkrecht steht. Unser Kegelschnitt ist also in der That ein Kreis.

Damit ist die der Massenverteilung des Kreisels aufzuerlegende Bedingung gefunden. Wir können sagen: *Soll der Impulsvektor dauernd in der Normalebene e der Schwerpunktsaxe enthalten sein, so mufs diese Ebene das reciproke Trägheitsellipsoid in einem Kreise schneiden;* oder auch: *Es mufs der Schwerpunkt auf dem in O errichteten Lote zu einer der Kreisschnittebenen des reciproken Trägheitsellipsoides liegen.*

Dies ist die geometrische Formulierung der fraglichen Bedingung in derjenigen Form, welche ihr von Herrn Joukowsky (vgl. das Citat auf pag. 378) gegeben ist. Herr Hefs drückt dieselbe Thatsache in analytischer Formulierung aus. Wir gelangen zu der letzteren, wenn wir bemerken, dafs die beiden durch O gehenden Kreisschnittebenen

Hosted by Google

des reciproken Trägheitsellipsoides (unter der Voraussetzung $A > B > C$) durch die Gleichung gegeben werden

$$\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right) X^2 = \left(\frac{1}{B} - \frac{1}{C}\right) Z^2.$$

Da nun der Schwerpunkt (ξ, η, ζ) auf der Normalen von einer dieser Ebenen liegen soll, so folgt die Proportion

$$\xi^2 : \eta^2 : \zeta^2 = \frac{1}{A} - \frac{1}{B} : 0 : \frac{1}{B} - \frac{1}{C},$$

d. h.

$$\eta = 0, \quad \xi^2\left(\frac{1}{B} - \frac{1}{C}\right) = \zeta^2\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right).$$

Dies sind die von Herrn Heſs angegebenen analytischen Bedingungen für die Möglichkeit seines Bewegungsfalles.

Der mechanische Charakter des Heſs'schen Bewegungsfalles ist ein recht einfacher. Wir werden sehen, daſs es sich dabei um die direkte Verallgemeinerung der bekannten *Pendelbewegung des symmetrischen Kreisels* handelt.

Wir denken uns zu dem Zwecke den Körper anfangs in stabiler Gleichgewichtslage, also die Schwerpunktsaxe senkrecht nach unten gerichtet und den Körper ohne Rotation. Darauf drehen wir die Schwerpunktsaxe um irgend einen Winkel aus der Vertikalen heraus und überlassen den Körper dem Einfluſs der Schwere, indem wir dafür sorgen, daſs zu Beginn der Bewegung entweder überhaupt keine Drehung vorhanden ist oder doch nur ein solcher Drehimpuls hinzugefügt wird, dessen Komponente um die Schwerpunktsaxe gleich Null ist, dessen Axe also in der Normalebene e der Schwerpunktsaxe liegt. Alsdann bleibt, wie wir gesehen haben, wenn noch die Bedingung erfüllt ist, daſs der Schwerpunkt auf einer der Kreisschnittnormalen des reciproken Trägheitsellipsoides liegt, der Impulsvektor dauernd in der Ebene e enthalten.

Gehen wir nun von dem unsymmetrischen zu dem symmetrischen Kreisel über, so werden wir durch eben dieses Verfahren auf die gewöhnliche oder sphärische Pendelbewegung geführt. Die Voraussetzung für das Eintreten der Pendelbewegung bestand in der That (vgl. pag. 215, Fig. 36) beim symmetrischen Kreisel darin, daſs die Komponente N des Impulses in Richtung der Figurenaxe (welche beim symmetrischen Kreisel zugleich Schwerpunktsaxe ist), anfangs gleich Null war. Und zwar ergab sich die Bewegung des „gewöhnlichen“ oder die des „sphärischen“ Pendels, je nachdem wir den ruhenden Kreisel bei irgend einer Lage der Figurenaxe ohne einen Anstoſs dem Einfluſs der Schwere überlieſsen oder nach Hinzufügung eines rein seitlichen Anstoſses, d. h. eines Drehimpulses,



dessen Axe senkrecht gegen die Figurenaxe gerichtet war und also in der Normalebene der Schwerpunktsaxe, d. i. in der Äquatorebene des symmetrischen Kreisels lag. Alsdann blieb der Impuls dauernd in der Äquatorebene enthalten, weil die Impulskomponente N ihren Anfangswert 0 dauernd beibehält. Gleichzeitig wird die Bedingung, welche wir im Falle des unsymmetrischen Kreisels hinsichtlich der Lage des Schwerpunktes hinzufügen mußsten, beim symmetrischen Kreisel von selbst erfüllt, weil hier die Kreisschnitte des reciproken Trägheitsellipsoides mit dessen Äquatorebene und die Schwerpunktsaxe mit der auf der Äquatorebene senkrechten Figurenaxe zusammenfallen.

Wir können daher sagen: *Der Heß'sche Fall der Kreiselbewegung darf deshalb ein besonderes Interesse für sich beanspruchen, weil er die direkte Verallgemeinerung der allbekannten Pendelbewegung darstellt.* Dementsprechend werden wir im Folgenden diesen Fall kurz als den *Fall des Heß'schen Pendels* bezeichnen.

Auch in quantitativer Beziehung besteht teilweise eine direkte Identität zwischen der Bewegung des Heß'schen Pendels und der Pendelbewegung des symmetrischen Kreisels oder, was auf dasselbe herauskommt, der Pendelbewegung des einzelnen Massenpunktes. *Wir werden nämlich zeigen, daß der Schwerpunkt des Heß'schen Pendels allgemein zu reden sich genau so bewegt wie der Massenpunkt eines sphärischen Pendels.*

Zum Beweise schreiben wir uns die beiden allgemein gültigen Sätze, den Satz der lebendigen Kraft und den Impulssatz $n = \text{const.}$, in geeigneter Form hin.

Wir drücken zunächst die lebendige Kraft T in zweckmäßsiger Weise durch die Impulskoordinaten aus. Dabei wählen wir zu Koordinatenaxen X, Y, Z, nicht, wie vorher, die Hauptträgheitsaxen, sondern die folgenden drei Geraden: die Z-Axe sei die Schwerpunktsaxe OS, die Y-Axe falle mit der mittleren Hauptträgheitsaxe zusammen, die X-Axe sei die zu beiden senkrechte Gerade. In diesen Koordinaten muß der Ausdruck der lebendigen Kraft die folgende Form annehmen:

$$2T = \frac{L^2 + M^2}{B} + 2\lambda LN + \frac{N^2}{C'},$$

wo B, λ und C' durch die Massenverteilung des Körpers gegeben sind und insbesondere B die Größse des mittleren Hauptträgheitsmomentes bezeichnet. In der That ist ja die Fläche $2T = 1$ unser reciprokes Trägheitsellipsoid; es muß sich also, wenn wir in der Gleichung dieser Fläche $N = 0$ setzen, die Gleichung eines Kreises ergeben. Aus diesem Grunde haben die Glieder mit L^2 und M^2 denselben Koeffizienten und fällt das Glied mit LM fort. Ferner kommt auch das Glied mit MN

in Fortfall, weil die Y-Axe als Hauptträgheitsaxe gewählt war und daher die „Trägheitsprodukte“ in Bezug auf diese Axe gleich Null sind (vgl. pag. 100).

Aus dem Ausdrucke von T ergeben sich die Komponenten des Drehungsvektors, welche in Bezug auf die Axen X, Y, Z mit p, q, r bezeichnet werden sollen, nach der allgemeinen Regel von pag. 98 in folgender Weise:

$$p = \frac{\partial T}{\partial L} = \frac{L}{B} + \lambda N, \quad q = \frac{\partial T}{\partial M} = \frac{M}{B}, \quad r = \frac{\partial T}{\partial N} = \lambda L + \frac{N}{C'}.$$

Bei dem Heſs'schen Pendel ($N = 0$) haben wir also speziell

$$(1) \qquad \begin{cases} 2T = \dfrac{L^2 + M^2}{B} \\ p = \dfrac{L}{B}, \quad q = \dfrac{M}{B}, \quad r = \lambda L. \end{cases}$$

Der Satz der lebendigen Kraft nimmt daher unter den zu Anfang dieses Paragraphen eingeführten Bezeichnungen die Form an:

$$(2) \qquad \frac{L^2 + M^2}{B} + 2P \cos\vartheta = 2h,$$

Wir berechnen ferner die Vertikalprojektion n des Impulses. Bezeichnen wie pag. 17 c, c', c'' die Richtungscosinusse der Vertikalen gegen die Koordinatenaxen, so haben wir

$$(3) \qquad n = Lc + Mc' + Nc'',$$

wobei sich nach pag. 19 c, c', c'' durch die Eulerschen Winkel φ, ψ, ϑ folgendermaſsen ausdrücken:

$$c = \sin\vartheta \sin\varphi, \quad c' = \sin\vartheta \cos\varphi, \quad c'' = \cos\vartheta.$$

Da überdies beim Heſs'schen Pendel $N = 0$ ist, so geht Gleichung (3) über in

$$(4) \qquad n = \sin\vartheta (L \sin\varphi + M \cos\varphi).$$

Diese Gröſse ist nach unserem allgemeinen Impulssatze eine Konstante.

Sodann ziehen wir die beiden kinematischen Gleichungen (9) von pag. 45 für ψ' und ϑ' heran. Setzen wir darin für p und q die Werte aus (1) ein, so lauten dieselben

$$(5) \qquad \begin{cases} B\psi' \sin\vartheta = L \sin\varphi + M \cos\varphi, \\ B\vartheta' = L \cos\varphi - M \sin\varphi. \end{cases}$$

Die erste dieser Gleichungen liefert mit Rücksicht auf (4)

$$(4') \qquad B\psi' \sin^2\vartheta = n.$$

Hosted by Google

Ferner schließen wir aus den beiden mit (5) identischen Gleichungen:

$$L \cos \varphi - M \sin \varphi = B\vartheta',$$
$$L \sin \varphi + M \cos \varphi = \frac{n}{\sin \vartheta},$$

indem wir sie bez. mit 1 und $-i$ multiplizieren und addieren:

$$(6) \qquad (L - iM)\, e^{-i\varphi} = \frac{B \sin \vartheta \vartheta' - in}{\sin \vartheta},$$

und indem wir sie quadrieren und addieren

$$(7) \qquad L^2 + M^2 = \frac{B^2 \sin^2 \vartheta \vartheta'^2 + n^2}{\sin^2 \vartheta}.$$

Mit dem letzten Werte gehen wir in die Gleichung (2) der lebendigen Kraft hinein. Benutzen wir die Abkürzung $u = \cos \vartheta$, so erhalten wir

$$(8) \qquad (Bu')^2 = 2hB(1 - u^2) - 2Pu(1 - u^2) - n^2.$$

Gleichzeitig geht Gleichung (6) über in

$$(9) \qquad B\psi' = \frac{n}{1 - u^2}.$$

Diese beiden Gleichungen (8) und (9) enthalten bereits den Beweis der vorangestellten Behauptung. Sie sind nämlich mit den Gleichungen der Pendelbewegung identisch, welche man aus den allgemeinen Integralgleichungen (4), (6), (7) der symmetrischen Kreiselbewegung von pag. 222 erhält, wenn man dort $N = 0$ setzt (und übrigens, um auch die Konstanten in Übereinstimmung zu bringen, A mit B vertauscht).

Durch die Winkel ψ und ϑ ist die Bewegung der Schwerpunktsaxe völlig bestimmt. Diese kann also nach den Gleichungen (8) und (9) als bekannt angesehen werden. Um die Bewegung des Heſs'schen Pendels völlig zu beherrschen, müssen wir nur noch die Drehung des Körpers um die Schwerpunktsaxe untersuchen. Diese ist nach Gleichung (1) durch $r = \lambda L$ gegeben. Es bietet sich nun zum Studium dieser Gröſse r der folgende elegante Weg dar.

Wir wissen, daſs der Impuls J dauernd in der Ebene e, der Normalebene der Schwerpunktsaxe, enthalten ist. In dieser Ebene denken wir uns in Gauſsischer Weise die komplexe Variable

$$J = L + iM$$

ausgebreitet. Das Verhalten dieser Variabeln wird dabei durch die Eulerschen Gleichungen reguliert, welche sich ohne Weiteres in eine einzige Differentialgleichung für unsere komplexe Variable zusammenfassen lassen.

Hosted by Google

Da unsere Axen X, Y, Z keine Hauptträgheitsaxen sind, benutzen wir diejenige Form der Eulerschen Gleichungen, welche für jedes beliebige Axenkreuz gilt, d. h. die Gleichungen (3') von pag. 141:

$$(10) \quad \begin{cases} \frac{dL}{dt} = \quad rM - qN + \Lambda, \\ \frac{dM}{dt} = -rL + pN + \mathsf{M}, \\ \frac{dN}{dt} = \quad qL - pM + \mathsf{N}, \end{cases}$$

Hier haben wir für Λ, M, N die Komponenten des Schweremomentes nach unseren Koordinatenaxen X, Y, Z einzusetzen. Die Gröſse dieses Momentes ist $P \sin\vartheta$, seine Richtung fällt in die Knotenlinie. Da letztere mit der X-Axe den Winkel φ, mit der Y-Axe den Winkel $\frac{\pi}{2} + \varphi$ einschlieſst (vgl. Fig. 3 von pag. 18), so haben wir

$$\begin{aligned} \Lambda &= \quad P \sin\vartheta \cos\varphi = \quad P\sqrt{1-u^2}\cos\varphi, \\ \mathsf{M} &= -P \sin\vartheta \sin\varphi = -P\sqrt{1-u^2}\sin\varphi, \\ \mathsf{N} &= \quad 0. \end{aligned}$$

Die Gleichungen (10) nehmen daraufhin, wenn wir noch für p, q, r die Werte aus (1) einsetzen und überdies, wie es dem Heſs'schen Falle entspricht, $N = 0$ machen, die Form an:

$$(11) \quad \begin{cases} \frac{dL}{dt} = \quad \lambda LM + P\sqrt{1-u^2}\cos\varphi, \\ \frac{dM}{dt} = -\lambda L^2 - P\sqrt{1-u^2}\sin\varphi, \end{cases}$$

während die dritte Gleichung identisch erfüllt ist.

Die Gleichungen (11) multiplizieren wir nun mit 1 und i und addieren sie; dann folgt

$$(12) \qquad \frac{dJ}{dt} + i\lambda LJ - P\sqrt{1-u^2}\, e^{-i\varphi} = 0.$$

Hier schreiben wir noch

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}(L + iM + L - iM) = \frac{1}{2}\left(L + iM + \frac{L^2+M^2}{L+iM}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(J + \frac{L^2+M^2}{J}\right), \end{aligned}$$

und ersetzen $L^2 + M^2$ nach dem Satze der lebendigen Kraft (Gl. (2)) durch $2B(h - Pu)$. In ähnlicher Weise ergiebt sich aus (6)

$$\begin{aligned} e^{-i\varphi} &= \frac{-Bu' - in}{\sqrt{1-u^2}} \, \frac{1}{L - iM} = \frac{-Bu' - in}{\sqrt{1-u^2}} \, \frac{J}{L^2 + M^2} \\ &= \frac{-Bu' - in}{\sqrt{1-u^2}} \, \frac{J}{2B(h - Pu)}. \end{aligned}$$

Hosted by Google

Mithin geht Gleichung (12) in die definitive Form über:

$$(13)\qquad \frac{dJ}{dt} + \frac{i\lambda}{2} J^2 + \frac{P}{2B}\,\frac{Bu' + in}{h - Pu}\,J + i\lambda B(h - Pu) = 0.$$

Es ist dieses eine sogenannte *Riccatische Gleichung*, eine Differentialgleichung erster Ordnung zweiten Grades. Die Koeffizienten dieser Gleichung können als bekannte Funktionen von t angesehen werden. Durch Gleichung (8) ist nämlich $\frac{du}{dt}$ als Quadratwurzel aus einem Polynom dritten Grades in u:

$$\frac{du}{dt} = \sqrt{U}$$

dargestellt. Hieraus folgt t als ein elliptisches Integral:

$$t = \int \frac{du}{\sqrt{U}}.$$

Umgekehrt ist also auch u und ebenso u' als Funktion von t, und zwar, wie wir im nächsten Kapitel (vgl. § 3) sehen werden, als sogenannte doppeltperiodische Funktion von t bestimmt.

Schliefslich ist es bequem, von unserer Differentialgleichung erster Ordnung zweiten Grades zu einer Differentialgleichung zweiter Ordnung ersten Grades überzugehen, wie solches bei der Behandlung Riccatischer Gleichungen allgemein üblich ist. Dies gelingt in unserem Falle durch die Substitution

$$J = \frac{i\lambda}{2}\,\frac{d\log w}{dt},$$

welche für den in Rede stehenden Übergang typisch ist. In der neuen komplexen Variabeln w geschrieben, lautet unsere Differentialgleichung dann:

$$(14)\qquad \frac{d^2w}{dt^2} + \frac{P}{2B}\,\frac{Bu' + in}{h - Pu}\,\frac{dw}{dt} + i\lambda B(h - Pu)\,w = 0.$$

Wir sind somit zu einer sogenannten *linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit doppeltperiodischen Koeffizienten* gelangt. An diese hat die eingehendere analytische Untersuchung anzuknüpfen. Wir können dies nicht näher ausführen, sondern verweisen in der Hinsicht auf die oben citierte Arbeit von Herrn Nekrassoff.

Ohne Benutzung der Gleichung (14) auf rein-geometrischem Wege ist der Hefs'sche Fall von Herrn Joukowsky in der oben genannten Note sehr eingehend studiert und durch ein Modell überzeugend erläutert worden. Diesem Autor verdankt man auch neben anderen schönen Resultaten die mitgeteilten Sätze über die Schwerpunktsbewegung des Hefs'schen Pendels.

Wir kommen nun zu dem zweiten der oben erwähnten partikulären Bewegungsfälle, dem von Hrn. Staude behandelten. Herr Staude

Hosted by Google

findet, dafs bei einem schweren Kreisel von beliebiger Massenverteilung allemal einfach unendlich viele Bewegungen angegeben werden können, die aus einer gleichförmigen Rotation um eine im Körper feste, vertikal gestellte Axe bestehen.

Wir wollen das Resultat von Hrn. Staude geometrisch aus der Impulstheorie ableiten. *Es handelt sich um die Frage, welche Axen, vertikal aufgerichtet, als permanente Drehaxen des allgemeinen Kreisels fungieren können.*

Wir richten unsere Aufmerksamkeit auf die Lage des Impuls-Endpunktes im Körper. Soll der Drehungsvektor nach Richtung und Gröfse im Raume und also auch im Körper konstant bleiben, so mufs auch der Impuls seine Gröfse sowie seine Lage gegen den Kreisel beibehalten, weil ja der Vektor des Impulses aus dem Drehungsvektor in eindeutiger Weise abgeleitet werden kann. Das Kriterium für die Möglichkeit der einfachen Rotation um eine vertikale Axe wird also dieses sein, *dafs der Endpunkt des Impulsvektors im Körper eine feste Lage hat.* (Im Raume beschreibt dieser Punkt alsdann natürlich einen Kreis um die Vertikale.)

Der Endpunkt des Impulsvektors heifse J, der des Rotationsvektors R. Die eventuelle Lagenänderung des Punktes J gegen den Körper rührt nun, wie schon beim Hefs'schen Pendel bemerkt, von zwei Umständen her, von der Schwerewirkung einerseits und von der instantanen Drehung des Kreisels andrerseits. Diese beiden Umstände müssen sich, wenn anders die Bewegung die vorausgesetzte Beschaffenheit haben soll, gegenseitig kompensieren.

Wegen der Schwerewirkung wandert der Punkt J, wie oben betont wurde, im Raume gleichzeitig senkrecht zur Schwerpunktsaxe OS und zur Vertikalen oder, wie wir im vorliegenden Falle auch sagen können, gleichzeitig senkrecht zu OS und OR fort. Wegen der instantanen Rotation des Kreisels würde der Punkt J, wenn er im Raume fest wäre, relativ zu dem Körper auf einem Kreise um die Vertikale herumgeführt; der Punkt J wandert also wegen dieses Umstandes gleichzeitig senkrecht gegen OR und OJ. Sollen sich beide Verrückungen aufheben, so müssen vor allem ihre Richtungen übereinstimmen. Es müssen also die drei Geraden OR, OS und OJ ein gemeinsames Lot besitzen, d. h. *die drei genannten Richtungen müssen in einer Ebene liegen.* Wir sind somit auf dieselbe Bedingung wie im Falle des Hefs'schen Pendels (vgl. pag. 379) geführt. Die Folgerungen aber, die wir jetzt hieraus ziehen, sind dem veränderten Ausgangspunkte entsprechend von den früheren verschieden. Während die Forderung, dafs die Axen OR, OS und OJ in einer Ebene liegen sollen, beim Hefs'schen Pendel nur durch

Hosted by Google

Spezialisierung der Massenverteilung zu erfüllen war, läſst sich dieselbe Forderung jetzt, da die Punkte R und J im Körper fest liegen, bei beliebiger Massenverteilung durch geeignete Auswahl von R befriedigen.

Analytisch besagt unsere Bedingung, wenn wir wie gewöhnlich mit p, q, r bez. L, M, N die Koordinaten von R und J im Hauptträgheitskreuze bezeichnen, daſs die Gleichung bestehen muſs:

$$\begin{vmatrix} p, & q, & r \\ L, & M, & N \\ \xi, & \eta, & \zeta \end{vmatrix} = 0. \tag{15}$$

Wir fassen diese Gleichung jetzt als eine Bedingung für die Lage der Drehungsaxe auf. Drücken wir noch L, M, N in bekannter Weise durch p, q, r aus, so sehen wir, daſs die als permanente Rotationsaxen in Frage kommenden Geraden auf einem *Kegel zweiten Grades* liegen müssen, dessen Gleichung wir schreiben können:

$$(A - B)\zeta pq + (B - C)\xi qr + (C - A)\eta rp = 0. \tag{16}$$

Geometrisch ist ein Kegel zweiten Grades bestimmt, wenn wir fünf Strahlen desselben kennen. Solche fünf Strahlen sind in unserem Falle leicht gefunden. Sicherlich liegen die drei Richtungen OR, OJ, OS allemal dann in einer Ebene, wenn zwei von ihnen zusammenfallen. Sollen OR und OJ zusammenfallen, so ist ihre gemeinsame Richtung eine Hauptträgheitsaxe. Also liegen die drei Hauptträgheitsaxen auf unserem Kegel zweiten Grades. Soll OJ mit OS identisch werden, so liegt OR in einer ganz bestimmten Richtung OS', welche mit Hülfe des Trägheitsellipsoides leicht konstruiert werden kann und welche durch den Punkt mit den Koordinaten $\frac{\xi}{A}, \frac{\eta}{B}, \frac{\zeta}{C}$ hindurchgeht. Also liegt auch diese Gerade und ebenso natürlich die Schwerpunktsaxe selbst auf unserem Kegel. Unser Kegel kann also aus den drei Hauptträgheitsaxen, sowie den Geraden OS und OS' konstruiert werden; *er ist bekannt, wenn die Massenverteilung des Körpers gegeben ist.*

Auſser der *Richtung* der beiden oben genannten Teilverrückungen des Punktes J muſs aber auch die *Gröſse* dieser Verrückungen übereinstimmen und ihr Sinn der entgegengesetzte sein, wenn unsere Rotationsaxe permanent sein soll. Berücksichtigen wir dieses, so ergiebt sich die Gröſse der Winkelgeschwindigkeit, mit welcher der Körper um die fragliche Axe rotieren kann. Durch die Schwerewirkung wird dem Punkte J, wie wir wissen, in der Zeit dt die Verrückung

$$P \sin\vartheta\, dt \tag{17}$$

erteilt. Infolge der instantanen Rotation, welche, im Sinne des Uhr-

Hosted by Google

zeigers gerechnet, die Winkelgeschwindigkeit Ω besitzen möge, wird J mit der Geschwindigkeit

$$-\Omega\,|J|\sin\psi$$

relativ gegen den Körper fortbewegt, wo ψ den Winkel zwischen Rotations- und Impulsaxe, $|J|$ die Länge des Impulses, mithin $|J|\sin\psi$ den Abstand des Punktes J von der Vertikalen bedeutet. Hieraus ergiebt sich während der Zeit dt die Verrückung

$$-\Omega\,|J|\sin\psi\,dt. \tag{17'}$$

Durch Vergleich der Ausdrücke (17) und (17′) folgt die weitere Bedingungsgleichung

$$\Omega\,|J|\sin\psi = P\sin\vartheta. \tag{18}$$

Haben wir nun irgend eine Erzeugende unseres Kegels als Rotationsaxe ausgesucht und mit ihrem einen Ende vertikal nach oben gestellt, so ist die Lage des zugehörigen Impulses J (d. h. der Winkel ψ) bestimmt und unabhängig von der dem Kreisel zu erteilenden Drehgeschwindigkeit Ω. Die Gröſse des Impulses dagegen hängt nach der pag. 101 beschriebenen Konstruktion von der Gröſse der Drehung ab und zwar wird einfach $|J| = \lambda\,\Omega$, wo λ einen positiven, von Ω unabhängigen Proportionalitätsfaktor bedeutet. Gleichung (18) geht daher über in

$$\lambda\,\Omega^2\sin\psi = P\sin\vartheta. \tag{18'}$$

Aus dieser Gleichung ist Ω^2 für jede Axe unseres Kegels zu bestimmen.

Dabei kann sich für Ω^2 ebensowohl ein positiver wie ein negativer, d. h. für Ω ein reeller wie ein imaginärer Wert ergeben. Die Strahlen (oder richtiger die Halbstrahlen) unseres Kegels zerfallen so in zwei Klassen, in „zulässige“ und „unzulässige“ Drehungsaxen. *Nur die „zulässigen“ Halbstrahlen, deren Ω reell ausfällt, können senkrecht in die Höhe gerichtet, permanente Axen wirklicher Drehungen sein.*

Zunächst sieht man leicht, daſs zwei entgegengesetzte Halbstrahlen unseres Kegels, zu Rotationsaxen gemacht, entgegengesetzte Vorzeichen von Ω^2 geben. In der That wird beim Übergang von einem Halbstrahl zu dem entgegengesetzten auch die Richtung des Impulses mit der entgegengesetzten Richtung vertauscht. Es bleibt also auch $\sin\psi$ ungeändert, während die Schwerewirkung $P\sin\vartheta$ im Vorzeichen umgekehrt wird. *Ist also der eine Halbstrahl eine zulässige, so ist der entgegengesetzte eine unzulässige Axe.* (Eine Ausnahme würde nur bei den besonderen Werten $\Omega^2 = 0$ und ∞ eintreten.)

Sodann denken wir uns den zur Rotationsaxe bestimmten Halbstrahl successive längs der einen der beiden Kegelhälften entlang geführt. Das Vorzeichen von Ω^2 ändert sich nur, wenn $\sin\vartheta$ oder

Hosted by Google

sin ψ sich im Vorzeichen umkehren. Ersteres tritt ein, wenn wir den Halbstrahl die Schwerpunktsaxe OS, letzteres, wenn wir ihn eine der drei Hauptträgheitsaxen passieren lassen. *Hiernach wird die eine sowie die andere der Kegelhälften durch die Hauptträgheitsaxen und die Schwerpunktsaxe in vier Teilgebiete zerlegt, welche abwechselnd zulässige und unzulässige Drehungsaxen enthalten.*

Was die Übergangslagen ($\psi = 0$ und $\vartheta = 0$) betrifft, so wird nach Gleichung (18′) im ersteren Falle $\Omega = \infty$, im letzteren $\Omega = 0$. Die Rotation Null bei aufrechter Schwerpunktsaxe bedeutet natürlich nichts anderes wie die (stabile oder labile) *Gleichgewichtslage* des Körpers. Die unendlichen Geschwindigkeiten um die drei Hauptträgheitsaxen leuchten ebenfalls ein.

Die verschiedenen Ausartungen des Kegels (16) sollen hier nicht vollständig besprochen werden. Wir verweisen in der Hinsicht auf die Staudesche Originalarbeit und erinnern übrigens, was den symmetrischen Kreisel betrifft, an die Bemerkungen von pag. 335. Wir sahen dort, daſs beim symmetrischen Kreisel nicht ∞^1, sondern ∞^2 permanente Drehungsaxen möglich sind, von denen die zulässigen, je nachdem ein verlängerter oder ein abgeplatteter Kreisel vorlag, das „untere“ oder „obere Halbbündel“ ausfüllten. Dementsprechend wird unsere obige Gleichung (16) im Falle des symmetrischen Kreisels ($A = B$, $\xi = \eta = 0$) identisch erfüllt. Daſs insbesondere die Figurenaxe bei jedem Wert von Ω als Drehungsaxe permanent bleibt, geht aus (18) hervor, indem diese Gleichung bei aufrechter Figurenaxe (wegen $\vartheta = 0$, $\psi = 0$) identisch befriedigt wird. —

Zum Schluſs wollen wir andeuten, wie man unserem Dafürhalten nach mit Benutzung der bisher gelösten Spezialfälle zu einer allgemeinen qualitativen Kenntnis der Bewegung des unsymmetrischen Kreisels fortschreiten könnte.

Durch die Untersuchung der genannten Spezialfälle, sowie durch die Kenntnis der symmetrischen Kreiselbewegung sind sozusagen einzelne Wege in das unbekannte Gebiet des allgemeinen Kreisels gebahnt, welche dieses in verschiedenen Richtungen durchqueren. Man sollte nun zunächst versuchen, von diesen gangbaren Straſsen aus, wenn auch nur ein kleines Stückchen, seitlich vorzudringen, indem man statt eines symmetrischen einen nahezu symmetrischen, statt eines Kowalevskischen einen nahezu Kowalevskischen Kreisel u. s. w. untersucht. Die Behandlung dieser Nachbarfälle läſst sich ohne Frage durch geeignete Näherungsprozesse mit beliebiger Genauigkeit bewerkstelligen, falls die Abweichung von den bekannten Fällen nicht zu groſs ist und man die Zeit auf ein begrenztes Intervall beschränkt. Dabei ist es keineswegs geboten, die

Hosted by Google

Näherungsmethode allemal in einer Potenzentwickelung zu suchen, z. B. bei dem nahezu symmetrischen Kreisel in einer Potenzentwickelung nach der als klein vorausgesetzten Differenz der Hauptträgheitsmomente A und B. Vielmehr wird jedesmal eine dem Falle eigentümliche und adäquate Näherungsmethode zu benutzen sein.

Wenn wir so ein Urteil über den Sinn gewonnen haben, in welchem eine kleine Abweichung von den lösbaren Spezialfällen wirksam ist, würde es weiter darauf ankommen, die Verbindung herzustellen zwischen den verschiedenen bekannten Bewegungen bez. zwischen ihren Nachbarfällen. Hierbei hätte man eine Art *Interpolation* vorzunehmen; man hätte Zwischenfälle der Bewegung einzuschalten unter der im allgemeinen fraglos zutreffenden Annahme eines kontinuierlichen Überganges zwischen je zwei Bewegungen. Als Schema für dieses Interpolationsverfahren können wir unsere anschauliche Behandlung des symmetrischen Kreisels im Anfange des vorigen Kapitels empfehlen.

Hosted by Google

Kapitel VI.

Darstellung der Kreiselbewegung durch elliptische Funktionen.

§ 1. Die Riemannsche Fläche $(u, \sqrt{U})$.

Während unser Hauptinteresse bisher auf das geometrische und mechanische Verständnis der Kreiselbewegung gerichtet war, soll in diesem Kapitel der Ton auf die analytische Seite unseres Problems gelegt werden. Es ist unvermeidlich, dafs die diesbezüglichen Entwicklungen abstrakter ausfallen und von der Wirklichkeit des mechanischen Vorganges zunächst weiter abzuliegen scheinen, wie die früheren, selbst wenn wir, was der Kürze halber geschehen mufs, auf eine durchgängige Strenge und Vollständigkeit der funktionentheoretischen Betrachtungen Verzicht leisten. Im Folgenden soll die Mathematik nicht ausschliefslich dem Interesse der Mechanik dienen, sondern es soll gleichzeitig die Mechanik zur Veranschaulichung einer mathematischen Theorie, der Lehre von den elliptischen Funktionen, herangezogen werden.

Dafs dieses möglich ist und dafs eine *gegenseitige* Befruchtung zwischen Anwendung und Theorie thatsächlich stattfindet, ist ein sehr bemerkenswerter Umstand, auf den wir zunächst die Aufmerksamkeit lenken möchten.

Ohne Frage ist es vom mechanischen Standpunkte aus natürlicher, die Bewegung dadurch zu beschreiben, dafs wir die Lagenkoordinaten des Kreisels, zunächst also etwa die Gröfse u, in ihrer Abhängigkeit von der Zeit darstellen, statt wie bisher die Zeit und die übrigen Lagenkoordinaten als Funktionen von u aufzufassen. Wenn wir uns so aus mechanischen Gesichtspunkten heraus die Aufgabe stellen, die funktionale Abhängigkeit zwischen t und u „umzukehren", so werden wir höchlichst überrascht sein, zu sehen, wie dieselbe Aufgabe auch vom rein mathematischen Standpunkte aus das gröfste Interesse besitzt. Auf unserem bisherigen Niveau, wo wir t als Funktion von u berechneten, bewegen sich die älteren Arbeiten über die *Theorie der elliptischen Integrale*, namentlich die von Legendre. Der grofse Fortschritt aber, welcher auf diesem Gebiet durch Abel und Jacobi erzielt worden ist, beruht

Hosted by Google

wesentlich auf dem eben angedeuteten *Umkehrgedanken*, auf dem *Übergange von den elliptischen Integralen zu den sogenannten elliptischen Funktionen*. Wir begegnen da einem merkwürdigen Zusammenwirken von Theorie und Praxis, sozusagen einer *prästabilierten Harmonie* zwischen reiner und angewandter Mathematik, die sich zum Wohle beider in der Geschichte unserer Wissenschaft fortgesetzt geltend gemacht hat.

Unter demselben Gesichtspunkte wollen wir sodann die Bedeutung unserer Drehungsparameter $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ für die folgenden Entwickelungen betonen. Diese Gröſsen waren ursprünglich im kinematischen Interesse eingeführt, um die Formeln der Drehungstransformation nach Möglichkeit zu vereinfachen. Es wird sich nun im Folgenden zeigen, daſs dieselben Gröſsen eine mindestens ebenso groſse Vereinfachung für die analytische Weiterführung des Problems mit sich bringen, und daſs gerade diese Parameter es sind, welche man, ausgehend von der Theorie der elliptischen Funktionen, vor allen anderen bevorzugen müſste.

Andererseits wird durch die elliptischen Funktionen auch die praktische Seite unseres Problems gefördert, insofern wir (vgl. § 6) aus dieser Theorie die vollständigsten und einfachsten Formeln zur numerischen Berechnung der Kreiselbahnen entnehmen werden, welche uns bei nicht übertriebener Genauigkeit mit wenigen trigonometrischen Gliedern auszukommen gestatten.

Der erste Schritt zur analytischen Vertiefung unseres Problems ist der, daſs wir den vorkommenden Gröſsen prinzipiell *komplexe Werte* beilegen. Es gilt hier, wie in so vielen Fällen, die Bemerkung: daſs analytische Verhältnisse, die bei der Beschränkung auf das Reelle unübersichtlich scheinen, sich sofort aufklären, wenn wir in das komplexe Gebiet übergehen.

Wir setzen also

$$u = u_1 + iu_2$$

und stellen die Werte von u nicht mehr auf einer Geraden, sondern nach dem Vorgange von Gauſs (bez. Argand) in einer Ebene dar. Da man in der Funktionentheorie $u = \infty$ als *einen* Wert ansieht, gleichviel ob es sich um ein Unendlichwerden des reellen oder des imaginären Bestandteils oder beider gleichzeitig handelt, so faſst man bekanntlich auch das Unendlich-Ferne der Gauſsischen Ebene als *einen einzelnen Punkt**) auf.

*) Vgl. z. B. H. Burkhardt: *Einführung in die Theorie der analytischen Funktionen*, Leipzig 1897. Wir verweisen den Leser auf dieses Buch bezüglich aller derjenigen funktionentheoretischen Angaben, welche im Text nicht ausführlich genug erläutert werden konnten.


Hosted by Google

Hierdurch erreicht man, daſs zwischen den Werten von u und den Punkten der Ebene ein eindeutig-umkehrbares Entsprechen stattfindet.

Die Vorstellung der *Gauſsischen Ebene* genügt aber für unsere Zwecke noch nicht; wir müssen dieselbe erweitern zu dem Bilde einer sogenannten *Riemannschen Fläche.*

Wir haben ja bei unseren Integralausdrücken die beiden Gröſsen u und $\sqrt{U}$ immer gleichzeitig zu betrachten. Zu jedem Werte von u gehören zwei Werte von $\sqrt{U}$, welche sich durch ihr Vorzeichen unterscheiden. Um diese gut auseinander zu halten, werden wir uns die Gauſsische Ebene *doppelt überdeckt* denken, ebenso wie wir uns schon früher die u-Axe doppelt zeichneten. Je nachdem wir $\sqrt{U}$ mit dem einen oder anderen Vorzeichen rechnen, befinden wir uns dann in dem einen oder in dem entsprechenden Punkte des anderen Exemplares der u-Ebene. Wir unterscheiden die beiden Exemplare als *oberes* und *unteres Blatt.*

Die beiden entgegengesetzten Werte von $\sqrt{U}$ fallen nur dann zusammen, wenn $U = 0$ oder $U = \infty$ wird. Die Stellen, wo dieses eintritt, haben wir schon im vierten Kapitel kennen gelernt. Es sind die auf der reellen Axe gelegenen Punkte $u = e,\ e',\ e''$ und ∞. Denken wir uns an diesen vier Stellen die beiden Blätter zusammengeheftet, so gehört jetzt zu jedem Paare entsprechender Werte von u und $\sqrt{U}$ nur ein Punkt der Doppelebene und umgekehrt. Die Punkte der Doppelebene und die Wertepaare $(u, \sqrt{U})$ sind also in derselben Weise *ein-eindeutig* zusammengeordnet, wie die Punkte der Gauſsischen Ebene und die Werte von u.

Die Art des Zusammenhanges zwischen dem oberen und dem unteren Blatt an den Stellen $e,\ e',\ e''$ und ∞ bedarf dabei allerdings noch der besonderen Untersuchung. Man darf nicht, wie es wohl am nächsten liegt, die beiden Blätter in jenen vier Punkten einzeln aneinander befestigen und im Übrigen schlicht übereinander herlaufen lassen, wenigstens dann nicht, wenn man verlangt, daſs die Zuordnung zwischen den Punkten der Doppelebene und den Wertepaaren $(u, \sqrt{U})$ eine *kontinuierliche* sein soll.

Betrachten wir z. B. den Punkt $u = e$ und umschreiten wir ihn auf einem kleinen Kreise entgegen dem Sinne des Uhrzeigers. Die vorher genannte Befestigungsart der beiden Blätter wäre nur dann angezeigt, wenn wir, mit einem Wertepaare $(u, \sqrt{U})$ beginnend, nach der Durchlaufung des Kreises zu demselben Wertepaare $(u, \sqrt{U})$ zurückkehren würden. Wir werden aber durch die folgende Betrachtung zeigen, daſs wir in dem entgegengesetzten Wertepaare $(u, -\sqrt{U})$ endigen.

Hosted by Google

Analytisch bedeutet die Durchlaufung unseres Kreises, daſs wir

$$u - e = \varrho e^{i\varphi}$$

setzen und bei festgehaltenem ϱ den Winkel φ um 2π wachsen lassen. Nun haben wir

$$U = c(u - e)(u - e')(u - e''), \quad c = \frac{2P}{A}$$

und also

(1) $$\sqrt{U} = \sqrt{\varrho}\, e^{\frac{i\varphi}{2}} \sqrt{c(u - e')(u - e'')}.$$

Hier können wir uns ϱ so klein gewählt denken, daſs in der letzten Gleichung die Gröſsen unter der Quadratwurzel bei Umschreitung des Kreises sich beliebig wenig verändern. Insbesondere soll unser Kreis in seinem Innern natürlich keinen der Punkte e', e'' enthalten. Lassen wir jetzt φ um 2π wachsen, so ändert $\sqrt{U}$ sein Vorzeichen. Wir gelangen also bei unserem Umlauf von dem einen Blatte in das andere.

Um dieser Thatsache Rechnung zu tragen, müssen wir uns folgende Vorstellung über den Zusammenhang der beiden Blätter bilden. Wir müssen uns denken, daſs von dem Punkte $u = e$ eine Linie ausläuft, bei deren Überschreitung man aus dem einen in das andere Blatt hineingelangt und daſs sich beide Blätter längs dieser Linie *durchdringen.* Dasselbe gilt von den Punkten e', e'', ∞. Dementsprechend beschreiben wir den Zusammenhang der beiden Blätter am besten folgendermaſsen: Wir denken uns die beiden Blätter zunächst schlicht übereinander gelegt und schneiden sie beide längs der reellen Axe etwa von e bis e' und von e'' bis ∞ auf. Die freien Kanten heften wir wechselweise zusammen, so daſs immer eine Kante des oberen mit der gegenüberliegenden Kante des unteren Blattes verbunden wird. Dann haben wir in der That den gewünschten Zusammenhang.

Allerdings müssen wir hierbei die nicht ganz bequeme Thatsache mit in Kauf nehmen, daſs sich nach der Zusammenheftung wie gesagt die beiden Exemplare der u-Ebene längs der Strecken ee' und $e''\infty$ gegenseitig durchdringen. Man bemerke aber, daſs diese Unvollkommenheit des geometrischen Bildes nur durch die Beschränktheit unserer dreidimensionalen Raumvorstellung bedingt wird. Hätten wir eine Dimension mehr zur Verfügung, so könnten wir die in der erforderlichen Weise zusammengehefteten Blätter ohne Durchdringung so nebeneinander herlaufen lassen, daſs sie lediglich die Verzweigungspunkte gemeinsam haben.

Die Durchdringungskurven, auf deren Gestalt es nicht wesentlich ankommt — bei unserem Verfahren sind es Stücke gerader Linien — nennen wir *Verzweigungslinien*, sowie wir ihre Endpunkte, die Stellen e, e', e'', ∞, bereits früher als *Verzweigungspunkte* bezeichneten. Das Ge-

Hosted by Google

samtbild der hiermit gewonnenen geometrischen Vorstellungen heifst nach seinem Schöpfer eine *Riemannsche Fläche.* Wir sprechen kurz von der Riemannschen Fläche $(u, \sqrt{U})$.

Wir haben uns jetzt genauer auf unserer Riemannschen Fläche zu orientieren. Zunächst setzen wir über die gegenseitige Lage von e, e', e'' fest, dafs

$$-1 < e < e' < +1 < e'' < +\infty$$

sei, was nach Figur 38 von pag. 226 der Annahme $P > 0$ entspricht. Sodann werden wir, ähnlich wie man die Gaufsische Ebene je nach dem Vorzeichen des imaginären Teiles von u in eine positive und eine

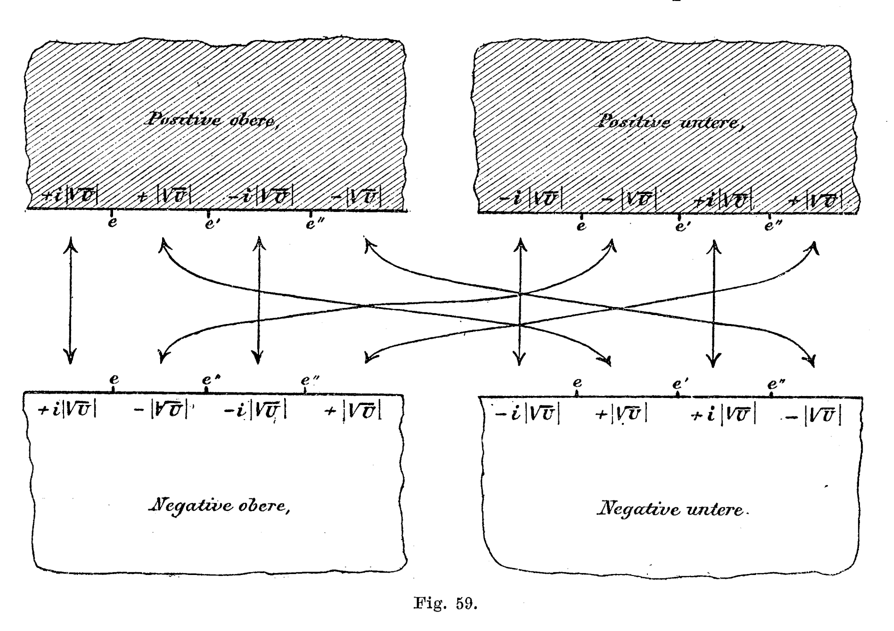


Fig. 59.

negative Halbebene zerlegt, auf unserer Riemannschen Fläche vier solche Halbebenen unterscheiden, welche wir in Fig. 59 schematisch aufzeichnen und benennen wollen. Die beiden positiven Halbebenen sollen dabei durch Schraffierung von den beiden negativen kenntlich gemacht werden. Die Pfeile deuten an, wie die einzelnen Stücke der reellen Axe in unseren vier Halbebenen nach der Zusammenheftung aneinander hängen.

Wir tragen in diesen Figuren die Werte von $\sqrt{U}$ längs der reellen Axe ein, wobei wir in einem Punkte der Fläche das Vorzeichen von $\sqrt{U}$ nach Willkür wählen können. Für alle übrigen Stellen ist alsdann $\sqrt{U}$ durch die Forderung der Kontinuität eindeutig bestimmt. Wir wollen etwa für irgend einen Punkt zwischen e und e', wo ja $\sqrt{U}$ etwas

Reelles bedeutet, festsetzen, daſs der positive Wert der Quadratwurzel der positiven oberen Halbebene zugehören soll. Dasselbe Vorzeichen gilt dann überhaupt zwischen e und e' an der Grenze der positiven oberen Halbebene. Wir schreiben also hier den Wert $+|\sqrt{U}|$ an. Denselben Wert erhält die negative untere Halbebene zwischen e und e', weil ja diese längs ee' mit der positiven oberen Halbebene zusammenhängen sollte. Der Wert $-|\sqrt{U}|$ kommt alsdann dem Stücke ee' der negativen oberen und positiven unteren Halbebene zu.

Um entsprechende Angaben für die anderen Teile der reellen Axe machen zu können, gehen wir z. B. um den Punkt e in der positiven oberen Halbebene auf einem Halbkreise entgegen dem Sinne des Uhrzeigers herum, wobei wir von einem Punkte zwischen e und e' ausgehend in einen Punkt zwischen $-\infty$ und e gelangen. Nach Gleichung (1) nimmt $\sqrt{U}$ hierbei den Faktor $e^{\frac{i\pi}{2}} = +i$ an. Wir schreiben also an die reelle Axe zwischen $-\infty$ und e im positiven oberen Blatte, ebenso wie in dem mit ihm zusammenhängenden negativen oberen Blatte, den Wert $+i|\sqrt{U}|$ an. In solcher Weise fortfahrend vervollständigen wir die Benennung der einzelnen Intervalle.

Der Vergleich mit Fig. 38 ($P > 0$) zeigt, daſs unsere früheren Angaben mit den jetzigen Ergebnissen für die Begrenzungen der positiven oberen Halbebenen übereinstimmen. Die frühere Figur stellt einfach einen Schnitt dar, welcher parallel zur reellen Axe, ein wenig nach der Seite der positiven Halbebenen verschoben, durch die Riemannsche Fläche hindurchgelegt ist. Der Unterschied ist nur der, daſs die hinzugeschriebenen Werte von $\sqrt{U}$ früher bei der Beschränkung auf reelle Variable als willkürliche Festsetzungen erschienen, während sie jetzt nach willkürlicher Festlegung des Vorzeichens in einem Punkte der Fläche für alle übrigen mit Notwendigkeit folgen.

§ 2. **Verhalten der elliptischen Integrale auf der Riemannschen Fläche.**

Wir müssen nun das Verhalten der elliptischen Integrale auf unserer Riemannschen Fläche prüfen. Dabei werden wir im Allgemeinen als bekannt voraussetzen, was man unter einem auf komplexem Wege geführten Integral versteht; auch werden wir gelegentlich den Cauchyschen Satz nicht entbehren können, welcher aussagt, unter welchen Umständen zwei verschiedene Integrationswege, die denselben Anfangs- und Endpunkt verbinden, den gleichen Integralwert ergeben.*)

*) Vgl. H. Burkhardt, l. c. § 35.

Wir betrachten zunächst das „Integral erster Gattung“

$$t = \int \frac{du}{\sqrt{U}}$$

und wollen zeigen, daſs ihm die von Riemann herrührende Bezeichnung eines „*überall endlichen Integrales*“ zukommt.

Wie bekannt, kann ein Integral bei endlicher Länge des Integrationsweges nur dann unendlich werden, wenn der Weg über eine Unendlichkeitsstelle des Integranden herüber erstreckt wird und die Ordnung des Unendlichwerdens nicht kleiner ist als 1. In unserem Falle sind die Unendlichkeitsstellen des Integranden mit den Nullstellen von U, d. h. mit den Verzweigungspunkten e, e', e'' identisch; und zwar beträgt die Ordnung des Unendlichwerdens im Integranden $\frac{1}{2}$. Infolgedessen wird unser Integral endlich bleiben, auch wenn wir seine obere oder untere Grenze mit einer dieser Stellen zusammenfallen lassen.

Ferner ist aus der Integralrechnung bekannt, daſs ein Integrationsweg ins Unendliche ausgedehnt werden kann, ohne daſs das Integral seinen endlichen Sinn verliert, wenn der Integrand im Unendlichen von höherer als der ersten Ordnung verschwindet. In unserem Falle verschwindet aber $\sqrt{U}$ für $u = \infty$ wie $u^{-3/2}$. Mithin bleibt unser Integral auch im Unendlichen endlich.

Wenn wir also irgend einen Punkt auf der Riemannschen Fläche als untere und irgend einen als obere Grenze unseres Integrales wählen und beide durch irgend einen Weg verbinden, welcher die Verzweigungspunkte eventuell eine (endliche) Anzahl von Malen umschlingen kann, so hat das so entstehende Integral allemal einen endlichen Wert. *Die Bezeichnung „überall endliches Integral“ ist danach gerechtfertigt.*

Insbesondere wollen wir diejenigen Integralwerte betrachten, welche einem vollen Umlauf um ein Paar der Verzweigungspunkte entsprechen. *Wir bezeichnen diese kurzweg als die Perioden des elliptischen Integrals.* Gehen wir z. B. irgendwie um die Verzweigungspunkte $e\,e'$ im oberen Blatte der Riemannschen Fläche und zwar in solchem Sinne herum, daſs wir die Verzweigungslinie $e\,e'$ zur Rechten haben. (Vgl. hier und im Folgenden Fig. 60.) Nach dem Cauchyschen Satze liefern alle solchen Umläufe denselben Wert des Integrals. Insbesondere können wir daher den Integrationsweg auf die Verzweigungslinie $e\,e'$ zusammenziehen. Thun wir dieses, so haben wir erst von e nach e' an der Grenze der positiven oberen und dann von e' nach e an der Grenze der negativen oberen Halbebene entlang zu integrieren, was beidemal zu demselben Integralwert, nämlich dem uns von früher her bekannten Werte ω führt.

Hosted by Google

Jedem einmaligen vollen Umlaufe um die Verzweigungspunkte $e\,e'$, ausgeführt im oberen Blatte und in dem angegebenen Sinne, entspricht daher eine Vermehrung von t um „die erste Periode“ $2\,\omega$. Es ist klar, daſs bei Umkehrung des Umlaufsinns oder bei Verlegung des Integrationsweges in das untere Blatt, der so entstehende Integralwert $-2\,\omega$ sein wird.

Jeder Integrationsweg, der die Punkte $e\,e'$ umschlieſst, kann aber auch als ein Umlauf um die beiden anderen Verzweigungspunkte $e''\,\infty$ aufgefaſst werden. Jedem solchen Umlauf (insbesondere also auch einem auf die reelle Axe von e'' bis ∞ zusammengezogenen Wege) entspricht daher bei richtiger Fixierung des Sinnes derselbe Integralwert $2\,\omega$.

Ferner können wir um die Punkte $\infty\,e$ bez. $e'\,e''$ einen Umlauf vornehmen. Je zwei solche Umläufe geben bei richtiger Fixierung des Fortschreitungssinnes ebenfalls dasselbe Integrationsresultat. Es genügt daher etwa den Umgang um die Punkte $\infty\,e$ zu betrachten, welchen wir uns teils in der negativen unteren, teils nach Passierung des Verzweigungsschnittes $e\,e'$ in der positiven oberen Halbebene vorgenommen denken und zwar in solchem Sinne, daſs die Linie $\infty\,e$ beständig zur Linken liegt. Der Wert dieses Integrals ist ersichtlich das Doppelte desjenigen Integralwertes, den man erhält, wenn man von dem Verzweigungspunkte e an der Grenze der positiven oberen Halbebene nach $-\infty$ hin fortschreitet. Dieser Wert wurde pag. 263 mit $i\omega'$ bezeichnet; seine Berechnung lieſs sich ebenso bewerkstelligen wie die Berechnung von ω. Mithin wird „die zweite Periode“ unseres Integrales, welche einem Umgange um eins der Punktepaare $\infty\,e$ oder $e'\,e''$ entspricht, gleich $2\,i\omega'$.

In der folgenden Figur stellen wir die bisher betrachteten Integrationswege und die zugehörigen Integralwerte schematisch dar. Der

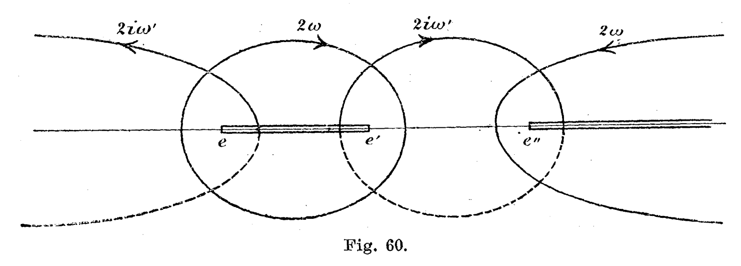


Fig. 60.

gemeinte Sinn ist je durch einen Pfeil markiert; die Integrationswege sind punktiert wo sie im unteren, ausgezogen wo sie im oberen Blatte verlaufen.

Auf die beiden Perioden 2ω und $2i\omega'$ lassen sich die Integrale, welche einem beliebigen in sich zurücklaufenden Integrationswege ent-

Hosted by Google

sprechen, zurückführen. *Der allgemeine Wert eines solchen Integrals, welcher auch „die allgemeine Periode" von t heiſst, wird daher*

$$2m\omega + 2im'\omega'.$$

Die (positiven oder negativen) ganzen Zahlen m und m' bedeuten dabei einfach die Anzahl der (rechtsläufigen oder linksläufigen) Umgänge des Integrationsweges um die Strecken ee' und $e''\infty$.

Geben wir in unserem Integrale nur die obere und untere Grenze als Punkte der Riemannschen Fläche an, indem wir die Gestalt des Integrationsweges auf sich beruhen lassen, so ist der Wert von t, entsprechend dem angegebenen Werte der allgemeinen Periode, nur *bis auf Multipla von* 2ω *und* $2i\omega'$ *bestimmt.* Ziehen wir dagegen nur Punkte einer unserer vier Halbebenen in Betracht und fügen die Beschränkung hinzu, daſs auch der Integrationsweg ganz in dieser Halbebene verlaufen soll, so ist der Wert von t (nach dem Cauchyschen Satze) durch Angabe der oberen und unteren Grenze *eindeutig* festgelegt. —

Wir gehen nun zur funktionentheoretischen Untersuchung der anderen elliptischen Integrale über, welche uns bisher vorkamen, zu den Gröſsen ψ, φ und namentlich zu den α, β, γ, δ.

Im Gegensatz zu t sieht man, daſs ψ nicht ausnahmslos auf der Riemannschen Fläche endlich ist. Die Verzweigungspunkte e, e', e'', ∞ geben allerdings auch hier, aus denselben Gründen wie oben, zu keinem Unendlichwerden Anlaſs. Der Integrand von ψ wird ferner aber unendlich für $u = \pm 1$ und zwar von der ersten Ordnung. Hieraus ergeben sich, wie wir sehen werden, für das Integral logarithmische Unstetigkeiten.

Betrachten wir z. B. den Wert $u = +1$. In dem Integrale

$$\psi = \int \frac{n - Nu}{A(1-u^2)} \frac{du}{\sqrt{U}}$$

setzen wir überall $u = 1$ auſser in dem das Unendlichwerden bedingenden Faktor $1 - u$, wobei wir für U den pag. 225 angegebenen Wert $-\frac{1}{A^2}(N-n)^2$ zu benutzen haben; dann wird

$$\psi = \pm \frac{i}{2} \int \frac{du}{1-u} = \mp \frac{i}{2} \log(1-u).$$

Diese Gleichung giebt eine angenäherte Darstellung für das Verhalten der Gröſse ψ in der Nähe derjenigen beiden Stellen, an denen auf der Riemannschen Fläche der Wert $u = 1$ stattfindet; sie zeigt, daſs hier ψ in der That logarithmisch unendlich wird. Der „Multiplikator des Unendlichwerdens", wie wir die den Logarithmus multiplizierende Konstante

Hosted by Google

nennen wollen, wird dabei in dem einen Blatte gleich $-\frac{i}{2}$, in dem anderen gleich $+\frac{i}{2}$.

Ganz dieselbe Überlegung zeigt auch, dafs ψ an den beiden Stellen $u = -1$ mit dem Multiplikator $\pm\frac{i}{2}$ logarithmisch unendlich wird. Berücksichtigen wir überdies, dafs sich nach pag. 237 der Winkel φ beim Kugelkreisel ganz ebenso verhält wie ψ, so können wir sagen:

Die Eulerschen Winkel φ und ψ werden auf unserer Riemannschen Fläche in vier Punkten logarithmisch unendlich, nämlich an den Stellen $u = \pm 1$ im oberen und unteren Blatte, und zwar mit einem Multiplikator, welcher für die über einander gelegenen Punkte der beiden Blätter je entgegengesetzte Werte annimmt und überall den absoluten Betrag $\frac{1}{2}$ hat.

Die Theorie der elliptischen Integrale kennt aber noch einfachere logarithmisch unendlich werdende Integrale, nämlich solche mit nur *zwei* logarithmischen Unendlichkeitsstellen. Man bezeichnet diese als *Integrale dritter Gattung* und benutzt sie, um solche mit mehr Unstetigkeiten aus ihnen linear zusammenzusetzen. So haben wir in der That bereits pag. 268 unser ψ als Summe zweier Integrale dritter Gattung, der sog. *Legendreschen Normalintegrale Π* dargestellt.

Für die weitere analytische Behandlung sind daher jedenfalls die Eulerschen Winkel nicht die einfachsten analytischen Elemente. Es zeigt sich aber, dafs unsere Parameter $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ solche in einfachster Weise liefern, *dafs nämlich die Gröfsen* $\log\alpha$, $\log\beta$, $\log\gamma$, $\log\delta$ *direkt elliptische Integrale dritter Gattung sind.*

Nehmen wir zunächst den Ausdruck für $\log\alpha$ aus Gleichung (8) von pag. 238 auf:

$$\log\alpha = \int \frac{A\sqrt{U} + i(n+N)}{2A(u+1)} \frac{du}{\sqrt{U}}.$$

Hier ist der Faktor $(u-1)$, der in ψ auftrat, aus dem Nenner verschwunden. Auch der Faktor $(u+1)$ bewirkt ein Unendlichwerden von $\log\alpha$ nur in einem der beiden Blätter. Wie wir eben sahen, wird nämlich für $u = -1$:

$$A^2 U = -(N+n)^2,$$

also nach den in Figur 59 enthaltenen Festsetzungen

$$A\sqrt{U} = +i\,|N+n| \text{ im oberen Blatte,}$$
$$A\sqrt{U} = -i\,|N+n| \text{ im unteren Blatte.}$$

Um uns bequem ausdrücken zu können, wollen wir für das Folgende annehmen, dafs

$$N > n > 0$$

sei. Alsdann bedeuten die in den eben angegebenen Werten von $A\sqrt{U}$ vorkommenden absoluten Beträge $|N+n|$ bez. $|N-n|$ dasselbe wie $(N+n)$ bez. $(N-n)$. Der Zähler des Integranden von $\log\alpha$ wird daraufhin für $u=-1$

gleich $+i(n+N)+i(n+N)=2i(n+N)$ im oberen Blatte,
gleich $-i(n+N)+i(n+N)=0$ im unteren Blatte.

Im unteren Blatte hebt also das Verschwinden des Zählers das gleichzeitige Verschwinden des Nenners auf, so daſs hier $\log\alpha$ endlich bleibt. Im oberen Blatte dagegen wird, wenn wir auſser in dem Faktor $(u+1)$ überall $u=-1$ setzen, näherungsweise:

$$\log\alpha=\int\frac{du}{1+u}=\log(1+u).$$

Im oberen Blatte besitzt also $\log\alpha$ einen logarithmischen Unendlichkeitspunkt.

Da nach einem allgemeinen Gesetz bei den Integralen algebraischer Funktionen logarithmische Unstetigkeiten immer paarweise auftreten müssen, so werden wir noch nach einer zweiten Unendlichkeitsstelle von $\log\alpha$ suchen. Diese liegt bei $u=\infty$. Machen wir nämlich, wie dies bei der Untersuchung des Unendlichfernen üblich ist, die Substitution $v=\frac{1}{u}$, so ergiebt sich für $v=0$ näherungsweise:

$$\log\alpha=-\int\frac{dv}{2v}=-\log\sqrt{v}=\log\sqrt{u}.$$

Die zweite logarithmische Unendlichkeitsstelle von $\log\alpha$ liegt also im Unendlichen. An den übrigen Verzweigungspunkten bleibt dagegen $\log\alpha$ wieder endlich.

Dieselben Überlegungen zeigen, daſs auch die Gröſsen $\log\beta$, $\log\gamma$, $\log\delta$ nur je zwei logarithmische Unendlichkeitsstellen besitzen, die eine

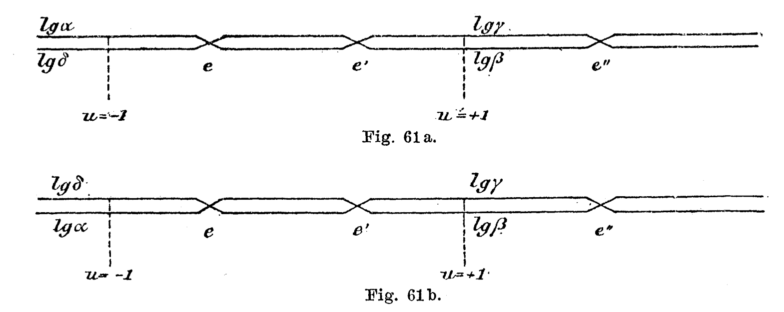


Fig. 61a.
Fig. 61b.

im Unendlichen, die zweite bei $u=\pm1$ im oberen oder unteren Blatte. Wie sich die Unendlichkeitsstellen auf die vier Punkte $u=\pm1$ verteilen, stellen wir durch das Schema der Figur 61a dar, welches

Hosted by Google

wiederum einen Ausschnitt aus unserer Riemannschen Fläche darstellt und welches auf Grund der oben gemachten Festsetzung $N > n > 0$ entworfen ist. Bei einer anderen Annahme über Vorzeichen und Gröfsenverhältnis von N und n vertauschen sich unsere vier Unendlichkeitsstellen in leicht angebbarer Weise. So entspricht z. B. das Schema b der Annahme $0 > N > n$.

Somit haben wir bewiesen:

Die Logarithmen unserer Parameter α, β, γ, δ sind elliptische Integrale, welche nur an zwei Stellen der Riemannschen Fläche logarithmisch unendlich werden, nämlich bez. in einem der vier Punkte $u = \pm 1$, sowie im Punkte ∞; diese Logarithmen sind also direkt elliptische Integrale dritter Gattung.

Damit sind aber die eigentümlichen Vorzüge unserer Parameter noch nicht erschöpft. Wir richteten bereits bei dem Integrale ψ unsere Aufmerksamkeit auf den Multiplikator, mit welchem der unendlich werdende logarithmische Term behaftet ist. Von diesem hängt der Zuwachs ab, um den sich das Integral bei einem Umlauf um die fragliche Unendlichkeitsstelle additiv vermehrt. Unter den Integralen dritter Gattung besitzen nun diejenigen einen besonders einfachen funktionentheoretischen Charakter, bei welchen dieser Zuwachs, in sogleich noch näher zu definierender Weise berechnet, gleich $\pm 2\pi i$ wird. Es ist daher berechtigt, solche Integrale durch den besonderen Namen *Normalintegrale dritter Gattung* auszuzeichnen.*) Dabei bemerken wir, dafs Legendre die Normierung seiner Integrale dritter Gattung von einem anderen, mehr formalen Gesichtspunkte aus getroffen hat, dafs also die pag. 267 erwähnten Legendreschen Normalintegrale keine Normalintegrale in unserem jetzigen Sinne sind.

Um die Definition der Normalintegrale dritter Gattung präciser angeben zu können, müssen wir zunächst erklären, was wir unter einem „positiven“ und was wir unter einem „geschlossenen“ Umlauf um einen Punkt unserer Riemannschen Fläche verstehen wollen.

Wir setzen, je nachdem es sich um einen im Endlichen gelegenen Punkt $u = a$ oder um den unendlich fernen Punkt $u = \infty$ handelt, entweder $u - a = \varrho e^{i\varphi}$ oder $u = \frac{1}{v}$ und $v = \varrho e^{i\varphi}$. Darauf lassen wir bei festgehaltenem genügend kleinem ϱ den Winkel φ in beiden Fällen von Null aus nach der positiven Seite hin wachsen. Dadurch ergiebt sich in der u-Ebene und auf der Riemannschen Fläche ein

*) Die Wichtigkeit dieser Normierung wird von Jacobi gerade an dem Beispiel des Kreisels auseinandergesetzt. Vgl. seine Ausführungen über den Divisor des Integrals dritter Gattung. Ges. W. B. II pag. 477 u. ff.

Weg, von welchem wir sagen, daſs er um den Punkt $u = a$ bez. $u = \infty$ im *positiven* Sinne herumläuft. Diesen positiven Umlauf setzen wir, je nachdem es sich um einen gewöhnlichen Punkt der Riemannschen Fläche oder um einen Verzweigungspunkt handelt, solange fort, bis der eben definierte Winkel φ den Wert 2π oder 4π erreicht hat. In der u-Ebene umkreisen wir dann im ersten Falle den betreffenden Punkt einmal, im zweiten Falle zweimal. Auf der Riemannschen Fläche laufen wir aber in beiden Fällen nur einmal um den Punkt herum, da bei einem Verzweigungspunkte erst zwei Umgänge in der u-Ebene zu dem Ausgangspunkte auf der Riemannschen Fläche zurückführen. In beiden Fällen sprechen wir daher von einem *einmaligen, auf der Riemannschen Fläche geschlossenen* Umlaufe.

Die genaue Definition der Normalintegrale dritter Gattung soll nun folgendermaſsen lauten:

Unter einem Normalintegrale dritter Gattung verstehen wir ein solches Integral mit zwei logarithmischen Unendlichkeitsstellen, welches bei einem auf der Riemannschen Fläche geschlossenen, einmaligen positiven Umlauf um eine der Unendlichkeitsstellen den Zuwachs $2\pi i$ erfährt; bei einem entsprechenden Umlauf um die andere Unendlichkeitsstelle nimmt dasselbe dann einem allgemeinen Gesetz zufolge den Zuwachs $-2\pi i$ auf.

Wir zeigen nun sofort, daſs unsere Integrale $\log \alpha$, $\log \beta$, $\log \gamma$, $\log \delta$ in diesem Sinne Normalintegrale sind. Betrachten wir z. B. $\log \alpha$.

Zur Untersuchung der Unendlichkeitsstelle $u = -1$ von $\log \alpha$ setzen wir nach der soeben gegebenen Vorschrift $u + 1 = \varrho e^{i\varphi}$ und lassen bei genügend kleinen Werten von ϱ den Winkel φ von 0 bis 2π wachsen. Da sich nach Obigem $\log \alpha$ in der Nähe der Stelle $u = -1$ wie $\log(u+1)$ verhält, haben wir

$$\log \alpha = \log(u+1) + \cdots = \log \varrho + i\varphi + \cdots$$

Wir sehen hieraus, daſs sich $\log \alpha$ bei einer positiven geschlossenen Umkreisung der Stelle $u = -1$ um $2\pi i$ vermehrt. Handelt es sich andrerseits um $u = \infty$, so setzen wir $v = \frac{1}{u} = \varrho e^{i\varphi}$ und lassen φ abermals bei genügend kleinem ϱ und zwar jetzt von 0 bis 4π variieren. Da $\log \alpha$ im Unendlichen in $-\log \sqrt{v}$ übergeht, so wird

$$\log \alpha = -\log \sqrt{v} + \cdots = -\log \sqrt{\varrho} - \frac{i\varphi}{2} + \cdots$$

Wie man sieht, vermehrt sich $\log \alpha$ bei der soeben definierten positiven geschlossenen Umkreisung der Stelle $u = \infty$ gerade um $-2\pi i$.

In derselben Weise überzeugen wir uns, daſs auch $\log \beta$, $\log \gamma$, $\log \delta$ beim Umgange um ihre Unendlichkeitsstellen den Zuwachs $\pm 2\pi i$ erfahren.

Hosted by Google

Wir können somit den bemerkenswerten Satz aussprechen:

Die Logarithmen unserer Parameter sind nicht nur Integrale dritter Gattung schlechtweg, sondern sie sind sogar Normalintegrale.

Dieser Umstand wird von augenfälliger Wichtigkeit, wenn wir von den Logarithmen zu den Werten unserer Parameter selbst übergehen. Die letzteren Gröfsen bleiben nämlich ersichtlich vollständig ungeändert bei einem Umgange um die Unendlichkeitsstellen ihrer Logarithmen. Z. B. verhält sich α in der Nähe der Stelle $u = -1$ direkt wie

$$C(u+1).$$

Wäre dagegen der Zuwachs bei einem Umlauf um die Stelle $u = -1$ nicht gleich $2\pi i$, sondern etwa gleich $2\pi i\lambda$ und dementsprechend der Multiplikator des Unendlichwerdens nicht gleich 1, sondern gleich λ, so würde sich α verhalten wie

$$C(u+1)^{\lambda},$$

im Allgemeinen also, wenn λ nicht gerade ganzzahlig ist, diese Stelle zum Verzweigungspunkte haben. Wir können daher sagen:

Dank der Normaleigenschaft unserer Integrale dritter Gattung verhalten sich unsere Parameter auf der Riemannschen Fläche durchgängig unverzweigt.

Damit ist nicht gesagt, dafs diese Parameter auch *eindeutig* auf der Riemannschen Fläche wären. Vielmehr werden sich ihre Logarithmen, entsprechend ihrer Darstellung als Integrale dritter Gattung, bei Umlaufung eines Paares von Verzweigungspunkten um gewisse charakteristische Zuwächse, „die Perioden des Integrals dritter Gattung", additiv vermehren, gerade so wie wir es für das Integral erster Gattung in Figur 60 geschildert haben. *Die Werte der Parameter selbst werden sich daher bei einem Umlauf um die Verzweigungspunkte je mit gewissen charakteristischen Faktoren multiplizieren.* Auf die Berechnung jener Zuwächse bez. dieser Faktoren von der Integraldarstellung aus brauchen wir hier nicht einzugehen, weil wir im vierten Paragraphen eine explicite Darstellung der α, β, γ, δ geben werden, durch welche die genannte Berechnung von selbst erledigt wird.

Jedenfalls erhellt aus alle diesen Bemerkungen, dafs unsere Parameter α, β, γ, δ im Hinblick auf funktionentheoretische Einfachheit den Eulerschen Winkeln überlegen sind. Es wird sich geradezu zeigen: *Die α, β, γ, δ stellen die einfachsten analytischen Bausteine dar, aus denen sich die allgemeinen Formeln der Kreiselbewegung zusammensetzen lassen.*



§ 3. Die Abbildung der Riemannschen Fläche $(u, \sqrt{U})$ in der t-Ebene.

In diesem Paragraphen haben wir die Umkehrung des elliptischen Integrals erster Gattung zu leisten. Während wir bisher t als Funktion seiner oberen Grenze u oder besser noch als Funktion des Ortes $(u, \sqrt{U})$ auf der Riemannschen Fläche aufgefafst haben, wollen wir später die Wertepaare $(u, \sqrt{U})$ als Funktionen von t ansehen. Hierzu ist es eine Vorstufe, dafs wir zunächst $(u, \sqrt{U})$ und die zugehörigen Werte von t als gleichberechtigte Variable behandeln. Wir repräsentieren daher $t = t_1 + it_2$ seinerseits in einer komplexen Ebene, der *t-Ebene*, indem wir uns t_1 als Abscisse, t_2 als Ordinate auftragen, und fragen, welchen Weg bez. welches Gebiet t in seiner Ebene beschreibt, während die Variable u einen beliebigen Weg oder ein beliebiges Gebiet der Riemannschen Fläche bestreicht. Diese Frage bezeichnet man funktionentheoretisch als die *Frage nach der Abbildung der Riemannschen Fläche $(u, \sqrt{U})$ auf die t-Ebene.*

Als untere Grenze des Integrals nehmen wir wie früher den Verzweigungspunkt e an, betrachten also

$$t = \int_e^u \frac{du}{\sqrt{U}}.$$

Wir beginnen mit der Berandung der positiven oberen Halbebene unserer Riemannschen Fläche. *Welchen Weg beschreibt t, während wir u die reelle Axe in der positiven oberen Halbebene von links nach rechts durchlaufen lassen?*

Bei der Beantwortung dieser Frage haben wir uns wesentlich auf Figur 59 zu stützen, wo wir nach Realität und Vorzeichen die für die einzelnen Teilintervalle der reellen Axe gültigen Werte von $\sqrt{U}$ eingetragen haben. Hiernach sind die zugehörigen Inkremente von t, d. h. die Gröfsen $dt = \frac{du}{\sqrt{U}}$, welche dem positiven Zuwachse du von u entsprechen, nach Realität und Vorzeichen gegeben. Wir stellen sie in der folgenden Tabelle zusammen:

Bewegt sich u:	so ist das Inkrement dt:
von e bis e',	positiv reell,
von e' bis e'',	positiv imaginär,
von e'' bis $+\infty$,	negativ reell,
von $-\infty$ bis e,	negativ imaginär.

Hosted by Google

In unserem Ausgangspunkte e, der unteren Grenze des Integrals, ist natürlich t gleich Null. Der Weg, den t beschreibt, setzt also im Nullpunkte der t-Ebene ein. Schreitet u von e bis e' fort, so wandert der zugehörige Punkt t nach vorstehender Tabelle längs der positiven reellen Axe. Wenn u den Wert e' erreicht, biegt der Weg rechtwinklig um und verläuft zunächst parallel der positiv imaginären t-Axe.

Sind wir auf der Riemannschen Fläche bis e'' gekommen, so macht der Weg von t abermals einen rechtwinkligen Knick; er führt von da ab wieder parallel der reellen Axe aber im negativen Sinne. Lassen wir u ins Positiv-Unendliche übergehen und aus dem Negativ-Unendlichen der reellen Axe zurückkehren, so haben wir in der t-Ebene eine abermalige rechtwinklige Umbiegung; die Bewegung des repräsentierenden Punktes, welche vorher im Sinne der negativen reellen Axe stattfand, verläuft weiterhin im Sinne der negativ-imaginären Axe. *Im Ganzen beschreibt t also einen rechtwinkligen Zug gerader Linien, während u die reelle Axe durchläuft.*

Wir finden leicht, dafs dieser Linienzug sich schliefsen mufs, und berechnen überdies die Länge seiner Kanten, wenn wir die in Fig. 60 angegebenen Werte der vollen Periodenumläufe berücksichtigen. Ziehen wir nämlich die dort gezeichneten Integrationswege auf die betreffenden Stücke der reellen Axe zusammen, so zerlegt sich der volle Umlauf in zwei kongruente geradlinige Hälften, deren jede als Integralwert von t die Hälfte der ganzen Perioden 2ω bez. $2i\omega'$ liefert. Hieraus folgt: *Der rechteckige Linienzug in der t-Ebene ist die Contour eines gewöhnlichen Rechtecks* (vgl. Fig. 62); *die Länge der horizontalen Rechteckseiten beträgt ω, die der vertikalen ω'. Die Ecken des Rechtecks sind, in der Reihenfolge, wie sie den Verzweigungspunkten*

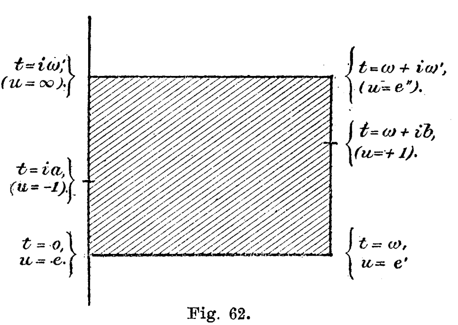


Fig. 62.

$$u = e,\ e',\ e'',\ \infty$$

entsprechen, gegeben durch die Werte

$$t = 0, \quad \omega, \quad \omega + i\omega', \quad i\omega'.$$

Wir treten nun mit der Variabelen u in das Innere der positiven oberen Halbebene ein und überzeugen uns, dafs dann auch die Variable t in das Innere unseres Rechtecks übergeht.

Hosted by Google

Da wir nämlich, wenn wir die reelle u-Axe von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen, jene Halbebene zur Linken haben, mufs sich auch in der t-Ebene einem allgemeinen funktionentheoretischen Prinzip zufolge das entsprechende Gebiet an den in der Richtung $i\omega'$, 0, ω, ... durchlaufenen rechteckigen Rahmen nach links hin ansetzen. Ferner haben wir uns klar zu machen, dafs das Abbild in der t-Ebene an keiner Stelle Lücken, Verzweigungspunkte oder Faltungen besitzt. Wir können uns zu dem Zwecke aus der Integralformel Reihenentwickelungen herstellen, welche den Wert von t als konvergente Potenzreihe aus dem Werte von u und umgekehrt diesen aus jenem zu berechnen gestatten. Führt man diese Andeutungen näher aus, so erkennt man, dafs den Punkten der positiven oberen Halbebene nur Punkte im Innern unseres Rechtecks entsprechen können und dafs diese Punkte den Raum zwischen unserem rechteckigen Rahmen lückenlos und einfach überdecken müssen. Wir werden also sagen können:

Die Fläche unseres Rechtecks stellt die Abbildung vor, welche die Gröfse t von der positiven oberen Halbebene der Riemannschen Fläche entwirft.

Um den Abbildungsprozess möglichst konkret zu fassen, können wir uns etwa die betrachtete Halbebene mit einer elastischen Membran bespannt denken, welche an der reellen Axe befestigt ist. Die Stücke der reellen Axe zwischen den Verzweigungspunkten stellen wir uns hier miteinander gelenkig verbunden vor. Wir drehen nun diese Stücke gegeneinander und deformieren sie solange, bis sie in den rechteckigen Rahmen der t-Ebene übergegangen sind. Gleichzeitig ist dann die ursprüngliche Membran unter Aufrechterhaltung der Stetigkeit in eine das Rechteck überspannende Membran deformiert. Die eine Membran stellt sich so als eine *Verzerrung* der anderen dar. Natürlich giebt dieses Verfahren zunächst nur eine sehr ungefähre qualitative Vorstellung von dem mathematischen Zusammenhange zwischen den Variabeln t und u. Wir können aber unsere Abbildung auch quantitativ richtig wiedergeben, wenn wir den in unserer Membran wirksamen elastischen Kräften die Eigentümlichkeit zuschreiben, nur solche Verzerrungen zuzulassen, bei welchen die Ähnlichkeit in den kleinsten Teilen gewahrt wird, wo also irgend zwei von einem Punkte ausgehende Kurven nach der Deformation denselben Winkel einschliefsen, wie vor derselben. Durch diese Bestimmung ist die Art der Verzerrung, wie man nachweisen kann, vollständig festgelegt, wenn wir nur noch die weitere Bedingung hinzufügen, dafs etwa den drei Punkten e, e', e'' der Halbebene die drei aufeinanderfolgenden Ecken unserer Rechtecksbegrenzung 0, ω, $\omega + i\omega'$ entsprechen sollen. Bekanntlich nennt man eine solche, in

Hosted by Google

den kleinsten Teilen ähnliche Abbildung zweier Gebiete eine *konforme* oder *winkeltreue Abbildung.*

Ohne irgend welche Formel läſst sich also der analytische Zusammenhang zwischen den Variabeln t und u rein geometrisch folgendermaſsen beschreiben:

Es entsprechen sich je zwei solche Variabelnwerte t und u, deren repräsentierende Punkte bei der konformen Abbildung der Halbebene auf die Fläche des Rechtecks (unter Zuordnung der Verzweigungspunkte zu den Ecken des Rechtecks) in einander übergehen. —

Ein sehr schöner Apparat, welcher die Konformität der Abbildung selbstthätig bewirkt, ist kürzlich von Herrn S. Finsterwalder*) konstruiert worden. Herr Finsterwalder stellt aus biegsamen Drähten ein Netzwerk her, indem er je drei Drähte durch eine mit drei Bohrungen versehene Hülse zusammenfaſst, wobei es für die Herstellung am bequemsten ist, die Bohrungen unter überall gleichem Winkel gegen einander anzubringen. Die Hülsenmittelpunkte bilden dann in ihrer ursprünglichen Lage die Ecken einer regelmäſsigen Sechsecksteilung der Ebene. Da die Drähte in ihren Führungen frei auf- und abgleiten können und überdies gebogen werden können, so besitzt unser Apparat noch einen hohen Grad von Beweglichkeit. Die Anzahl der Freiheitsgrade wird sogar unendlich groſs, wenn wir uns, wie es der in Rede stehenden Anwendung auf die konforme Abbildung wegen eigentlich geschehen müſste, sämtliche Dimensionen des Netzwerks unendlich klein und die Hülsen unendlich zahlreich und unendlich dicht nebeneinander liegend denken.

Man überzeugt sich nun durch das Experiment ohne Weiteres, daſs es möglich ist, der Berandung des Netzwerks jede beliebige Gestalt zu geben, d. h. das vom Netzwerk ursprünglich eingenommene Gebiet auf jedes andere Gebiet abzubilden, wobei noch drei Randpunkte des einen Gebiets dreien des anderen willkürlich zugewiesen werden können. Daſs diese Abbildung eine winkeltreue ist, folgt für die Winkel, unter denen die Drähte zusammenstoſsen, unmittelbar aus der Starrheit der Hülsen; wenn aber bei einer stetigen (oder, genauer gesagt, durch analytische Funktionen vermittelten) Abbildung drei Winkel in jedem Punkte ungeändert bleiben, so gilt dasselbe nach allgemeinen Prinzipien für alle Winkel.

Durch den Finsterwalderschen Apparat wären wir also in der Lage, die durch unser elliptisches Integral vermittelte Abbildung rein experimentell zu realisieren. —

*) Vgl. Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 6, 1897.


Hosted by Google

Dieselbe Betrachtung wie für die positive obere werden wir des Weiteren für die negative obere, die positive untere Halbebene u. s. w. durchführen können. *Auch diese Halbebenen bilden sich in der t-Ebene in Rechtecke von der soeben geschilderten Gestalt ab.*

Die Lage dieser Rechtecke gegen das Abbild der positiven oberen Halbebene hängt von dem Integrationswege ab, insbesondere davon, in welchem Intervalle wir die reelle Axe überschreiten, um von der positiven oberen in die nunmehr abzubildenden Halbebenen zu gelangen. Die positive obere Halbebene hängt beispielsweise mit der negativen oberen längs der Strecke $-\infty\, e$ zusammen. Überschreiten wir also, von e beginnend, bei der Integration diese Strecke, so kommen wir zu Werten von t, welche der negativen oberen Halbebene entsprechen. In der t-Ebene füllen diese Punkte ein Rechteck aus, welches sich an die Seite $t = 0$ bis $t = i\omega'$ des ursprünglichen Rechtecks nach links hin anlegt. Treten wir andrerseits, durch die Verzweigungslinie ee' hindurch, in das negative untere Blatt ein, so gelangt der repräsentierende Punkt der t-Ebene in das Innere eines Rechtecks, welches eine Abbildung der negativen unteren Halbebene vorstellt. Dieses Rechteck legt sich an das Abbild der Linie ee', d. h. an die Rechtecksseite $t = 0$ bis $t = \omega$ nach unten hin an. Gehen wir sodann auf der Riemannschen Fläche von der negativen unteren in die positive untere Halbebene, indem wir wieder die Linie $-\infty$ bis e überschreiten, so entspricht dem in der t-Ebene der Übergang zu einem neuen Rechteck, welches mit dem Abbilde der negativen unteren Halbebene die Seite von $-i\omega'$ bis 0 gemeinsam hat. Im Ganzen haben wir so eine Abbildung unserer vier Halbebenen, d. h. eine Abbildung der ganzen Riemannschen Fläche gewonnen. *Diese besteht aus einem großen Rechteck, welches den Nullpunkt der t-Ebene zum Mittelpunkte hat und welches sich aus unseren vier kleinen Rechtecken zusammensetzt.* Wir schraffieren von den letzteren diejenigen beiden, welche den schraffierten positiven Halbebenen entsprechen und bekommen das folgende Gesamtbild der Riemannschen Fläche (vgl. Fig. 63), durch welches diese in höchst übersichtlicher Weise auseinandergelegt erscheint. Ein solches Rechteck, welches die Perioden des elliptischen Integrals zu Seiten hat, bezeichnen wir als ein „Periodenrechteck“.

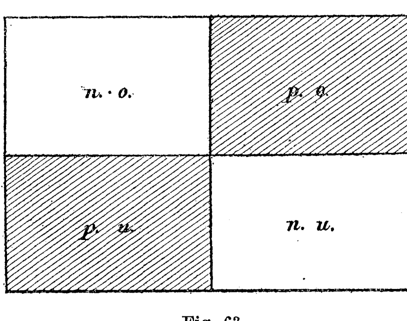


Fig. 63.

Einige Erläuterungen sind nur noch bezüglich der Randpunkte

unseres Periodenrechtecks erforderlich. Diese entsprechen, wie man gesehen hat, den Punkten der beiden Strecken $e'e''$ und $e''\infty$ in den vier Halbebenen. In diesen Strecken ist ersichtlich die Kontinuität unserer Abbildung unterbrochen. Während z. B. auf der geschlossenen Riemannschen Fläche, wie sie nach richtiger Zusammenfügung der Ränder unserer Verzweigungslinien vorliegt, die Strecke $e'e''$ des positiven oberen mit der Strecke $e'e''$ des negativen oberen Blattes direkt zusammenfällt, sind die Bilder dieser Strecken in der t-Ebene auf den gegenüberliegenden vertikalen Seiten des Periodenrechtecks gelegen; entsprechend liegen die Bilder der auf der Riemannschen Fläche zusammenfallenden Strecken $e''\infty$ in der t-Ebene auf den gegenüberliegenden horizontalen Rechtecksseiten. Wir müſsten uns, um eine durchaus stetige und durchaus eindeutige Abbildung der Riemannschen Fläche zu haben, die gegenüberliegenden Ränder des Rechtecks in der Weise zugeordnet vorstellen, daſs je zwei gegenüberliegende Randpunkte auch im Bilde als identisch gelten können. Indessen brauchen wir hierauf nicht näher einzugehen, da der beregte Miſsstand, die Diskontinuität der Abbildung, im Folgenden von selbst in Fortfall kommt, wenn wir unsere Figur weiter vervollständigen.

In der That ist unsere Abbildungsfigur noch nicht fertig. Wir sind vorher von der positiven oberen zur negativen oberen Halbebene durch die Strecke $-\infty e$ hindurch gegangen. Ebenso gut können wir aber auch durch $e'e''$ dahin gelangen. Thun wir das Letztere, so erhalten wir als Bild der negativen oberen Halbebene ein Rechteck, welches sich an das Abbild der Strecke $e'e''$, d. h. an die Seite ω bis $\omega + i\omega'$ unseres zuerst gezeichneten Rechtecks anlegt. Überhaupt giebt es von jeder positiven Halbebene zu den beiden negativen und von jeder negativen zu den beiden positiven auf der Riemannschen Fläche je zwei verschiedene Zugänge. Dementsprechend müssen wir die Figur so vervollständigen, daſs sich an jede freie Rechteckseite ein weiteres Rechteck anlegt, wobei jedes schraffierte Rechteck von vier nichtschraffierten, jedes nichtschraffierte von vier schraffierten umgeben wird. Als vervollständigte Abbildungsfigur bekommen wir daher ein *schachbrettartiges Muster*, wie es durch die Figur 64 dargestellt wird. Der einzelne Horizontalstreifen enthält dabei entweder nur Bilder der Halbebenen des oberen oder des unteren Blattes. Ein System von Periodenrechtecken ist durch etwas stärkeres Ausziehen der Begrenzungen aus dem System der kleineren Rechtecke herausgehoben.

Diese Rechtecksteilung zusammen mit der Vorstellung der Riemannschen Fläche giebt den einfachsten und vollständigsten Begriff von der analytischen Beziehung zwischen den Gröſsen t und u, bez. $\sqrt{U}$.

Hosted by Google

Betrachten wir zunächst t als Funktion von u, indem wir uns die obere Grenze u als einen bestimmten Punkt der Riemannschen Fläche gegeben denken, d. h. indem wir uns aufser dem Werte von u auch noch das Vorzeichen von $\sqrt{U}$ in bestimmter Weise gewählt denken. (Die untere Grenze soll wie früher in dem Verzweigungspunkte e liegen.) Wir sahen bereits pag. 400, dafs der Wert von t durch Angabe der oberen Grenze nicht vollständig bestimmt ist. Je nach der Gestalt des Integrationsweges erhält man unendlich viele Werte von t, welche sich um Vielfache der Perioden 2ω und $2i\omega'$ unterscheiden. Dieser Sachverhalt kommt in unserer Rechtecksteilung besonders deutlich zum Ausdrucke. Da nämlich jede Halbebene der Riemannschen Fläche sich in unendlich viele Rechtecke der t-Ebene abbildet, giebt es zu jedem Punkte der Fläche unendlich viele zugehörige Punkte der t-Ebene und zwar befindet sich in jedem Periodenrechtecke ein solcher Punkt. Verschieben wir unsere ganze Figur parallel mit sich um 2ω in Richtung der reellen oder um $2\omega'$ in Richtung der imaginären Axe, so kommt sie allemal mit sich zur Deckung; dabei geht jedes Rechteck in ein ebenso bezeichnetes Rechteck, jeder Punkt in einen Punkt über, dem auf der Riemannschen Fläche immer dieselbe Stelle entspricht. Wir wollen alle diese Punkte als *äquivalente Punkte* bezeichnen. Ist also t irgend ein Punkt der t-Ebene, welcher der gegebenen Stelle u, $\sqrt{U}$ der Riemannschen Fläche entspricht, so werden die äquivalenten Punkte dargestellt durch

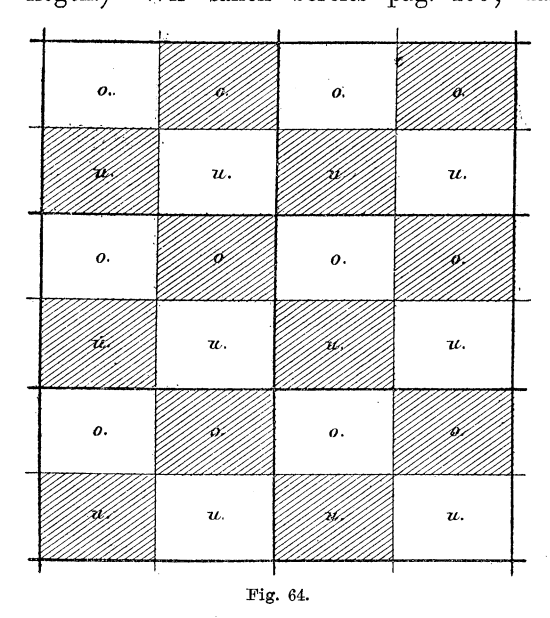


Fig. 64.

$$t + 2m\omega + 2m'i\omega',$$

wo m und m' irgend welche positiven oder negativen ganzen Zahlen bedeuten. Alle diese Werte von t gehören zu derselben oberen Grenze u, $\sqrt{U}$ des Integrals. In analytischer Hinsicht ziehen wir hieraus namentlich den Schlufs:

Als Funktion der oberen Grenze aufgefafst, ist t eine unendlich vieldeutige Funktion.

Jetzt geben wir uns umgekehrt den Wert von t und fragen nach zugehörigen Werten von u. Jedem Punkt der t-Ebene entspricht auf der Riemannschen Fläche und um so mehr in der u-Ebene ein und nur ein ganz bestimmter Punkt. Daraus folgt sofort:

Als Funktion von t aufgefaſst, ist u eine eindeutige Funktion.

Nun ist es analytisch sicher vorteilhafter, mit eindeutigen wie mit vieldeutigen Funktionen zu operieren. Gleichzeitig bemerkten wir zu Anfang des vorigen Paragraphen, daſs es vom Standpunkte der Mechanik wünschenswert ist, die Elemente der Bewegung direkt in ihrer Abhängigkeit von der Zeit darzustellen. *Beide Gründe veranlassen uns, unser elliptisches Integral „umzukehren", d. h. in Zukunft t als die unabhängige Variable anzusehen und die Gröſse u als Funktion von t darzustellen.*

Über die Eigenschaften der Funktion u von t (wir schreiben kurz $u = u(t)$) können wir sogleich noch eine nähere Bestimmung hinzufügen. Wenn wir nämlich den Wert des Argumentes um Vielfache der beiden Perioden 2ω und $2i\omega'$ vermehren, so kommen wir, wie bemerkt, in der t-Ebene zu Punkten, welche derselben Stelle der Riemannschen Fläche entsprechen. u bleibt also ungeändert bei Vermehrung des Arguments um eine der beiden Perioden. Wir sagen: *u ist eine doppeltperiodische Funktion von t*, oder *u ist eine elliptische Funktion.*

Eigentlich müſsten wir auch ausdrücklich beweisen: *u ist eine analytische Funktion, eine Funktion des komplexen Argumentes t.* Indessen wollen wir uns in dieser Hinsicht auf den Satz der allgemeinen Funktionentheorie berufen, daſs durch Umkehrung einer analytischen Funktion immer wieder eine analytische Funktion entsteht. Da nun t seiner Integraldarstellung nach sicher eine Funktion des komplexen Argumentes u ist, so schlieſsen wir, daſs auch die Funktion $u(t)$ eine analytische Funktion werden muſs.

Auf die wirkliche Berechnung der Funktion $u(t)$ brauchen wir im Einzelnen nicht einzugehen, weil wir im Folgenden diese Funktion doch wieder verlassen und noch einfachere Funktionen (die sogenannten ϑ-Funktionen) kennen lernen werden, aus denen sich unter Anderem auch die doppeltperiodische Funktion u in bequemster Weise zusammensetzen läſst.

Wir wollen nun zeigen, daſs die Einführung des überall endlichen Integrales t als unabhängiger Variabler noch für eine groſse Klasse weiterer Funktionen von wesentlichem Vorteil wird. *Wir werden nämlich sehen, daſs zahlreiche Funktionen, welche in ihrer Abhängigkeit von u mehrdeutig sind, durch Einführung von t eindeutig gemacht oder, wie wir kurz sagen wollen, „uniformisiert" werden.*

Hosted by Google

Es sind dieses in erster Linie *die auf der Riemannschen Fläche eindeutigen Funktionen*, insbesondere also die rationalen Funktionen von u und $\sqrt{U}$. In der That zeigt unsere Rechtecksteilung nicht nur, daſs jedem Punkte der t-Ebene ein und nur ein Punkt der u-Ebene entspricht, sondern auch eine und nur eine Stelle der Riemannschen Fläche. Der Ort auf der Riemannschen Fläche und die sämtlichen auf ihr eindeutigen Funktionen hängen also von dem Orte in der t-Ebene, d. h. von dem Werte des überall endlichen Integrals in eindeutiger Weise ab.

Als einfachstes Beispiel betrachten wir etwa die in der u-Ebene zweiwertige, auf der Riemannschen Fläche aber eindeutige Funktion $\sqrt{U}$. Daſs diese auch in der t-Ebene eindeutig ist, läſst sich sofort verifizieren. Da nämlich

$$t = \int \frac{du}{\sqrt{U}},$$

so folgt

$$\sqrt{U} = \frac{du}{dt} = u'(t);$$

durch Einführung der Variabeln t wird also insbesondere die in u zweiwertige Funktion $\sqrt{U}$ uniformisiert.

Die uniformisierende Wirkung von t reicht aber noch viel weiter: *Es werden nicht nur die auf der Riemannschen Fläche eindeutigen Gröſsen eindeutige Funktionen von t, sondern auch alle auf der Fläche mehrdeutigen Gröſsen, deren Mehrdeutigkeit von derselben Beschaffenheit ist, wie die Mehrdeutigkeit des überall endlichen Integrales selbst, d. h. welche bei allen denjenigen Umläufen ungeändert bleiben, die den Wert von t ungeändert lassen.* (Insbesondere müssen die fraglichen Gröſsen natürlich relativ zur Riemannschen Fläche unverzweigt sein.)

Zum Beweise bedenke man, daſs jeder Umlauf auf der Riemannschen Fläche, bei dem sich der Wert der zu uniformisierenden Funktion ändert, nach Voraussetzung auch den Wert der Variabeln t abändert und daher in ein anderes Gebiet der t-Ebene führt. Die verschiedenen Werte der fraglichen Funktion, welche eventuell zu demselben Punkte der Riemannschen Fläche gehören, kommen also in der t-Ebene an lauter verschiedene Stellen zu liegen.

Auf unsere Parameter α, β, γ, δ findet dieses wichtige Prinzip unmittelbare Anwendung. Wir sahen ja pag. 405, daſs die α, β, γ, δ auf der Riemannschen Fläche unverzweigt sind, und daſs sie nur bei denjenigen Umgängen (und zwar um gewisse charakteristische Faktoren) geändert werden, welche auch den Wert des überall endlichen Integrals (und zwar um die additiven Perioden 2ω, $2i\omega'$) abändern.

Wir können also sagen:

Hosted by Google

Unsere auf der Riemannschen Fläche unendlich vieldeutigen, aber unverzweigten Parameter α, β, γ, δ werden in der t-Ebene eindeutig.

Die so entstehenden eindeutigen und, wie wir hinzufügen können, analytischen Funktionen $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$, $\delta(t)$ sind wie gesagt nicht doppeltperiodisch, da sie sich beim Übergang von einem Periodenrechteck zu einem anderen je um einen konstanten Faktor ändern; wir bezeichnen sie mit Hermite (s. u.) trotzdem gleichfalls als *elliptische Funktionen* und zwar genauer als *elliptische Funktionen zweiter Art*, zum Unterschied von den rein doppeltperiodischen Funktionen, die wir *elliptische Funktionen erster Art* nennen.

Des Weiteren fragen wir nach den Null- und Unendlichkeitsstellen unserer elliptischen Funktionen $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$, $\delta(t)$ in der t-Ebene, da sich auf die Lage dieser Stellen die spätere analytische Darstellung unserer Parameter gründet. Die Null- und Unendlichkeitsstellen der Gröfsen α, β, γ, δ sind natürlich mit den logarithmischen Unendlichkeitsstellen von $\log\alpha$, $\log\beta$, $\log\gamma$, $\log\delta$ identisch. Die Verteilung der letzteren haben wir in Figur 61 übersichtlich dargestellt, unter der Annahme

$$N > n > 0.$$

Dieselbe Annahme soll auch für das Folgende zu Grunde gelegt werden.

Insbesondere untersuchen wir etwa die Funktion $\alpha(t)$. Nach Figur 61a wird $\log\alpha$ unendlich grofs für $u = -1$ und $u = \infty$ und zwar verhält sich $\log\alpha$ nach pag. 402

$$\text{für } u = -1 \text{ wie } \log(u+1), \quad \text{für } u = \infty \text{ wie } \log\sqrt{u}.$$

Gehen wir von dem Logarithmus zum Numerus über, so sehen wir: Der Parameter α verschwindet für $u = -1$, er wird unendlich für $u = \infty$.

In der t-Ebene entspricht dem Werte $u = \infty$ nach Figur 62 der Punkt $t = i\omega'$ bez. einer der äquivalenten Punkte

$$\text{(I)} \qquad t = i\omega' + 2m\omega + 2m'i\omega'.$$

Ferner bildet sich die Stelle $u = -1$ des oberen Blattes, wie gleichfalls aus Figur 62 hervorgeht, in einen Punkt ab, welcher auf der imaginären Axe zwischen $t = 0$ und $t = i\omega'$ liegt — wir bezeichnen den zugehörigen t-Wert mit ia — bez. in einen der äquivalenten Punkte; alsdann bestimmt sich a durch das schon pag. 263 angegebene Integral:

$$ia = \int_e^{-1} \frac{du}{\sqrt{U}}.$$

Die Gesamtheit der äquivalenten Stellen, d. h. aller derjenigen Punkte der t-Ebene, welche Bildpunkte der Stelle $u = -1$ im oberen Blatte der Riemannschen Fläche darstellen, ist daher gegeben durch

$$\text{(II)} \qquad t = ia + 2m\omega + 2m'i\omega'.$$

Wir wissen bereits, dafs $\alpha(t)$ in den Punkten (I) unendlich grofs wird, in den Stellen (II) verschwindet. Wir wollen noch die Ordnung des Verschwindens und die Ordnung des Unendlichwerdens feststellen. Zu dem Zwecke erinnern wir daran, dafs sich $\log \alpha$ bei einem auf der Riemannschen Fläche geschlossenen einmaligen Umlauf um die Stellen $u = -1$ und $u = \infty$ um $\pm 2\pi i$ ändert (vgl. pag. 404). Bei der konformen Abbildung auf die t-Ebene geht aber ein einmaliger geschlossener Umlauf auf der Riemannschen Fläche in einen ebensolchen Umlauf in der t-Ebene über, wie sich aus dem Begriffe der konformen Abbildung ergiebt. Die Null- und Unendlichkeitsstellen von α sind also so beschaffen, dafs $\log \alpha$ bei einer einmaligen Umlaufung derselben den Zuwachs $\pm 2\pi i$ annimmt. Dies besagt aber gerade, dafs die Ordnung des Verschwindens und Unendlichwerdens gleich 1 ist. Mithin können wir sagen:

Die Punkte (I) *sind einfache Unendlichkeitsstellen, die Punkte* (II) *einfache Nullstellen der Funktion* $\alpha(t)$. *Andere Null- und Unendlichkeitsstellen besitzt* α *nicht.*

In ähnlicher Weise ergeben sich die Null- und Unendlichkeitsstellen von β, γ und δ in der t-Ebene. Greifen wir z. B. γ heraus. Auf der Riemannschen Fläche wird $\log \gamma$ logarithmisch unendlich für $u = \infty$ und (vgl. Fig. 61) für $u = +1$ im oberen Blatte. In der t-Ebene entspricht dem Unendlichen der Riemannschen Fläche die Stelle $t = i\omega'$ und die äquivalenten Stellen. Die Gesamtheit dieser Stellen wird wieder dargestellt durch

$$\text{(I)} \qquad t = i\omega' + 2m\omega + 2m'i\omega'.$$

Dem Punkte $u = +1$ des oberen Blattes gehört in der t-Ebene nach Fig. 62 ein Punkt auf der Rechtecksseite zwischen $t = \omega$ und $t = \omega + i\omega'$ zu. Der Abstand dieses Punktes von der Axe der reellen Zahlen heifse b; man berechnet b, wie schon pag. 263 angegeben, indem man das überall endliche Integral im oberen Blatte von dem Verzweigungspunkte e' bis zum Punkte 1 etwa geradlinig erstreckt:

$$ib = \int_{e'}^{1} \frac{du}{\sqrt{U}}.$$

Der Wert von t in dem genannten Punkte wird alsdann $t = \omega + ib$. Aufser diesem Punkte haben wir natürlich die sämtlichen äquivalenten Punkte

Hosted by Google

(II) $$t = \omega + ib + 2m\omega + 2m'i\omega'$$

zu berücksichtigen. Darauf schliefsen wir ebenso wie oben, *dafs die Stellen* (I) *einfache Unendlichkeitsstellen, die Stellen* (II) *einfache Nullstellen und zwar die einzigen Null- und Unendlichkeitsstellen der Funktion* $\gamma(t)$ *sind.*

Die noch fehlenden Null- und Unendlichkeitsstellen von β und δ ergeben sich darauf aus der Bemerkung, dafs α und δ einerseits, β und $-\gamma$ andrerseits konjugiert imaginäre Gröfsen sind. Dies folgte für reelle Werte von t aus der ursprünglichen Definition unserer Parameter (vgl. pag. 21); es gilt aber auch für konjugiert komplexe Werte der Zeit, wie unmittelbar aus der Integraldarstellung der Logarithmen von α, β, γ, δ hervorgeht. Mithin werden auch die Nullstellen von β und δ denen von α und γ konjugiert sein; wir erhalten diese aus den unter (II) angegebenen Werten, indem wir einfach $+ia$, $+ib$ mit $-ia$, $-ib$ vertauschen. Ferner werden die Unendlichkeitsstellen von β und δ mit denen von α und γ direkt übereinstimmen, da die unter (I) angegebenen Punkte in ihrer Gesamtheit sich selbst konjugiert sind. Die vollständige Tabelle der Null- und Unendlichkeitsstellen unserer vier Parameter sieht daher folgendermafsen aus:

	Nullstellen.	Unendlichkeitsstellen.
α	$+ia + 2m\omega + 2m'i\omega'$	$i\omega' + 2m\omega + 2m'i\omega'$.
β	$+\omega - ib + 2m\omega + 2m'i\omega'$	
γ	$-\omega + ib + 2m\omega + 2m'i\omega'$	
δ	$-ia + 2m\omega + 2m'i\omega'$	

Nunmehr sind wir in der Lage, die explicite Darstellung unserer Parameter als Funktionen der Zeit zu entwickeln. Diese gründen wir auf die sogenannten ϑ-Funktionen, welche seit Jacobi in der Theorie der elliptischen Transcendenten eine ganz fundamentale Rolle spielen.

§ 4. Darstellung der $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ durch ϑ-Quotienten.

Die ϑ-Funktionen sind eindeutige Funktionen ihres Argumentes, welches wir mit t bezeichnen, die im Endlichen nirgends unendlich werden. Sie besitzen, ähnlich wie die α, β, γ, δ, ein System äquivalenter Nullstellen, von dem auf jedes Periodenrechteck eine Nullstelle entfällt; beim Übergange von einem Periodenrechteck zu einem anderen multiplizieren sie sich je mit einem charakteristischen Faktor, welcher aber nicht, wie bei den α, β, γ, δ, von t unabhängig ist. Eine weitere Eigenschaft der ϑ-Funktionen, welche für unsere Zwecke

Hosted by Google

besonders wertvoll ist, besteht darin, dafs sie sich aufserordentlich gut konvergenter und für die numerische Rechnung geeigneter Reihendarstellungen erfreuen.*)

In der Bezeichnung der ϑ-Funktionen herrscht bei den verschiedenen Autoren leider eine grofse Verschiedenheit. Wir werden uns hier an keine der üblichen Bezeichnungen genau halten, was insofern unbedenklich ist, als unsere Darstellung für sich genommen verständlich sein soll.

Während Jacobi vier nicht wesentlich unterschiedene ϑ-Funktionen neben einander betrachtet, werden wir mit einer solchen auskommen. Wir bezeichnen sie durch $\vartheta(t)$ und richten die Definition so ein, dafs ϑ eine ungerade Funktion von t wird, dafs sie also im Nullpunkte der t-Ebene sowie in den sämtlichen äquivalenten Punkten und nur in diesen verschwindet. Formal sei unsere ϑ-Funktion durch die folgende Reihe gegeben:

$$(1) \qquad \vartheta(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{(n)}\, e^{-\frac{\omega'}{\omega}\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2 \pi + \frac{t+\omega}{\omega}\,\frac{2n-1}{2}\,\pi i}.$$

Mit Benutzung der Abkürzungen

$$(2) \qquad q = e^{-\frac{\omega'}{\omega}\pi}, \qquad s = \frac{t\pi}{2\omega}$$

können wir, was gelegentlich bequem sein wird, hierfür auch schreiben:

$$(3) \qquad \vartheta(t) = 2q^{1/4}\sin s - 2q^{9/4}\sin 3s + 2q^{25/4}\sin 5s - \cdots.$$

Die Jacobische Bezeichnung für unsere Funktion würde lauten:

$$\mathrm{H}\left(\frac{t\pi}{2\omega}\right).$$

Die Eigenschaften der ϑ-Funktion, welche oben bereits allgemein angedeutet wurden, lassen sich nun für unsere spezielle Auswahl derselben auf Grund der Gleichung (1) leicht verifizieren.

Zunächst sieht man, dafs unsere Funktion eindeutig und für alle endlichen Werte von t endlich ist. Die Reihe (1) konvergiert nämlich, wie man leicht nachweist, in der ganzen t-Ebene.

---

*) Statt der ϑ-Funktion wird in der Litteratur jetzt meist die von Weierstrass eingeführte σ-Funktion gebraucht, welche sich von der ϑ-Funktion nur um einen Exponentialfaktor unterscheidet. Wir ziehen die ϑ-Funktion für unsere Zwecke vor, weil ihre Verwendung weniger Vorbereitungen erfordert und die spezifischen Vorzüge der σ-Funktion hier doch nicht zur Geltung kommen. Überdies ist die ϑ-Funktion für die numerische Berechnung, die wir stets im Auge behalten müssen, hinterher doch unentbehrlich.

Hosted by Google

Wir bestimmen sodann das Verhalten der ϑ-Funktion bei Vermehrung ihres Argumentes um Periodenvielfache. Offenbar ändert eine Hinzufügung der reellen Periode 2ω in jedem einzelnen Gliede der Reihe (3) nur das Vorzeichen. Wir haben also

$$(4) \qquad \vartheta(t + 2\omega) = -\vartheta(t).$$

Fügen wir die imaginäre Periode $2i\omega'$ hinzu, setzen also $t + 2i\omega'$ statt t, so wird der Exponent des allgemeinen Gliedes in (1)

$$-\frac{\omega'}{\omega}\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2\pi - \frac{\omega'}{\omega}(2n-1)\pi + \frac{t+\omega}{\omega}\,\frac{2n-1}{2}\pi i =$$

$$-\frac{\omega'}{\omega}\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2\pi + \frac{\omega'}{\omega}\pi + \frac{t+\omega}{\omega}\,\frac{2n+1}{2}\pi i - \frac{t+\omega}{\omega}\pi i.$$

Dieser Exponent hat also den von n unabhängigen Zuwachs

$$\frac{\omega'}{\omega}\pi - \frac{t+\omega}{\omega}\pi i$$

bekommen und aufserdem hat sich der Stellenzeiger n um eine Einheit vermehrt. Durch letzteren Umstand wird aber der Wert der Reihe nicht geändert, da n von $-\infty$ bis $+\infty$ läuft. Wir finden daher

$$(5) \qquad \vartheta(t + 2i\omega') = -e^{\frac{\omega'}{\omega}\pi - \frac{t\pi i}{\omega}}\,\vartheta(t).$$

Die Funktionaleigenschaften (4) und (5) können umgekehrt zusammen mit der Forderung, dafs ϑ nirgends unendlich werden soll, dazu dienen, um die ϑ-Funktion bis auf einen konstanten Faktor zu definieren, was wir nur historisch anführen.

Um von hieraus zu der in Aussicht gestellten Darstellung unserer Parameter zu gelangen, betrachten wir nun den Quotienten

$$\frac{\vartheta(t - ia)}{\vartheta(t - i\omega')}.$$

Derselbe wird null bez. unendlich grofs an den Stellen $t = ia$ bez. $t = i\omega'$ und den äquivalenten Stellen, und zwar beides von der ersten Ordnung. Dieser Ausdruck besitzt also dieselben Null- und Unendlichkeitsstellen wie unsere Funktion $\alpha(t)$ (vgl. den vorigen Paragraphen). Er unterscheidet sich von der letzteren demnach nur um einen Faktor, welcher für keinen endlichen Wert von t verschwindet oder unendlich grofs wird, dessen Logarithmus also für keinen endlichen Wert von t unendlich grofs werden kann. Einem solchen Faktor können wir stets die Form geben

$$e^{G(t)},$$

wo $G(t)$ eine Funktion ist, die im Endlichen nirgends unendlich wird, eine sogenannte ganze transcendente Funktion. Wir haben also die Gleichung

$$(6) \qquad \alpha(t) = e^{G(t)}\,\frac{\vartheta(t - ia)}{\vartheta(t - i\omega')}.$$

Hosted by Google

In unserem Falle folgt nun aus den Eigenschaften des Parameters $\alpha(t)$ einerseits und der ϑ-Funktion andrerseits, dafs sich die *transcendente ganze* Funktion auf eine *lineare ganze* Funktion reduzieren mufs. Nach den soeben bewiesenen Funktionalgleichungen der ϑ-Funktion multipliziert sich nämlich der ϑ-Quotient auf der rechten Seite bei Vermehrung von t um eine der beiden Perioden mit einem konstanten Faktor, nämlich mit

bei Hinzufügung von 2ω, mit
$$+1$$
$$e^{-\frac{a-\omega'}{\omega}\pi}$$
bei Hinzufügung von $2i\omega'$. Ferner wissen wir (vgl. pag. 414), dafs auch $\alpha(t)$ bei Vermehrung von t um eine der beiden Perioden einen von t unabhängigen Faktor annimmt. Die Faktoren der rechten und linken Seite in unserer Gleichung müssen übereinstimmen; wir haben daher, unter c und c' zwei Konstanten verstanden, die sich aus den genannten Faktoren zusammensetzen,
$$G(t+2\omega) \quad - G(t) = c,$$
$$G(t+2i\omega') - G(t) = c',$$
woraus durch Differentiation nach t folgt:
$$G'(t+2\omega) \quad = G'(t),$$
$$G'(t+2i\omega') = G'(t).$$
Hiernach wäre $G'(t)$ eine doppeltperiodische Funktion, welche im Endlichen nirgends unendlich wird. In der Funktionentheorie wird aber gezeigt, dafs eine solche Funktion notwendiger Weise eine Konstante ist. Wir haben also etwa
$$G'(t) = l$$
und

(7) $$e^{G(t)} = k e^{lt},$$

wo k und l gewisse von t unabhängige Gröfsen sind, welche wir sogleich näher angeben werden.

Die explicite Form der Funktion $\alpha(t)$ ist nun auf Grund der Gleichungen (6) und (7) bekannt. Fügen wir die analog gebauten und ebenso abzuleitenden Ausdrücke für β, γ und δ hinzu, so erhalten wir:

(8) $$\begin{cases} \alpha = k_1 e^{l_1 t} \dfrac{\vartheta(t-ia)}{\vartheta(t-i\omega')}, \\ \beta = k_2 e^{l_2 t} \dfrac{\vartheta(t-\omega+ib)}{\vartheta(t-i\omega')}, \\ \gamma = k_3 e^{l_3 t} \dfrac{\vartheta(t+\omega-ib)}{\vartheta(t+i\omega')}, \\ \delta = k_4 e^{l_4 t} \dfrac{\vartheta(t+ia)}{\vartheta(t+i\omega')}. \end{cases}$$

Wir sind damit zu dem Resultate gelangt: *Unsere Parameter α, β, γ, δ werden dargestellt je durch einen einfachen ϑ-Quotienten, zu dem noch eine Exponentialgröſse und eine Konstante als Faktor hinzutritt.*

Übrigens ist es nur nötig, zwei dieser Ausdrücke, etwa α und β zu berechnen, weil alsdann die beiden anderen Parameter als konjugiert imaginäre Gröſsen mitbestimmt sind.

Man bemerke noch, daſs die hier eingeschlagene Methode recht eigentlich dem schönen Prinzipe entspricht, welches Riemann in allen seinen Untersuchungen zur Geltung gebracht hat: Zuerst die Eigenschaften der zu behandelnden Funktionen zu diskutieren und alles Formelmäſsige bis zum Schluſs zurückzudrängen, wo es sich gleichsam von selbst aus den festgestellten Eigenschaften der Funktionen ergeben muſs. So haben wir in der That unsere analytische Darstellung (8) als eine notwendige Konsequenz der vorhergehenden Untersuchungen über die Eindeutigkeit unserer Funktionen, über die Lage ihrer Null- und Unendlichkeitsstellen gewonnen.

Um die prinzipielle Bedeutung der Ausdrücke (8) ins rechte Licht zu setzen, schicken wir einige historische Bemerkungen hinsichtlich der elliptischen Funktionen voraus.

Ursprünglich verstand man seit Jacobi unter einer elliptischen Funktion ausschlieſslich eine solche Funktion, welche bei Vermehrung des Argumentes um Periodenvielfache *völlig ungeändert* bleibt.

Man zeigt*), daſs eine so definierte elliptische Funktion in dem von den Perioden 2ω und $2i\omega'$ gebildeten Rechtecke (oder allgemeiner gesagt, Parallelogramme) jeden Wert, insbesondere die Werte Null und Unendlich die gleiche Anzahl von Malen annimmt. Diese Anzahl (n) heiſst der Grad der elliptischen Funktion. Ferner beweist man, daſs zwischen den Argumenten der in einem einzelnen Periodenrechteck gelegenen Nullstellen (a_ν) und denen der Unendlichkeitsstellen (b_ν) die Relation besteht:

$$\Sigma a_\nu - \Sigma b_\nu = 2\mu\omega + 2i\mu'\omega',$$

unter μ und μ' zwei ganze Zahlen verstanden. Es ist nun immer möglich, eine elliptische Funktion durch einen ϑ-Quotienten auszudrücken, in der Form:

$$k e^{lt} \prod_{\nu=1,\ldots n} \frac{\vartheta(t-a_\nu)}{\vartheta(t-b_\nu)}.$$

In der That besitzt dieser Ausdruck vermöge der oben angegebenen Funktionaleigenschaften der ϑ-Funktion die geforderte Periodicität

*) Diese allgemeinen Sätze sind wohl zuerst von Liouville erkannt worden. Vgl. seine Note: Sur les fonctions elliptiques. Liouvilles Journal, Bd. XX, 1855.


Hosted by Google

wenn man noch die Gröfse l gleich $\frac{i\pi\mu'}{\omega}$ wählt. Insbesondere bemerken wir noch, dafs ein reiner ϑ-Quotient ($l = 0$) jedenfalls dann eine doppeltperiodische Funktion darstellt, wenn die Argumentensumme des Zählers gleich der des Nenners ist.

Später hat Hermite*) darauf aufmerksam gemacht, dafs man namentlich in den mechanischen Anwendungen auf allgemeinere ϑ-Quotienten geführt wird, zwischen deren Null- und Unendlichkeitsstellen die soeben angegebene Relation nicht besteht, und dafs es der Mühe wert ist, diese Quotienten als selbständige Elemente in die Theorie einzuführen. Er belegt sie mit dem schon pag. 415 benutzten Namen der *elliptischen Funktionen zweiter Art* und unterscheidet die rein periodischen Funktionen von ihnen als *elliptische Funktionen erster Art.* Eine elliptische Funktion zweiter Art ändert sich, wenn man das Argument t um Perioden wachsen läfst, je um einen konstanten Faktor; sie verhält sich, wie wir sagen, *multiplikativ.*

Die Anzahl der im Zähler (oder Nenner) stehenden ϑ-Funktionen giebt allemal den Grad der Funktion an. Dabei besteht folgender Unterschied zwischen den elliptischen Funktionen erster und zweiter Art: *Es giebt keine elliptischen Funktionen erster Art ersten Grades; dagegen sind elliptische Funktionen zweiter Art ersten Grades sehr wohl möglich.*

Wäre nämlich bei einer elliptischen Funktion erster Art $n = 1$, so hätten wir im Periodenparallelogramm nur eine Nullstelle und, wegen der für die a_ν, b_ν bestehenden Relation, eine mit jener zusammenfallende Unendlichkeitsstelle. Man könnte dann die ϑ-Funktion des Zählers gegen die des Nenners fortheben, sodafs sich die Funktion auf eine Konstante reduzieren müfste.

Diese Bemerkung findet auf elliptische Funktionen zweiter Art keine Anwendung, weil bei ihnen die Relation zwischen den a_ν und b_ν in Fortfall kommt. Natürlich sind unter den elliptischen Funktionen zweiter Art diejenigen des ersten Grades die allereinfachsten und wichtigsten. Wir sehen nun:

Unsere Parameter α, β, γ, δ sind in der Hermiteschen Terminologie gerade solche elliptische Funktionen zweiter Art ersten Grades. Die in kinematischer Hinsicht einfachsten Elemente der Kreiselbewegung erscheinen also auch in der analytischen Darstellung so einfach wie irgend möglich.

Nicht so einfach — und darin beruht gerade die analytische Überlegenheit unserer Parameter — stellt sich die explicite Darstellung der

*) In der pag. 151 citierten Schrift.

Hosted by Google

Eulerschen Winkel φ, ψ, ϑ oder richtiger ihrer trigonometrischen Funktionen.

Die Funktion $\cos\vartheta = u(t)$ haben wir schon im vorigen Paragraphen betrachtet. Diese Funktion ist, da sie bei Vermehrung des Argumentes um Perioden völlig ungeändert bleibt, eine elliptische Funktion erster Art, aber nicht vom ersten Grade (doppelperiodische Funktionen ersten Grades sind ja nach Obigem überhaupt unmöglich), sondern vom zweiten Grade. In der That sieht man sofort, dafs $u(t)$ an zwei (verschiedenen oder zusammenfallenden) Stellen des Periodenrechtecks null und unendlich wird. Dem Punkte $u = 0$ der u-Ebene entsprechen nämlich auf der Riemannschen Fläche zwei verschiedene Stellen, eine im unteren und eine im oberen Blatte, und daher auch in jedem Periodenrechtecke der t-Ebene zwei verschiedene Punkte. Die Stelle $u = \infty$ andrerseits ist ein Verzweigungspunkt; ihr Bild in der t-Ebene ($t = i\omega'$) ist daher doppelt zu zählen. Dementsprechend werden in der Darstellung der Funktion $u(t)$ vier ϑ-Funktionen auftreten, zwei im Zähler und zwei (unter sich gleiche, mit dem Argumente $t - i\omega'$) im Nenner.

Ahnlich liegt die Sache bei dem Winkel ψ. Zunächst werden wir, da der Multiplikator der logarithmischen Unendlichkeitsstellen von ψ nach pag. 400 $\pm\frac{i}{2}$ beträgt, statt ψ lieber $2i\psi$ betrachten. Dadurch kommen wir auch hier zu dem Multiplikator ± 1 zurück. Gehen wir nun zu der zugehörigen Exponentialfunktion $e^{2i\psi}$ über, so zeigen wir ebenso wie bei den α, β, γ, δ, dafs diese Funktion auf der Riemannschen Fläche unverzweigt und in der t-Ebene daher eindeutig ist. Ihre Null- und Unendlichkeitsstellen sind nach Früherem bekannt. Da ψ für $u = \pm 1$ logarithmisch unendlich wird, so verschwindet $e^{2i\psi}$ auf der Riemannschen Fläche an diesen beiden Stellen je in einem der beiden Blätter und wird in dem anderen Blatte von der ersten Ordnung unendlich.

Die entsprechenden Stellen der t-Ebene sind die Punkte $\pm ia$ und $\pm ib$ (bez. die äquivalenten Stellen). Auf diese vier Stellen verteilen sich also die Null- und Unendlichkeitsstellen von ψ. Dementsprechend wird sich die analytische Darstellung aus den ϑ-Funktionen: $\vartheta(t + ia)$, $\vartheta(t - ia)$, $\vartheta(t + ib)$, $\vartheta(t - ib)$ in dem Sinne zusammensetzen, dafs zwei dieser Funktionen im Zähler, zwei im Nenner auftreten. Wir haben es also jedenfalls mit einer *elliptischen Funktion zweiten Grades* zu thun. Aus den Eigenschaften des elliptischen Integrales für ψ folgt ferner, dafs $e^{2i\psi}$ beim Übergang zu einem anderen Periodenrechtecke der t-Ebene nicht ungeändert bleibt, sondern sich

mit einem von t unabhängigen Faktor multipliziert. $e^{2i\psi}$ stellt also wieder eine *elliptische Funktion zweiter Art dar.*

Berücksichtigen wir noch, daſs der Winkel φ sich ähnlich verhält wie ψ, so können wir zusammenfassend sagen:

Die trigonometrischen Funktionen

$$\cos\vartheta,\ \cos 2\psi + i\sin 2\psi,\ \cos 2\varphi + i\sin 2\varphi$$

der Eulerschen Winkel sind nicht, wie unsere Parameter $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ *elliptische Funktionen ersten, sondern zweiten Grades (und zwar teils von der ersten, teils von der zweiten Art).*

Übrigens können wir auch direkt die Darstellung der vorgenannten trigonometrischen Funktionen auf die Darstellung der $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ durch ϑ-Quotienten zurückführen. Wir brauchen zu dem Zwecke nur die Schemata (7) und (9) von pag. 20 und 21 zu vergleichen. Aus der letzten Horizontal- oder Vertikalreihe ergiebt sich nämlich:

$$(8') \quad \begin{cases} \cos\vartheta = \alpha\delta + \beta\gamma, & \sin\vartheta = \sqrt{-4\alpha\beta\gamma\delta}, \\ e^{2i\psi} = \dfrac{\alpha\beta}{\gamma\delta}, & e^{2i\varphi} = \dfrac{\alpha\gamma}{\beta\delta}. \end{cases}$$

Mit Rücksicht auf (8) haben wir in diesen Gleichungen die *explicite Darstellung der Eulerschen Winkel als Funktionen der Zeit* vor uns.

Um diese Betrachtungen abzuschlieſsen, haben wir noch die Bestimmung der Konstanten k_i und l_i aus den Gleichungen (8) nachzutragen.

Zunächst zeigen wir, daſs sich diese Konstanten paarweise auf einander reduzieren lassen, daſs wir nämlich haben:

$$(9) \quad \begin{cases} l_4 = -l_1, & l_3 = -l_2, \\ k_4 = k_1, & k_3 = k_2. \end{cases}$$

Die beiden letzten Relationen ergeben sich folgendermaſsen: Wir setzen in (8) $t = 0$ und erhalten zunächst, unter $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \delta_0$ die Anfangswerte von $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ verstanden:

$$(10) \quad \begin{cases} k_1 = \alpha_0 \dfrac{\vartheta(-i\omega')}{\vartheta(-ia)}, \quad k_2 = \beta_0 \dfrac{\vartheta(-i\omega')}{\vartheta(-\omega+ib)}, \quad k_3 = \gamma_0 \dfrac{\vartheta(+i\omega')}{\vartheta(+\omega-ib)}, \\ \qquad k_4 = \delta_0 \dfrac{\vartheta(+i\omega')}{\vartheta(+ia)}. \end{cases}$$

Die $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \delta_0$ können wir nach den Definitionsgleichungen (8) von pag. 21 durch die Anfangswerte $\vartheta_0, \varphi_0, \psi_0$ der Eulerschen Winkel ausdrücken. Von diesen sind aber die Gröſsen φ_0, ψ_0, welche die Anfangslage der X- und x-Axe gegen die Knotenlinie angeben, gänzlich willkürlich. In der That hängt der Charakter der eintretenden Bewegung in keiner Weise davon ab, wie wir die X-Axe in der

Hosted by Google

Äquatorebene des Kreisels und die x-Axe in der Horizontalebene orientieren. Ohne die Allgemeinheit zu beeinträchtigen, können wir also etwa anfangs die X- und x-Axe mit der Knotenlinie zusammenfallen lassen, d. h. $\varphi_0 = \psi_0 = 0$ nehmen.*) Dann aber zeigen die genannten Gleichungen von pag. 21, dafs $\alpha_0 = \delta_0$, $\beta_0 = \gamma_0$ ist. Gleichzeitig wird nach (10) mit Rücksicht darauf, dafs die hier vorkommenden ϑ-Quotienten paarweise gleich sind, wie behauptet wurde,

$$k_1 = k_4, \quad k_2 = k_3.$$

Die beiden ersten Relationen (9) folgern wir daraus, dafs die Produkte $\alpha\delta$ und $\beta\gamma$ leicht angebbare doppeltperiodische Funktionen sind. Wir haben nämlich (wieder nach den Gleichungen (8) von pag. 21):

$$(11) \qquad \alpha\delta = \frac{u+1}{2}, \qquad \beta\gamma = \frac{u-1}{2}.$$

Die beiden rechts stehenden Gröfsen sind aber ebenso wie u selbst doppeltperiodische Funktionen.

Wir wollen ihre Darstellung durch ϑ-Funktionen angeben. Es verschwindet $\frac{u+1}{2}$, wenn $u = -1$, d. h. $t = \pm ia$. Ebenso verschwindet $\frac{u-1}{2}$, wenn $u = +1$, d. h. $t = \pm(\omega - ib)$. Ferner wird sowohl $\frac{u+1}{2}$ wie $\frac{u-1}{2}$ unendlich, wenn $u = \infty$, d. h. $t = \pm i\omega'$ ist. Wir bilden nun die ϑ-Quotienten

$$\frac{\vartheta(t+ia)\,\vartheta(t-ia)}{\vartheta(t+i\omega')\,\vartheta(t-i\omega')} \quad \text{und} \quad \frac{\vartheta(t+\omega-ib)\,\vartheta(t-\omega+ib)}{\vartheta(t+i\omega')\,\vartheta(t-i\omega')}.$$

Dieses sind, (da beidemal die Argumentensumme des Zählers gleich der des Nenners ist), direkt doppeltperiodische Funktionen von denselben Null- und Unendlichkeitsstellen wie $\frac{u+1}{2}$ und $\frac{u-1}{2}$. Von diesen können sich unsere ϑ-Quotienten nur je um eine Konstante unterscheiden. Wir schreiben daher

$$(12) \qquad \begin{cases} \dfrac{u+1}{2} = k^2 \dfrac{\vartheta(t+ia)\,\vartheta(t-ia)}{\vartheta(t+i\omega')\,\vartheta(t-i\omega')}, \\[2ex] \dfrac{u-1}{2} = k'^2 \dfrac{\vartheta(t+\omega-ib)\,\vartheta(t-\omega+ib)}{\vartheta(t+i\omega')\,\vartheta(t-i\omega')}. \end{cases}$$

---

*) Wollten wir diese vereinfachende Annahme nicht machen, so würden die α, β, γ, δ in den Schlufsformeln je mit einem Faktor vom absoluten Betrage 1 behaftet erscheinen, nämlich bez. mit

$$e^{\frac{i(\varphi_0+\psi_0)}{2}}, \quad e^{\frac{i(-\varphi_0+\psi_0)}{2}}, \quad e^{\frac{i(\varphi_0-\psi_0)}{2}}, \quad e^{\frac{i(-\varphi_0-\psi_0)}{2}},$$

welcher notwendig unbestimmt bleibt und für alles Folgende belanglos ist.


Hosted by Google

Die hier eingeführten Konstanten k^2 und k'^2 ergeben sich leicht, wenn wir in der ersten Gleichung (12) etwa $t = \omega + ib$ und dementsprechend $u = +1$, in der zweiten $t = ia$ und $u = -1$ setzen. Dann erhalten wir nämlich

$$(13)\qquad \begin{cases} k^2 = \dfrac{\vartheta(\omega + i\omega' + ib)\,\vartheta(\omega - i\omega' + ib)}{\vartheta(\omega + ia + ib)\,\vartheta(\omega - ia + ib)}, \\ k'^2 = \dfrac{\vartheta(ia + i\omega')\,\vartheta(ia - i\omega')}{\vartheta(\omega + ia + ib)\,\vartheta(\omega - ia + ib)}. \end{cases}$$

Nunmehr tragen wir diese Werte von $\frac{u+1}{2}$ und $\frac{u-1}{2}$ in (11) ein und setzen gleichzeitig für $\alpha\delta$ und $\beta\gamma$ die aus (8) sich ergebenden Ausdrücke. Dann heben sich die von t abhängigen ϑ-Quotienten heraus und wir erhalten:

$$k_1 k_4\, e^{(l_1 + l_4)t} = k^2,$$
$$k_2 k_3\, e^{(l_2 + l_3)t} = k'^2.$$

Es mufs also sein

$$l_1 + l_4 = 0, \quad l_2 + l_3 = 0$$
$$k_1 k_4 = k^2, \qquad k_2 k_3 = k'^2.$$

Die erste Reihe liefert die Bestätigung der in den Gleichungen (9) ausgesprochenen Behauptung. Die zweite Reihe giebt mit Rücksicht auf dieselben Gleichungen:

$$(14)\qquad k_1 = k_4 = k, \quad k_2 = k_3 = k'.$$

Die Bestimmung der Konstanten k_i ist damit geleistet; es erübrigt nur noch, ein Wort über die Vorzeichen zu sagen, mit denen die Quadratwurzeln in k und k' gerechnet werden sollen. Dieselben ergeben sich aus den Anfangswerten der $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Da φ_0 und ψ_0 gleich Null genommen wurden und $\frac{\vartheta_0}{2}$ jedenfalls einen spitzen Winkel bedeutet, also $\cos\frac{\vartheta_0}{2}$ und $\sin\frac{\vartheta_0}{2}$ positive Gröfsen sind, so wird nach den Definitionsgleichungen der $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ von pag. 21 α_0 positiv reell, β_0 positiv imaginär. Die Vorzeichen von k und k' sind also so zu wählen, dafs sich für $t = 0$ aus den Gleichungen (8) von pag. 420 ein positiver Wert von α und ein positiv imaginärer Wert von β ergiebt. Berücksichtigt man nun, dafs, unter τ eine positive reelle Zahl $< 2\omega'$ verstanden, $\vartheta(+i\tau)$ positiv imaginär, $\vartheta(-i\tau)$ negativ imaginär, $\vartheta(\omega \pm i\tau)$ positiv reell, $\vartheta(-\omega \pm i\tau)$ negativ reell ist, wie leicht aus der Reihe (3) zu schliefsen ist, so erkennt man, *dafs k und k' beide reell sind, und dafs k mit positivem, k' mit negativem Vorzeichen zu rechnen sein wird.* Diese Vorzeichenbestimmung wolle man für das Folgende, wo wir nicht ausdrücklich darauf zurückkommen werden, im Gedächtnis behalten.

Hosted by Google

Schliefslich haben wir noch die gemeinsamen Werte der Konstanten l_1 und $-l_4$, sowie l_2 und $-l_3$ zu finden.

Zu dem Zweck differentiieren wir die erste der Gleichungen (8) logarithmisch nach t und finden zunächst:

(15) $$l_1 = \frac{d \log \alpha}{dt} - \frac{\vartheta'(t - ia)}{\vartheta(t - ia)} + \frac{\vartheta'(t - i\omega')}{\vartheta(t - i\omega')}.$$

Hier setzen wir für t irgend einen speziellen Wert ein, z. B. $t = ia$. Dann zerstören sich rechterhand, wie wir sogleich nachweisen werden, die beiden ersten Terme gegenseitig und es ergiebt sich

(16) $$l_1 = \frac{\vartheta'(ia - i\omega')}{\vartheta(ia - i\omega')}.$$

Für $t = ia$ wird nämlich $u = -1$, so dafs wir nach dem Taylorschen Satze haben:

(17) $$u + 1 = c(t - ia) + \cdots, \quad c = \left(\frac{du}{dt}\right)_{t=ia}$$

Ferner schreiben wir
$$\frac{d \log \alpha}{dt} = \frac{d \log \alpha}{du} \cdot \frac{du}{dt}.$$

Es wird aber nach pag. 402 für $u = -1$
$$\frac{d \log \alpha}{du} = \frac{1}{u + 1}$$

bis auf Terme, die mit $u + 1$ verschwinden. Wir haben also mit Rücksicht auf (17)
$$\left(\frac{d \log \alpha}{dt}\right)_{t=ia} = \frac{1}{u+1} \left(\frac{du}{dt}\right)_{t=ia} = \frac{c}{u+1} = \frac{1}{t - ia}.$$

Gleichzeitig wird, da die ϑ-Funktion eine ungerade Funktion ihres Argumentes ist, die mit ihrem Argument von der ersten Ordnung verschwindet:
$$\left(\frac{\vartheta'(t - ia)}{\vartheta(t - ia)}\right)_{t=ia} = \frac{1}{t - ia}$$

abermals bis auf Terme, welche mit $t - ia$ oder $u + 1$ verschwinden. Die beiden unendlich werdenden ersten Terme in Gleichung (15) heben sich also in der That für $t = ia$ gegenseitig auf und es ergiebt sich für l_1 der in (16) angegebene einfache Wert.

In ganz entsprechender Weise findet man für l_2 den Wert

(16′) $$l_2 = \frac{\vartheta'(\omega - ib - i\omega')}{\vartheta(\omega - ib - i\omega')}.$$

Die somit bestimmten Gröfsen l_i sind, wie man sich leicht überzeugt, sämtlich rein imaginär. Aus der Definitionsgleichung (3) der ϑ-Funktion folgt nämlich, dafs diese Funktion für ein rein imaginäres

Hosted by Google

Argument selbst rein imaginär ist, und dafs gleichzeitig ihr Differentialquotient reell wird. Dasselbe findet statt, wie ebenfalls aus Gleichung (3) ersichtlich, wenn der reelle Teil des Argumentes (wie in dem Ausdrucke von l_2) gleich $-\omega$ ist. Wir schreiben daher, indem wir unter l und l' zwei reelle Gröfsen verstehen, $l_1 = il$, $l_2 = il'$.

Die vollständige Tabelle der Konstanten l_i und k_i, durch welche unsere letzten Resultate zusammengefafst werden, lautet nun folgendermafsen:

$$(18)\left\{\begin{array}{l} k_1 = k\,, \quad k_2 = k'\,, \quad k_3 = \quad k', \quad k_4 = \quad k \\ l_1 = il, \quad l_2 = il', \quad l_3 = -il', \quad l_4 = -il \\ k^2 = \dfrac{\vartheta(\omega + i\omega' + ib)\,\vartheta(\omega - i\omega' + ib)}{\vartheta(\omega + ia + ib)\,\vartheta(\omega - ia + ib)}, \quad k'^2 = \dfrac{\vartheta(ia + i\omega')\,\vartheta(ia - i\omega')}{\vartheta(\omega + ia + ib)\,\vartheta(\omega - ia + il} \\ l = i\,\dfrac{\vartheta'(i\omega' - ia)}{\vartheta(i\omega' - ia)}, \quad l' = i\,\dfrac{\vartheta'(i\omega' - \omega + ib)}{\vartheta(i\omega' - \omega + ib)}. \end{array}\right.$$

Tragen wir diese Werte der Konstanten in die Formeln (8) *von pag. 420 ein, so sind unsere Parameter α, β, δ, γ in sehr übersichtlicher Weise als Funktionen von t dargestellt.*

Hinsichtlich der Konstanten des Problems kann man dabei noch einen doppelten Standpunkt einnehmen.

Man kann erstens, wie es in den früheren Entwickelungen stets geschah, diejenigen Gröfsen, durch welche die Anfangslage und Anfangsbewegung sowie die Massenverteilung des Kugelkreisels gegeben wird, als die fundamentalen Konstanten des Problems ansehen. Es waren dieses die Gröfsen e, n, N, P und A, wobei es aber, wie man leicht erkennt, bei den letztgenannten vier Gröfsen nur auf die Verhältnisse $n : N : P : A$ ankommt. Diese vier Gröfsen stellen also zusammen mit e nur vier wesentliche numerische Daten vor. Wir wollen diese vier Daten die *„elementaren Konstanten des Problems“* nennen. Von diesem ersten Standpunkte aus hätte man, bevor man unsere Schlufsformeln anwenden kann, die mit ω, ω', a und b bezeichneten Werte des Integrals erster Gattung aus den elementaren Konstanten zu berechnen, wofür die geeigneten Methoden im vierten Kapitel entwickelt sind.

Man kann zweitens aber auch eben diese vier Integralwerte als die fundamentalen, den Kugelkreisel charakterisierenden Daten ansehen und kann diese in ganz beliebiger Weise als reelle Gröfsen vorgeben. Wir nennen diese vier Gröfsen kurzweg die *„transcendenten Konstanten des Problems“*. Von diesem zweiten Standpunkte aus ist die Kenntnis der elementaren Konstanten für die Beherrschung der Bewegungen überflüssig, da in den Schlufsformeln nur die als gegeben angenommenen transcendenten Konstanten vorkommen. Übrigens lassen sich umgekehrt jene aus diesen mit Hülfe von ϑ-Reihen jederzeit berechnen.

Hosted by Google

Das Voranstellen der elementaren Konstanten liegt allerdings in geometrischer und mechanischer Hinsicht zunächst näher. Indessen bringt die Bevorzugung der transcendenten Konstanten in analytischer Hinsicht den Vorteil gröſserer Symmetrie und Einfachheit mit sich, so daſs wir von den beiden eben genannten Standpunkten den zweiten als den höheren und analytisch befriedigenderen bezeichnen möchten. Er wird namentlich in den späteren Paragraphen dieses Kapitels für uns maſsgebend sein.

Zum Schluſs einige historische Notizen.

Als erster hat sich mit der Darstellung der Bewegung des schweren Kreisels durch elliptische Funktionen Jacobi*) beschäftigt. Indessen ist er nicht dazu gekommen, seine Resultate zu publizieren. In der Litteratur wird der Gegenstand im Anschluſs an Jacobi zum ersten Male von Lottner**) behandelt, der auch die bezüglichen Teile des Jacobischen Nachlasses herausgegeben hat. Beide Autoren gehen darauf aus, die neun Richtungscosinusse, welche die Axen des beweglichen mit dem festen Koordinatensystem***) bilden, durch ϑ-Funktionen auszudrücken. Wir haben die Darstellung der neun Richtungscosinusse auf Grund unserer Darstellung der α, β, γ, δ unmittelbar in der Hand. Wir brauchen nur die Werte der letzteren in das Schema (9) von pag. 21 einzutragen, wobei sich elliptische Funktionen zweiter Art zweiten Grades ergeben würden, und Reelles und Imaginäres zu trennen. Da dieses Verfahren indessen den Übergang von dem Einfacheren zum Komplizierteren bedeuten würde, so können wir auf seine Durchführung füglich verzichten.

Ganz nahe der Einführung unserer α, β, γ, δ kommt Hr. W. Heſs†) in einer Arbeit „Über das Gyroskop". Gegen Ende derselben findet sich als Resultat ziemlich umfangreicher, an die Lottnersche Darstellung anschlieſsender Rechnungen die Bemerkung, daſs die „Elemente der Eulerschen Rotation", d. h. in unserer Bezeichnung die Quaternionengröſsen

$$A = \frac{\beta + \gamma}{2i}, \quad B = \frac{-\beta + \gamma}{2}, \quad C = \frac{\alpha - \delta}{2i}, \quad D = \frac{\alpha + \delta}{2}$$

*) Nouvelle théorie de la rotation d'un corps de révolution grave etc. und Sur la rotation d'un corps etc. Ges. W. Bd. II, p. 477 und 493.

**) Reduktion eines schweren, um einen festen Punkt rotierenden Revolutionskörpers auf die elliptischen Transcendenten, Crelles Journ. Bd. 50, 1855.

***) Genau genommen handelt es sich bei Jacobi und Lottner um zwei Axenkreuze, welche sich relativ gegen die genannten mit gleichförmiger Geschwindigkeit um die Z- bez. z-Axe drehen. Die Einführung dieser Koordinatensysteme entspricht zum Teil der Reduktion des schweren symmetrischen Kreisels auf den Kugelkreisel, zum Teil der Absonderung eines Präcessionsbestandteils von dem rein periodischen Nutationsbestandteile der Bewegung.

†) Math. Annalen Bd. 29, 1887, vgl. insbesondere die beiden letzten Seiten.


Hosted by Google

ein viel einfacheres Gepräge zeigen, wie die Richtungscosinus, welche Jacobi und Lottner betrachten, „indem erstere nur von je einem, letztere dagegen von zwei konstanten Parametern abhängig sind“, d. h. in unserer Terminologie, indem erstere im Wesentlichen elliptische Funktionen ersten, letztere dagegen zweiten Grades sind. Indessen hat der Verfasser aus dieser Bemerkung keine weiteren Konsequenzen gezogen, wie denn die Quaternionengröfsen hier nur ganz beiläufig und keineswegs als Grundlage der Theorie auftreten.

§ 5. Die Bahnkurve der Kreiselspitze, Polhodie- und Herpolhodiekurve u. s. w., dargestellt durch ϑ-Quotienten.

Die im vorigen Paragraphen gegebenen Formeln enthalten implicite die Beantwortung aller Fragen, welche die Kreiselbewegung betreffen. Es kann sich im Folgenden nur noch darum handeln, die Konsequenzen der allgemeinen analytischen Darstellung bezüglich einiger besonderer Punkte ausdrücklich hervorzuheben.

Unser Hauptinteresse haben wir früher auf die Schilderung der „Bahnkurve“ gerichtet. Wir wollen daher auch hier zunächst nach der Bahnkurve der Kreiselspitze fragen. Wir werden sehen, dafs ihre Gleichung mit Hülfe der ϑ-Funktionen äufserst elegant herauskommt.

Dabei haben wir jetzt die geometrisch-funktionentheoretischen Methoden des ersten Kapitels (vgl. § 3 desselben) wieder aufzunehmen.

Wir betrachteten dort (vgl. pag. 29) zwei vereinigt gelegene Einheitskugeln mit dem Mittelpunkte in O, eine im Raume und eine im Kreisel feste, welche im Riemannschen Sinne Träger je einer komplexen Variabeln λ und Λ waren. Die Variable λ, welche den Punkten der im Raume festen Einheitskugel zugeordnet war, hing mit den rechtwinkligen Koordinaten xyz dieser Punkte durch die Gleichung zusammen (s. pag. 28, Gleichung (11)):

$$\lambda = \frac{x + iy}{1 - z}. \tag{1}$$

Ebenso lautet die Beziehung zwischen der Variabeln Λ und den rechtwinkligen Koordinaten XYZ der im Kreisel festen Punkte der zweiten Einheitskugel:

$$\Lambda = \frac{X + iY}{1 - Z}. \tag{1'}$$

Endlich aber besteht zwischen den Variabeln λ und Λ, welche je zwei momentan zusammenfallenden Punkten der beiden Kugeln entsprechen, die folgende einfache Relation:

$$\lambda = \frac{\alpha\Lambda + \beta}{\gamma\Lambda + \delta}, \tag{2}$$

Hosted by Google

in der die α, β, γ, δ dieselben Gröſsen sind, die wir im vorigen Paragraphen als Funktionen von t darstellten.

Um von hieraus zur Bahnkurve der Kreiselspitze zu gelangen, setzen wir in (1′) die Koordinaten X, Y, Z der Kreiselspitze, nämlich $X = 0$, $Y = 0$, $Z = +\sqrt{1 - X^2 - Y^2}$ ein, wobei $\Lambda = \infty$ wird. Vermöge dieses Wertes geht Gleichung (2) über in

$$\lambda = \frac{\alpha}{\gamma}.$$

Hier tragen wir die Werte von α und γ aus dem vorigen Paragraphen ein und erhalten zunächst

$$\lambda = \frac{k}{k'} e^{i(l+l')t} \frac{\vartheta(t - ia)}{\vartheta(t + \omega - ib)} \frac{\vartheta(t + i\omega')}{\vartheta(t - i\omega')}.$$

Berücksichtigen wir noch die Funktionalgleichungen der ϑ-Funktionen, so können wir setzen:

$$(3) \qquad \frac{\vartheta(t + i\omega')}{\vartheta(t - i\omega')} = -e^{-\frac{i\pi t}{\omega}}, \qquad \frac{k^2}{k'^2} = \frac{\vartheta^2(\omega - i\omega' + ib)}{\vartheta^2(ia - i\omega')} e^{-\frac{i\pi}{\omega}(\omega + ib - ia)}.$$

Somit wird bei richtiger Vorzeichenbestimmung (vgl. pag. 426 unten)

$$(4) \qquad \begin{cases} \lambda = Ke^{iLt} \dfrac{\vartheta(t - ia)}{\vartheta(t + \omega - ib)}; \\ K = \dfrac{\vartheta(\omega - i\omega' + ib)}{\vartheta(ia - i\omega')} e^{-\frac{i\pi}{2\omega}(\omega + ib - ia)}, \quad L = l + l' - \dfrac{\pi}{\omega}. \end{cases}$$

Dies ist die gesuchte Gleichung der Bahnkurve. *Wie wir sehen, bestimmt sich die Bahnkurve der Kreiselspitze wieder durch eine elliptische Funktion zweiter Art ersten Grades.*

Um die einfache geometrische Bedeutung unserer Darstellungsweise zu verstehen, erinnern wir an die geometrische Bedeutung der komplexen Variabeln λ. Wir bezogen die Einheitskugel, deren Punkte durch die Variable λ unterschieden waren, mittels stereographischer Projektion vom Nordpol der Einheitskugel auf ihre Äquatorebene. Alsdann war λ derjenige komplexe Wert, welcher dem stereographischen Bilde des einzelnen Kugelpunktes nach der üblichen Gauſsischen Deutung der imaginären Gröſsen zukommt. Wir brauchen λ nur in einen reellen und imaginären Bestandteil aufzulösen, um die rechtwinkligen Koordinaten des stereographischen Bildpunktes in der Äquatorebene zu erhalten.

Die Gleichung (4) liefert daher direkt das ebene stereographische Bild der im Raume verlaufenden Bahnkurve; sie kann unmittelbar als Unterlage für die zeichnerische Darstellung der Bahnkurve in stereographischer Projektion dienen.



Wir erinnern ferner daran, daſs (vgl. pag. 207) für die Zwecke der Zeichnung die stereographische Projektion vor der sonst üblichen orthographischen gewisse Vorzüge voraus hat. Es ist erfreulich, daſs unsere analytische Darstellung der Bahnkurve sich gerade mit dem praktischen Bedürfnisse der Zeichnung deckt.

Vergleichen wir hiermit diejenige Darstellung der Bahnkurve, welche der *orthographischen* Projektion auf die Äquatorebene entspricht.

Wir gelangen zu dieser, wenn wir nach den rechtwinkligen Koordinaten x, y, z der Kreiselspitze im Raume fragen; sehen wir hier von der dritten Koordinate z ab, so bestimmen uns die beiden übrigen die gewünschte orthographische Projektion. Übrigens empfiehlt es sich, von den x, y selbst zu der komplexen Verbindung derselben $\xi = x + iy$ (oder $\eta = -x + iy$) im Sinne von pag. 20 überzugehen, also auch das orthographische Bild der Kreiselspitze, wie vorher das stereographische, durch eine in der Äquatorebene ausgebreitete komplexe Variable festzulegen.

Nun lauten die Koordinaten der Kreiselspitze in dem mit dem Kreisel fest verbundenen XYZ-System bez. $X = Y = 0$, $Z = 1$. Die zugehörigen pag. 20 definierten komplexen Verbindungen werden daher $\Xi = \mathrm{H} = 0$, $\mathrm{Z} = -1$. Den gesuchten Wert von ξ, ausgedrückt durch unsere $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ entnehmen wir darauf dem Schema (9) von pag. 21. Er wird

$$\xi = -2\alpha\beta.$$

Tragen wir hier die Werte von α und β ein, so erhalten wir als Gleichung der Bahnkurve in orthographischer Projektion die folgende:

$$(5) \quad \xi = K e^{iLt} \frac{\vartheta(t - ia)\,\vartheta(t - \omega + ib)}{\vartheta^2(t - i\omega')}, \quad K = -2kk', \quad L = l + l'.$$

Diese Darstellung steht ersichtlich der früheren an Einfachheit nach. *Die Bahnkurve in orthographischer Projektion bestimmt sich durch eine elliptische Funktion (zweiter Art) zweiten Grades, während sie bei stereographischer Projektion durch eine elliptische Funktion ersten Grades, einen einfachen ϑ-Quotienten, gegeben wird.*

Daſs dieser Umstand nicht zu unterschätzen ist, wird im folgenden Paragraphen klar werden, wenn wir uns zur numerischen Berechnung der Bahnkurve wenden. Da wir in (5) vier (resp. drei verschiedene) ϑ-Werte, in (4) dagegen nur zwei solche Werte nötig haben, so wird die Rechenarbeit bei orthographischer Projektion der Bahnkurve nahezu die doppelte von der Arbeit, welche die Berechnung der stereographisch projicierten Bahnkurve verursacht.

Die Darstellung (5) hat Hermite in seiner p. 151 citierten Schrift bei der Behandlung des sphärischen Pendels gewählt.

Hosted by Google

Übrigens hatten wir in den Figurenserien von Kapitel IV als Projektionscentrum bei der stereographischen Abbildung nicht den Nordpol, sondern den Südpol der festen Einheitskugel gewählt. Es empfiehlt sich dies immer dann, wenn die Bahnkurve ganz oder hauptsächlich auf der nördlichen Halbkugel verläuft, weil sonst das stereographische Bild übermäſsig vergröſsert und verzerrt erscheinen würde. Wir können aber leicht von der einen Projektionsart zu der anderen übergehen. Geometrisch erreichen wir dies durch eine sog. Inversion am Einheitskreise der xy-Ebene; dem entspricht analytisch, daſs wir den Wert der komplexen Variabeln λ ersetzen durch den konjugiert reciproken Wert $1 : \bar{\lambda}$. Nehmen wir diesen Übergang in Gleichung (4) vor, so ergiebt sich für die stereographische Projektion vom Südpol die folgende Darstellung:

$$(4') \quad \begin{cases} \lambda = K e^{iLt} \dfrac{\vartheta(t + \omega + ib)}{\vartheta(t + ia)}; \\ K = \dfrac{\vartheta(i\omega' - ia)}{\vartheta(\omega + i\omega' - ib)} e^{-\frac{i\pi}{2\omega}(\omega - ib + ia)}, \quad L = l + l' - \dfrac{\pi}{\omega}. \end{cases}$$

Ohne die geringste Mühe können wir nun auch die Bahnkurve angeben, welche ein ganz beliebiger Punkt des Kreisels bei der Bewegung beschreibt. Wir wollen der Kürze halber annehmen, daſs der betreffende Punkt von O den Abstand 1 habe, so daſs er dauernd mit einem Punkte der beweglichen Kugel zusammenfällt. (Im anderen Falle brauchten wir die anzugebende Formel nur mit der Entfernung des Punktes von O zu multiplizieren.) Wir charakterisieren dann die Lage unseres Punktes auf der beweglichen Kugel durch den komplexen Wert $\Lambda = \Lambda_0$ in der früher beschriebenen Weise. Die wechselnden Lagen des Punktes im Raume, d. h. die gesuchte Bahnkurve bez. ihr durch stereographische Projektion vom Nordpole erhaltenes ebenes Abbild wird darauf nach Gleichung (2) gegeben durch

$$(6) \qquad \lambda = \frac{\alpha \Lambda_0 + \beta}{\gamma \Lambda_0 + \delta}.$$

Die in Gleichung (6) enthaltenen Ausdrücke sind bei beliebigem Λ_0 nicht mehr direkt elliptische Funktionen erster oder zweiter Art, sondern nur mehr lineare Kombinationen von solchen. —

Die vorstehenden Entwickelungen gelten wie alle Resultate dieses Kapitels zunächst nur für den Fall des Kugelkreisels. Wir können aber von hier aus nach § 5 des vierten Kapitels sehr leicht zu einem symmetrischen Kreisel übergehen, welcher dasselbe äquatoriale Trägheitsmoment A wie der Kugelkreisel und ein beliebiges Trägheitsmoment C um die Figurenaxe hat; dies soll an den Gleichungen der Bahnkurve wirklich ausgeführt werden.

Hosted by Google

Zu dem Zwecke haben wir nach pag. 234 die Geschwindigkeitskoordinate φ' des Kugelkreisels um die konstante Gröfse

$$N\left(\frac{1}{C}-\frac{1}{A}\right),$$

welche wir mit c bezeichnen wollen, zu vermehren, während ϑ und ψ ungeändert bleiben. Die entsprechenden Änderungen der $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ bestehen (vgl. die ursprüngliche Definition dieser Gröfsen auf pag. 21) darin, dafs wir

(7)

	α	β	γ	δ
mit	$e^{+\frac{ic}{2}t}$	$e^{-\frac{ic}{2}t}$	$e^{+\frac{ic}{2}t}$	$e^{-\frac{ic}{2}t}$

multiplizieren. Infolgedessen lautet die Gleichung für die Bahnkurve eines Punktes Λ_0 beim symmetrischen Kreisel folgendermafsen:

$$\lambda = \frac{\alpha e^{ict}\Lambda_0 + \beta}{\gamma e^{ict}\Lambda_0 + \delta},$$

wo die $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die Werte dieser Parameter beim Kugelkreisel bedeuten. Insbesondere ergiebt sich für die Bahnkurve der Kreiselspitze ($\Lambda_0 = \infty$) beim symmetrischen genau dieselbe Gleichung wie beim Kugelkreisel — wie dies nach § 5 des vierten Kapitels selbstverständlich ist. —

Wir gehen jetzt dazu über, in ähnlicher Weise die *Gleichungen der Polhodie- und Herpolhodiekurve des Kugelkreisels* abzuleiten, d. h. derjenigen Kurven, welche der Endpunkt des Drehungsvektors im Körper und im Raume beschreibt. Die Koordinaten dieses Punktes bezeichnen wir wie früher mit

$$p, q, r \quad \text{oder} \quad \pi, \varkappa, \varrho,$$

je nachdem wir sie auf das im Kreisel oder im Raume feste System beziehen. Dabei sind die dritten Koordinaten r und ϱ beim Kugelkreisel natürlich konstant, da sie aus den Impulskomponenten N und n durch Division mit dem Trägheitsmomente A hervorgehen. Die beiden ersten Koordinaten fassen wir in die komplexen Verbindungen $p + iq$, $\pi + i\varkappa$ zusammen und entnehmen die Ausdrücke dieser Gröfsen sowie der Konstanten r und ϱ durch die $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ den Gleichungen (5) und (6) von pag. 43, 44:

$$(8) \quad \begin{cases} p + iq = 2i\left(+\beta\frac{d\delta}{dt} - \delta\frac{d\beta}{dt}\right), \\ \quad - r = 2i\left(-\alpha\frac{d\delta}{dt} + \gamma\frac{d\beta}{dt}\right). \end{cases}$$

Hosted by Google

$$(8') \qquad \begin{cases} \pi + i\varkappa = 2i\left(+\beta\frac{d\alpha}{dt} - \alpha\frac{d\beta}{dt}\right), \\ \quad -\varrho = 2i\left(+\delta\frac{d\alpha}{dt} - \gamma\frac{d\beta}{dt}\right). \end{cases}$$

Setzen wir hier die Werte der α, β, γ, δ ein, so haben wir die explicite Darstellung der Koordinaten von Polhodie- und Herpolhodiekurve vor uns. Die beiden ersten Gleichungen für sich betrachtet, liefern uns dabei die orthographische Projektion der Polhodiekurve auf die Äquatorebene des Kreisels bez. der Herpolhodiekurve auf die Horizontalebene. Die beiden letzten Gleichungen bestimmen gleichzeitig die Höhe, in welcher unsere Kurven über der Äquatorebene bez. über der Horizontalebene verlaufen.

Wir wollen zeigen, dafs sich die vorstehenden Gleichungen in sehr bemerkenswerter Weise zusammenziehen. Betrachten wir z. B. $p + iq$: Wir schreiben

$$(9) \qquad p + iq = 2i\beta\delta\Theta$$

und überzeugen uns zunächst, dafs die Gröfse

$$\Theta = \frac{d\log\delta}{dt} - \frac{d\log\beta}{dt}$$

eine doppeltperiodische Funktion zweiten Grades ist. Wir bemerken nämlich allgemein, dafs die Funktion

$$\frac{d\log\vartheta(t-t_0)}{dt}$$

nach den Funktionalgleichungen der ϑ-Funktion überhaupt ungeändert bleibt bez. sich um $-\frac{\pi i}{\omega}$ additiv vermehrt, wenn wir zum Argument 2ω bez. $2i\omega'$ hinzufügen. Mithin wird die Differenz zweier solcher Funktionen jedenfalls eine doppeltperiodische Funktion. Aus solchen Differenzen und konstanten Gliedern setzt sich aber unsere Gröfse Θ zusammen.

Der explicite Ausdruck von Θ läfst sich den Gleichungen (8) und (18) des vorigen Paragraphen zufolge nach einigen leichten Reduktionen folgendermafsen schreiben:

$$\Theta = -\frac{\vartheta'(ia-i\omega')}{\vartheta(ia-i\omega')} + \frac{\vartheta'(\omega+ib-i\omega')}{\vartheta(\omega+ib-i\omega')} + \frac{\vartheta'(t+ia)}{\vartheta(t+ia)} - \frac{\vartheta'(t-\omega+ib)}{\vartheta(t-\omega+ib)}.$$

Die im Periodenrechteck gelegenen Unendlichkeitsstellen von Θ sind hiernach ersichtlich $t = -ia$ und $t = \omega - ib$. Ferner werden die Nullstellen sein

$$t = -i\omega' \quad \text{und} \quad t = \omega + i\omega' - ia - ib;$$

im ersteren Falle kompensieren sich nämlich das erste und dritte sowie das zweite und vierte Glied, im letzteren Falle das zweite und dritte sowie das erste und vierte Glied.

Hiernach können wir unserer Gröfse Θ auch die Gestalt geben:

$$(10)\qquad \Theta = C\,\frac{\vartheta(t+i\omega')\,\vartheta(t-\omega-i\omega'+ia+ib)}{\vartheta(t+ia)\,\vartheta(t-\omega+ib)};$$

der rechts stehende Ausdruck ist nämlich, da die Argumentensumme des Zählers gleich der des Nenners ist, eine doppeltperiodische Funktion von denselben Null- und Unendlichkeitsstellen wie Θ. Die hinzugefügte Gröfse C ist eine Konstante.

Gleichung (9) nimmt nun folgende einfache Gestalt an:

$$(11)\qquad p+iq = Ke^{i(l'-l)t}\,\frac{\vartheta(t-\omega-i\omega'+ia+ib)}{\vartheta(t-i\omega')}.$$

Um die Konstante K zu bestimmen, in welche die soeben benutzte noch unbekannte Gröfse C eingeht, vergleichen wir die Werte von $p+iq$ aus (11) und (8) für einen geeignet gewählten Zeitpunkt t. Wir haben z. B. für $t=-ia$

$$\delta = 0,\quad \frac{d\delta}{dt} = ke^{-la}\,\frac{\vartheta'(0)}{\vartheta(-ia+i\omega')},\quad \beta = k'e^{l'a}\,\frac{\vartheta(ia+\omega-ib)}{\vartheta(ia+i\omega')};$$

also wird nach (8)

$$p+iq = 2ikk'e^{(l'-l)a}\,\frac{\vartheta'(0)\,\vartheta(ia+\omega-ib)}{\vartheta(-ia+i\omega')\,\vartheta(ia+i\omega')};$$

andrerseits ergiebt sich aus (11):

$$p+iq = Ke^{(l'-l)a}\,\frac{\vartheta(+\omega+i\omega'-ib)}{\vartheta(ia+i\omega')};$$

mithin folgt

$$K = 2ikk'\,\frac{\vartheta'(0)\,\vartheta(ia+\omega-ib)}{\vartheta(-ia+i\omega')\,\vartheta(\omega+i\omega'-ib)}.$$

Setzen wir endlich noch für k und k' die Werte aus den Gleichungen (18) von pag. 428 ein, so erhalten wir einfach:

$$(11')\qquad K = \frac{-2\,\vartheta'(0)}{\vartheta(\omega+ia+ib)}\,e^{\frac{\pi(a+b)}{2\omega}}.$$

Durch die Gleichungen (11) und (11′) ist die Polhodiekurve in orthographischer Projektion dargestellt. Wir heben die Einfachheit dieser Darstellung besonders hervor, indem wir bemerken:

Die komplexe Variable, welche die senkrechte Projektion des Drehungsvektors auf die Äquatorebene des Kreisels bestimmt, ist wieder direkt eine elliptische Funktion zweiter Art ersten Grades.

Um auch die dritte Komponente r, welche, wie bemerkt, konstant $\left(=\frac{N}{A}\right)$ ist, durch unsere transcendenten Konstanten ω, ω', a und b

Hosted by Google

auszudrücken, können wir in Gleichung (8) einen speziellen Wert von t einsetzen. Wir wählen z. B. $t = \omega + ib$, wobei $\gamma = 0$ und (wegen $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$) $\alpha\delta = 1$ wird. Alsdann ergiebt sich

$$-r = -2i\alpha\delta\frac{d\log\delta}{dt} = -2i\frac{d\log\delta}{dt}$$
$$= 2i\left(il - \frac{\vartheta'(\omega+ia+ib)}{\vartheta(\omega+ia+ib)} + \frac{\vartheta'(\omega+i\omega'+ib)}{\vartheta(\omega+i\omega'+ib)}\right),$$

also, wenn wir den Wert von l eintragen:

$$(12)\quad -r = 2i\left(-\frac{\vartheta'(i\omega'-ia)}{\vartheta(i\omega'-ia)} + \frac{\vartheta'(\omega+i\omega'+ib)}{\vartheta(\omega+i\omega'+ib)} - \frac{\vartheta'(\omega+ia+ib)}{\vartheta(\omega+ia+ib)}\right).$$

Die entsprechende *Darstellung der Herpolhodiekurve* können wir aus den vorstehenden Gleichungen der Polhodiekurve unmittelbar abnehmen. Wir erhielten nämlich pag. 44 die Koordinaten $-\pi$, $-\varkappa$, $-\varrho$ aus den Koordinaten p, q, r, indem wir α und δ vertauschten und β und γ im Vorzeichen umkehrten.

Diese Vertauschung und Vorzeichenveränderung können wir aber, wie eine genaue Prüfung der Gleichungen (8) und (18) des vorigen Paragraphen zeigt, einfach dadurch erreichen, dafs wir $-a$ statt $+a$ schreiben, wobei $-l$ in $l - \frac{\pi}{\omega}$ übergeht. *Die Gleichungen der Herpolhodiekurve können wir daher folgendermafsen schreiben:*

$$(13)\quad \pi + i\varkappa = K' e^{i\left(l+l'-\frac{\pi}{\omega}\right)t}\,\frac{\vartheta(t-\omega-i\omega'-ia+ib)}{\vartheta(t-i\omega')},$$

$$(13')\qquad K' = \frac{2\vartheta'(0)}{\vartheta(\omega-ia+ib)}\,e^{\frac{\pi(b-a)}{2\omega}},$$

$$(14)\qquad -\varrho = 2i\left(\frac{\vartheta'(i\omega'+ia)}{\vartheta(i\omega'+ia)} - \frac{\vartheta'(\omega+i\omega'+ib)}{\vartheta(\omega+i\omega'+ib)} + \frac{\vartheta'(\omega-ia+ib)}{\vartheta(\omega-ia+ib)}\right).$$

Zu denselben Gleichungen gelangen wir auch von dem pag. 238 entwickelten Prinzip aus, nach welchem wir nur, um von der Polhodie- zu der Herpolhodiekurve überzugehen, die Werte von n, N bez. durch $-N$, $-n$ zu ersetzen und die Vorzeichen der Koordinaten umzukehren brauchen. Thun wir dieses, so wird die Ungleichung

$$N > n > 0,$$

welche der bisherigen Darstellung der α, β, γ, δ durch ϑ-Quotienten zu Grunde lag, in dem Sinne abgeändert, dafs für die einzutragenden Werte $N = -n$, $n = -N$ die Beziehung gilt:

$$0 > N > n.$$

Wie sich in diesem Falle die logarithmischen Unendlichkeitsstellen der α, β, γ, δ auf die Punkte ± 1 der Riemannschen Fläche verteilen,

Hosted by Google

wurde in Fig. 61 b dargestellt. Wir ersehen aus ihr, daſs die Nullstellen von β und γ durch die vorgenannte Vertauschung nicht geändert werden, daſs aber die von α und δ, d. h. die Stellen $\pm ia$ der t-Ebene sich austauschen. Wir haben also wieder die Vorzeichenumkehr von a und damit den Übergang von (11), (12) zu (13), (14).

Die soeben entwickelten Gleichungen können sofort auch zur Darstellung der Impulskurven dienen, d. h. derjenigen Kurven, welche der Endpunkt des Impulsvektors im Körper und im Raume beschreibt. Da nämlich die letzteren Kurven beim Kugelkreisel zu den Kurven der Polhodie und Herpolhodie in dem geometrischen Verhältnisse der Ähnlichkeit stehen, so brauchen wir die Gleichungen (11), (12), (13) und (14) rechterhand nur mit dem Werte des Trägheitsmomentes A zu multiplizieren, um die Darstellung der Impulskoordinaten $L + iM$, N, $l + im$, n zu erhalten. Wir sprechen daraufhin den zusammenfassenden Satz aus:

Die zuletzt betrachteten Kurven, die Impulskurven sowie die Polhodie- und Herpolhodiekurve lassen sich beim Kugelkreisel sämtlich durch elliptische Funktionen zweiter Art ersten Grades berechnen.

Dieses Resultat bleibt auch beim Übergange zum symmetrischen Kreisel bestehen, soweit es sich auf die Impulskurven und auf die Polhodiekurve bezieht.

Die *Polhodiekurve des symmetrischen Kreisels* können wir nämlich aus der des Kugelkreisels dadurch ableiten, daſs wir in der ersten der Gleichungen (8) die α, β, γ, δ des Kugelkreisels mit den in (7) angegebenen Faktoren multiplizieren. Dementsprechend haben wir für $\frac{d\beta}{dt}$, $\frac{d\delta}{dt}$ bez.

$$e^{-\frac{ic}{2}t}\left(\frac{d\beta}{dt} - \frac{ic}{2}\beta\right), \quad e^{-\frac{ic}{2}t}\left(\frac{d\delta}{dt} - \frac{ic}{2}\delta\right)$$

einzutragen, unter β, δ, $\frac{d\beta}{dt}$, $\frac{d\delta}{dt}$ die Werte dieser Gröſsen beim Kugelkreisel verstanden. Da sich die hinzutretenden Terme $-\frac{ic}{2}\beta$ und $-\frac{ic}{2}\delta$ in der auf der rechten Seite von (8) stehenden Differenz aufheben, so brauchen wir die rechte Seite von (11) nur mit dem Faktor e^{-ict} zu multiplizieren, um die Gröſse $p + iq$ des symmetrischen Kreisels zu erhalten. Diese wird also ebenfalls durch eine elliptische Funktion ersten Grades gegeben.

Von den Koordinaten der Polhodiekurve unterscheiden sich die Koordinaten derjenigen Impulskurve, welche den *Ort des Impuls-Endpunktes im Körper* darstellt, nur um die konstanten Faktoren der Hauptträgheitsmomente. Diese Kurve wird also im Wesentlichen durch dieselben Gleichungen wie die Polhodiekurve beschrieben.

Hosted by Google

Was endlich die *Bahn des Impuls-Endpunktes im Raume* betrifft, so unterscheidet sich diese beim symmetrischen Kreisel von derselben Kurve beim Kugelkreisel überhaupt nicht. In der That sahen wir Kap. IV, § 5, dafs diese Kurve für alle Kreisel der l. c. betrachteten Serie genau dieselbe ist. Die Gleichungen (13) und (14) geben also (nach Multiplikation mit A) direkt die in Rede stehende Impulskurve für einen symmetrischen Kreisel, dessen eines Hauptträgheitsmoment A dem unseres Kugelkreisels gleich und dessen anderes Hauptträgheitsmoment C beliebig ist.

Weniger einfach wird die Darstellung der *Herpolhodiekurve beim symmetrischen Kreisel.* Um auch hier aus den vorhergehenden Umrechnungen Nutzen zu ziehen, drücken wir in der allgemeingültigen Gleichung (8′) die $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ des symmetrischen Kreisels durch die des Kugelkreisels nach der Tabelle (7) aus und bekommen:

$$\pi + i\varkappa = 2i\left(\alpha\frac{d\beta}{dt} - \beta\frac{d\alpha}{dt}\right) + 2c\alpha\beta.$$

Den ersten Term der rechten Seite haben wir oben in (13) auf seine einfachste Form gebracht. Im zweiten Term setzen wir die bekannten Werte von α und β ein, wobei wir die multiplizierende Konstante kurz mit K bezeichnen. Es ergiebt sich dann:

$$\pi + i\varkappa = e^{i(l+l')t}\left(K' e^{-\frac{i\pi t}{\omega}} \frac{\vartheta(t-\omega-i\omega'-ia+ib)}{\vartheta(t-i\omega')} + K\frac{\vartheta(t-ia)\,\vartheta(t-\omega+ib)}{\vartheta^2(t-i\omega')}\right),$$

oder

$$(15)\quad \begin{cases} \pi + i\varkappa = \\ e^{i(l+l')t}\dfrac{\vartheta(t-ia)\,\vartheta(t-\omega+ib)}{\vartheta^2(t-i\omega')}\left(K + K' e^{-\frac{i\pi t}{\omega}}\dfrac{\vartheta(t-i\omega')\,\vartheta(t-\omega-i\omega'-ia+ib)}{\vartheta(t-ia)\,\vartheta(t-\omega+ib)}\right). \end{cases}$$

Wir behaupten, dafs dieser Ausdruck abermals als ϑ-Quotient geschrieben werden kann, wobei aber zwei ϑ-Funktionen im Zähler und zwei im Nenner auftreten. Zunächst folgt aus den Funktionalgleichungen der ϑ-Funktionen, dafs die Klammer völlig ungeändert bleibt bei Vermehrung von t um eine der Perioden 2ω, $2i\omega'$. Die Klammer ist also eine elliptische Funktion erster Art zweiten Grades mit den Unendlichkeitsstellen $t = ia$ und $t = \omega - ib$. Eine solche Funktion besitzt, wie pag. 421 erwähnt, in dem einzelnen Periodenparallelogramm notwendig zwei Nullstellen, welche wir mit c_1 und c_2 bezeichnen, und kann durch den folgenden ϑ-Quotienten dargestellt werden

$$K_1\frac{\vartheta(t-c_1)\,\vartheta(t-c_2)}{\vartheta(t-ia)\,\vartheta(t-\omega+ib)}.$$

Tragen wir aber diesen Wert der Klammer in (15) ein, so folgt in der That:

$$(16)\qquad \pi + i\varkappa = K_1 e^{i(l+l')t}\frac{\vartheta(t-c_1)\,\vartheta(t-c_2)}{\vartheta^2(t-i\omega')}.$$

Hosted by Google

Auf die genauere Bestimmung von c_1, c_2 und K_1 wollen wir nicht eingehen. Wir konstatieren nur:

*Die Horizontalprojektion der Herpolhodiekurve ist beim symmetrischen Kreisel durch eine elliptische Funktion zweiter Art zweiten Grades gegeben.**)

In ähnlicher Weise können wir, von der zweiten der Gleichungen (8′) ausgehend, die *Vertikalprojektion* ϱ *der Herpolhodie* bestimmen. Wir finden für diese *eine elliptische Funktion erster Art zweiten Grades,* nämlich eine lineare Funktion der doppelperiodischen Gröſse $\cos\vartheta = u(t)$, wie bereits aus Gleichung (2) von pag. 235 hervorgeht. —

Zum Schluſs eine Bemerkung allgemeineren Inhalts. Wir sind im Vorstehenden zu wiederholten Malen auf elliptische Kurven zweiter Art geführt worden. Solche Kurven treten auſser bei dem schweren symmetrischen Kreisel auch bei dem kräftefreien unsymmetrischen Kreisel auf (vgl. § 8 dieses Kapitels), sowie in zahlreichen anderen geometrischen und mechanischen Problemen (als sphärische Kettenlinie, als sog. elastische Kurve etc. etc.). Sie bilden eine groſse Klasse unter sich verwandter transcendenter Kurven, welche in geometrischer Hinsicht und namentlich auch mit Rücksicht auf die Anwendungen den algebraischen Kurven an Interesse nicht nachstehen. Es wäre daher wohl der Mühe wert, allgemein eine *geometrische Theorie dieser transcendenten Kurven* aufzustellen, nach denselben Gesichtspunkten, die für die Theorie der algebraischen Kurven maſsgebend sind. Man hätte dann etwa die möglichen Singularitäten solcher Kurven zu untersuchen, Schnittpunktssätze zu erforschen, die gestaltlichen Verhältnisse zu diskutieren etc. Unsere elliptischen Kurven ersten Grades würden in dieser Theorie natürlich eine besonders wichtige Rolle spielen. Ohne Frage öffnet sich hier der geometrischen Forschung ein schönes und verhältnismäſsig leichten Erfolg versprechendes Gebiet.

§ 6. Numerische Berechnung der Bewegung durch ϑ-Reihen.

Eines der Endziele, die wir bei jedem Problem der Mechanik im Auge haben müssen, wird jedenfalls dieses sein: Die Bewegung soweit zu beherrschen, daſs wir die Lage des beweglichen Systems in jedem Augenblicke numerisch bestimmen können. Daſs dieses Ziel durch die

*) Sollte es nicht möglich sein, auch diese Kurve, welche ja nach pag. 235 auf einer gewissen Kugel verläuft, durch elliptische Funktionen *ersten* Grades darzustellen, indem man sie stereographisch auf die Äquatorebene der sie tragenden Kugel projiciert und nach der Gleichung für die komplexe Variable des stereographischen Bildpunktes fragt?

Hosted by Google

vorangehende Theorie auf bequemem Wege erreicht wird, soll in diesem Paragraphen dargethan werden. Zunächst möge das einzuschlagende Verfahren allgemein skizziert werden.

Ist uns irgend ein realer Kreisel gegeben, so besteht der erste Schritt darin, daſs wir, sei es durch das Experiment, sei es durch Berechnung, seine Massenverteilung, d. h. die auf den Unterstützungspunkt bezogenen Werte von A, C und P, festzustellen suchen.

Sodann müssen wir Anfangslage und Anfangsbewegung des Kreisels kennen. Die Anfangslage wird hinlänglich durch den Neigungswinkel ϑ_0 der Figurenaxe gegen die Vertikale beschrieben; die Anfangswerte der Winkel φ und ψ, welche für den Charakter der Bewegung belanglos sind, werden wir wie pag. 425 direkt gleich 0 nehmen.

Die Anfangsbewegung charakterisieren wir am besten durch die Lage und Gröſse des Impulsvektors. Gestatten wir uns die pag. 199 sub 4 verabredete Vereinfachung, daſs der Impulsvektor zu Anfang in derselben Vertikalebene wie die Figurenaxe enthalten sei, so wird unser Vektor durch seine beiden Komponenten n und N festgelegt. Wir wissen dann gleichzeitig, daſs der Parallelkreis $u = \cos\vartheta_0 = e$ einer der Begrenzungskreise für die Bahnkurve sein und daſs die Kreiselspitze zu Beginn in horizontaler Richtung fortschreiten muſs.

Mittels der Konstanten n, N und e bilden wir uns darauf die quadratische Gleichung $U_1 = 0$ von pag. 240, deren Wurzeln den zweiten Begrenzungskreis e' sowie die Gröſse e'' definieren.

Jetzt sind wir in der Lage, die Legendresche Theorie der elliptischen Integrale und die Legendreschen Tafeln für unsere Zwecke zu verwerten. Wir berechnen uns vor allem den Legendreschen Modul k, den komplementären Modul k' und die Hülfsgröſsen M, φ_a, φ_b von pag. 264. Darauf schlagen wir die Werte von $F\left(k, \frac{\pi}{2}\right)$, $F\left(k', \frac{\pi}{2}\right)$ in der Tafel I von Legendre und die Werte von $F(k', \varphi_a)$, $F(k', \varphi_b)$ in der Tafel IX auf. Durch Multiplikation mit M ergeben sich hieraus die Werte von ω, ω', a und b. Durch diese letzteren, transcendenten Konstanten ist die Bewegung der Kreiselspitze und die Bewegung des Impuls-Endpunktes im Raume ebenso vollständig bestimmt, wie durch die ursprünglich vorliegenden Konstanten A, C, P, n, N, e. In der That brauchen wir uns bei der Berechnung der genannten Bahn- und Impulskurve um die Massenverteilung des Kreisels, um seine Anfangsbewegung und Anfangslage in keiner Weise mehr zu kümmern. Unsere ganze Aufgabe besteht darin, gewisse ϑ-Reihen auszurechnen, in deren Koeffizienten die Gröſsen ω und ω', in deren Argument überdies die Gröſsen a und b eingehen. Das Schema, nach dem wir zu rechnen haben,

Hosted by Google

ist so für alle Kreisel und für alle Kreiselbewegungen dasselbe. Die ganze Mannigfaltigkeit der Bewegungsformen ruht lediglich in der Verschiedenheit der in unser Schema einzusetzenden Werte unserer vier transcendenten Konstanten.

(Auf die Werte der ursprünglichen Konstanten brauchen wir nur dann zurückzugehen, wenn wir weiterhin etwa direkt die Werte der $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ beim symmetrischen Kreisel oder die Bahnkurve eines von der Kreiselspitze verschiedenen Punktes oder die Polhodie- und Herpolhodiekurve zu berechnen wünschen, in deren Gleichungen die Gröſse $N\left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\right)$ vorkommt.)

Immerhin kann uns die Rücksicht auf gröſstmögliche Bequemlichkeit der Rechnung veranlassen, unser Verfahren unter Umständen etwas zu modifizieren. Wir bemerken, daſs die ϑ-Reihe von pag. 418

$$\vartheta(t) = 2q^{1/4}\sin s - 2q^{9/4}\sin 3s + 2q^{25/4}\sin 5s - \cdots \tag{1}$$

$$q = e^{-\frac{\omega'\pi}{\omega}}, \quad s = \frac{t\pi}{2\omega}, \tag{2}$$

um so schneller konvergiert, je kleiner q ist, je gröſser also das Verhältnis $\frac{\omega'}{\omega}$ ausfällt. Insbesondere wird sich die Rechnung in einem Periodenrechteck von gröſserer Höhe wie Breite $(\omega' > \omega)$ bequemer gestalten, als in einem Periodenrechteck von gröſserer Breite wie Höhe $(\omega > \omega')$. Es ist daher wichtig, eine Umformung der ϑ-Funktion zu kennen, welche den letzteren Fall allemal auf den ersteren zu reduzieren gestattet.

Man wird auf die gedachte Umformung geführt, wenn man sich überzeugt, daſs die ϑ-Funktion $\vartheta(t, \omega, \omega')$ bei Vermehrung des Argumentes t um Periodenvielfache genau dieselben Faktoren annimmt wie das Produkt der ϑ-Funktion $\vartheta(it, \omega', \omega)$ und der Exponentialgröſse $e^{-\frac{\pi t^2}{4\omega\omega'}}$. Da nun die ϑ-Funktion nach pag. 419 durch ihr Verhalten bei Vermehrung des Arguments um Periodenvielfache bis auf einen von t unabhängigen Faktor festgelegt ist, so schlieſst man, daſs die ϑ-Funktion $\vartheta(t, \omega, \omega')$ bis auf eine multiplizierende Konstante dem genannten Produkte gleich sein muſs. Auf die Bestimmung dieser Konstanten, welche einige Weiterungen verursacht, gehen wir hier nicht ein. Die definitive Formel lautet:

$$\vartheta(t, \omega, \omega') = -i\sqrt{\frac{\omega}{\omega'}}\, e^{-\frac{\pi t^2}{4\omega\omega'}}\, \vartheta(it, \omega', \omega). \tag{3}$$

Dabei ist die rechterhand stehende ϑ-Funktion ersichtlich durch die folgende Reihe zu berechnen:

Hosted by Google

(4) $\vartheta(it, \omega', \omega) = 2q'^{1/4} \sin s' - 2q'^{9/4} \sin 3s' + 2q'^{25/4} \sin 5s' - \cdots$

(5) $q' = e^{-\frac{\omega\pi}{\omega'}}, \quad s' = \frac{it\pi}{2\omega'}.$

Die Nützlichkeit der Formel (3) ist evident. Wenn wir eine ϑ-Funktion $\vartheta(t, \omega, \omega')$ auszurechnen haben, in welcher $\omega > \omega'$ und daher q verhältnismäſsig groſs ist, so werden wir zunächst die Reihe $\vartheta(it, \omega', \omega)$ berechnen, welche wegen $q' < q$ besser konvergieren wird. Gleichung (3) gestattet uns dann, von dieser zu der ursprünglich gesuchten ϑ-Funktion mit leichter Mühe zurückzugehen.

Daſs die in Rede stehende Gleichung neben diesem praktischen auch ein allgemeines theoretisches Interesse (in der Lehre von der Transformation der ϑ-Funktionen) besitzt, möge hier nur kurz angedeutet werden.

Allerdings kann es vorkommen, daſs der geschilderte Vorteil, welcher in der Verkleinerung des q beruht, teilweise durch eine eventuelle Vergröſserung der trigonometrischen Funktionen in der ϑ-Reihe wettgemacht wird. In der That wird beim Übergang zu der Funktion $\vartheta(it, \omega', \omega)$ im Argumente der Sinus-Funktionen der Faktor i eingeführt, welcher zumal bei reellem t die Konvergenz erheblich verschlechtern kann. Es wird im einzelnen Falle darauf ankommen, die durch die Umformung (3) herbeigeführten Vorteile und Nachteile gegen einander abzuwägen.

Teils um die Rapidität zu verdeutlichen, mit der die ϑ-Reihen konvergieren, teils um die Durchrechnung eines Beispiels vorzubereiten, wollen wir uns jetzt ein Urteil darüber bilden, wie viel Glieder der ϑ-Reihe wir für unsere Zwecke zu berücksichtigen haben. Es hängt dies natürlich von der Genauigkeit ab, welche wir erreichen wollen.

In unserem Falle würde es keinen Zweck haben, die Genauigkeit soweit zu treiben, wie dies beispielsweise bei den mechanischen Problemen der Astronomie üblich ist. In der That kann es sich bei der Durchführung eines numerischen Beispiels nur um eines der beiden folgenden Ziele handeln: Die geometrische Auffassung des mechanischen Vorganges durch Zeichnung quantitativ richtiger Figuren zu beleben; und andererseits: Den theoretisch gefundenen Bewegungsvorgang mit dem Experimente zu vergleichen. In ersterer Hinsicht genügt offenbar eine mäſsige Genauigkeit, weil doch auch die Zeichnung nur mit verhältnismäſsig geringer Genauigkeit ausgeführt werden kann. In letzterer Hinsicht ist zu bemerken, daſs die Verhältnisse des Experimentes durch Nebenumstände, namentlich durch Reibungsvorgänge, soweit entstellt werden, daſs eine erhebliche Übereinstimmung mit der abstrakten Theorie

Hosted by Google

überhaupt nicht zu erwarten ist. Es wird daher in unserem Falle etwa die Genauigkeit $\frac{1}{1000}$ genügen; *wir werden dementsprechend als erlaubte Fehlergrenze* $\frac{1}{1000}$ *des ganzen Wertes zulassen,* d. h. wir werden solche Gröfsen vernachlässigen, deren absoluter Betrag, dividiert durch den absoluten Betrag des ganzen Wertes, kleiner als $\frac{1}{1000}$ ist.

Nach dieser Verabredung zeigen wir ein für allemal, dafs wir bei geeigneter Anordnung der Rechnung *immer nur die beiden ersten Glieder der ϑ-Reihe zu berücksichtigen brauchen.* Wir setzen dabei voraus: 1) dafs $\omega' \geqq \omega$ und 2) dafs das Argument der ϑ-Reihe dem den Nullpunkt umgebenden Periodenrechtecke angehört. Wäre nämlich $\omega' < \omega$, so könnten wir nach Gleichung (3) zu einer Reihe übergehen, in welcher die Werte der Perioden vertauscht sind; läge ferner der das Argument repräsentierende Punkt der t-Ebene in einem der anderen Periodenrechtecke, so könnten wir die Funktionalgleichungen der ϑ-Funktion heranziehen und, indem wir ein geeignetes Periodenvielfaches absondern, den Punkt auf das Ausgangsrechteck reduzieren.

Zum Beweise der vorstehenden Behauptung ersetzen wir in Gleichung (1) jedes Glied durch seinen absoluten Betrag. Für den Rest R der Reihe vom dritten Gliede inklusive ab bekommen wir so

$$(6) \qquad |R| < 2q^{25/4}\,|\sin 5s| + 2q^{49/4}\,|\sin 7s| + \cdots$$

Wir zeigen zunächst allgemein, dafs stets

$$(7) \qquad |\sin(a+ib)| \leqq e^{|b|}.$$

In der That haben wir

$$|\sin(a+ib)|^2 = \frac{e^{-2b}+e^{+2b}-2\cos 2a}{4} \leqq \left(\frac{e^{-b}+e^{+b}}{2}\right)^2,$$

also

$$|\sin(a+ib)| \leqq \frac{e^{-b}+e^{+b}}{2} \leqq e^{|b|}.$$

Nun können wir uns nach Obigem auf solche Werte von t beschränken, deren imaginärer Teil absolut genommen nicht gröfser als ω' ist. Bezeichnen wir den imaginären Teil von s mit b, so wird nach Gleichung (2)

$$|b| \leqq \frac{\omega'\pi}{2\omega}$$

und mithin wegen (7)

$$|\sin 5s| \leqq e^{\frac{5}{2}\frac{\omega'}{\omega}\pi}, \quad |\sin 7s| \leqq e^{\frac{7}{2}\frac{\omega'}{\omega}\pi}\ldots$$

Die rechten Seiten dieser Ungleichungen können nach (2) bez. mit

Hosted by Google

$q^{-\frac{5}{2}}$, $q^{-\frac{7}{2}}$, ... bezeichnet werden. Die Ungleichung (6) geht daher über in

$$|R| < 2(q^{15/4} + q^{35/4} + \cdots).$$

Man überzeugt sich leicht, daſs die Glieder der rechten Seite stärker abnehmen, wie die Glieder der folgenden geometrischen Reihe:

$$2(q^{15/4} + q^{30/4} + q^{45/4} + \cdots) = \frac{2q^{15/4}}{1-q^{15/4}}.$$

Infolgedessen wird

$$(8) \qquad |R| < \frac{2q^{15/4}}{1-q^{15/4}}.$$

Den absoluten Betrag dieses Restwertes R, bez. die soeben festgestellte obere Grenze desselben, haben wir mit dem absoluten Betrag des ganzen Wertes $\vartheta(t)$, bez. mit irgend einer unteren Grenze desselben, zu dividieren, um eine obere Grenze für den relativen Fehler zu erhalten. Dabei ist zu berücksichtigen, daſs die ϑ-Funktion verschwindet für ein verschwindendes t, so daſs wir bei sehr kleinem Werte von $|t|$ für unseren relativen Fehler scheinbar ein sehr ungünstiges Resultat erhalten würden. Deshalb wollen wir noch die ausdrückliche Beschränkung hinzufügen, daſs der Wert von $|t|$ nicht zu klein, sagen wir etwa nicht kleiner als $\frac{2\omega}{100}$ sein darf, wenn wir unser Verfahren anwenden wollen. Unter dieser Voraussetzung ist $|s| > \frac{\pi}{100}$; gleichzeitig gilt für alle Punkte im Innern unseres Periodenrechtecks:

$$(9) \qquad |\sin s| > \sin\frac{\pi}{100} > 0{,}03.$$

Wir haben demnach jetzt unter der Voraussetzung $|t| < \frac{2\omega}{100}$ eine untere Grenze für den Wert von $|\vartheta(t)|$ festzustellen.

Zunächst schreiben wir mit Benutzung der oben eingeführten Abkürzung R:

$$|\vartheta(t)| = 2q^{1/4}|\sin s| \cdot \left|1 - q^2\frac{\sin 3s}{\sin s} + \frac{R}{2q^{1/4}\sin s}\right|.$$

Sodann benutzen wir den Satz, daſs der absolute Betrag einer Summe gröſser oder gleich der Differenz der absoluten Beträge der Summanden ist. Hiernach wird

$$(10) \qquad |\vartheta(t)| \geqq 2q^{1/4}|\sin s| \left\{\left|1 - q^2\frac{\sin 3s}{\sin s}\right| - \left|\frac{R}{2q^{1/4}\sin s}\right|\right\}.$$

Die Klammer werden wir nun weiter verkleinern, indem wir den ersten Term kleiner und den zweiten Term gröſser machen. Setzen wir in



letzterem für $| R |$ den in (8) gefundenen zu grofsen, für $| \sin s |$ den in (9) angegebenen zu kleinen Wert, so ergiebt sich

$$\left| \frac{R}{2 q^{1/4} \sin s} \right| < \frac{q^{14/4}}{1 - q^{15/4}} \frac{1}{0,03}.$$

Berücksichtigen wir ferner, dafs wir uns auf den Fall $\omega' \geqq \omega$, d. h. $q \leqq e^{-\pi}$ beschränken wollten, so erhalten wir selbst in dem ungünstigsten Falle $\omega' = \omega$, d. h. $q = e^{-\pi}$, wenn wir ausrechnen:

$$(11) \qquad \left| \frac{R}{2 q^{1/4} \sin s} \right| < 0,0006.$$

Andererseits wollen wir in dem ersten Terme der vorgenannten Klammer den Bruch $\sin 3s : \sin s$ ausdividieren. Ersetzen wir abermals den absoluten Betrag der so entstehenden Summe durch die Differenz der absoluten Beträge, so finden wir:

$$\left| 1 - q^2 \frac{\sin 3s}{\sin s} \right| = | 1 - 3q^2 + 4q^2 \sin^2 s | > 1 - 3q^2 - 4q^2 | \sin^2 s |.$$

Es ist aber nach (7) für alle Punkte unseres Periodenrechtecks:

$$| \sin^2 s | < e^{\frac{2\omega' \pi}{2\omega}}, \quad \text{d. h.} \quad | \sin^2 s | < q^{-1}.$$

Mithin haben wir

$$\left| 1 - q^2 \frac{\sin 3s}{\sin s} \right| > 1 - 4q - 3q^2$$

oder, wenn wir abermals zu dem ungünstigsten Falle $q = e^{-\pi}$ übergehen:

$$(12) \quad \left| 1 - q^2 \frac{\sin 3s}{\sin s} \right| > 1 - 0,1724 - 0,0054, \quad \text{d. h.} > 0,8222.$$

Aus (10), (11) und (12) ergiebt sich also für $| \vartheta(t) |$ die folgende untere Grenze

$$| \vartheta(t) | > 2 q^{1/4} | \sin s | \cdot 0,8214,$$

oder mit Rücksicht auf (9)

$$(13) \qquad | \vartheta(t) | > 2 q^{1/4} \cdot 0,0246.$$

Mit Hülfe der Ungleichungen (8) und (13) läfst sich nun die fragliche obere Grenze für den relativen Fehler $| R | : | \vartheta(t) |$ sofort berechnen. Wir haben nämlich

$$\frac{| R |}{| \vartheta(t) |} < \frac{q^{14/4}}{1 - q^{15/4}} \frac{1}{0,0246};$$

wertet man aber diesen Ausdruck für den ungünstigsten Fall $q = e^{-\pi}$ aus, so findet man

$$\frac{| R |}{| \vartheta(t) |} < \frac{1,68}{2,46} 10^{-3} < \frac{1}{1000}.$$

Wir werden daher sagen können:

Bei der verlangten Genauigkeit $\frac{1}{1000}$ *genügt es allemal, die beiden ersten Glieder der* ϑ*-Reihe beizubehalten, es sei denn, dafs das Argument der* ϑ*-Reihe von Null sehr wenig verschieden ist,* $\left(|\,t\,| < \frac{2\omega}{100}\right)$.

Übrigens ist die zuletzt genannte Ausnahme nur durch den Gang unserer Rechnung, nicht durch die Natur der Sache bedingt. Durch besondere Überlegungen, welche wir hier indessen nicht ausführen wollen, liefse sie sich beseitigen, so dafs unser Satz allgemeine Gültigkeit erhält.

Dabei ist noch zu bemerken, dafs wir bei unserer Abschätzung recht grobe Vernachlässigungen vorgenommen haben, dafs sich also in Wirklichkeit die Sache noch erheblich günstiger stellen wird. Dieser Umstand möge es rechtfertigen, wenn wir im Folgenden auch die Reihe für den Differentialquotienten $\vartheta'(t)$, welche nur wenig schlechter konvergiert, wie die ϑ-Reihe selbst, ohne Weiteres mit dem zweiten Gliede abbrechen werden. Übrigens wäre eine eigene Fehlerabschätzung auch bei dieser Reihe nicht schwer und fast genau so durchzuführen wie die obige. Ferner werden wir uns aus eben jenem Grunde für berechtigt halten, wenn mehrere ϑ-Reihen zu Quotienten oder Produkten zusammentreten, jede einzelne Reihe mit dem zweiten Gliede abzubrechen, obwohl bei einer Kombination von n ϑ-Reihen als obere Grenze des Fehlers zunächst das n-fache der früher festgestellten Fehlergrenze angenommen werden müfste. —

Wir gehen jetzt zur wirklichen Durchführung eines numerischen Beispiels über.

Dabei legen wir etwa den pag. 299 betrachteten Kreisel zu Grunde, welcher aus einem Schwungrade von quadratischem Querschnitt bestand. Die Seitenlänge des Querschnittquadrates betrug 2 cm, der Abstand seines Mittelpunktes von der Figurenaxe 5 cm, der Unterstützungspunkt lag $\frac{5}{2}$ cm unter dem Schwerpunkte. Für die Trägheitsmomente und für das Drehmoment der Schwerkraft fanden wir l. c., unter ϱ die Dichtigkeit des Materiales verstanden, die folgenden, im absoluten Mafssystem gemessenen Werte:

$$C = 1000\,\varrho\pi, \quad A = 750\,\varrho\pi, \quad P = 100\,\varrho\pi g.$$

Über die Anfangslage des Kreisels setzen wir etwa fest, dafs zu Beginn der Bewegung der Winkel ϑ_0 zwischen Figurenaxe und Vertikale gleich 60^0 sei. Wir haben dann

$$e = \cos\vartheta_0 = \frac{1}{2}.$$

Hosted by Google

Sodann legen wir den anfänglichen Bewegungszustand durch die Impulskomponenten N und n fest. Wir wollen N so wählen, daſs wir es mit einem starken Kreisel zu thun haben. Hierzu ist nach pag. 249 in dem vorliegenden Falle $P > 0$ erforderlich

$$N^2 > 2AP(1+e)$$

d. h. bei unserem Kreisel, da ungefähr $g = 100\pi^2$ ist,

$$N^2 > 3 \cdot 750 \cdot (100)^2 \varrho^2 \pi^4.$$

Dieser Ungleichung genügen wir, wenn wir beispielsweise annehmen

$$N = 4800\, \varrho \pi^2.$$

Der zugehörige Wert der Rotationskomponente r wird dann

$$r = \frac{N}{C} = 4{,}8\, \pi,$$

d. h. (vgl. pag. 11) 2, 4 Umdrehungen in der Sekunde. Ferner wollen wir über den Wert der Impulskomponente n so verfügen, daſs n etwas kleiner wie N und positiv wird, in welchem Falle wir die auf der Ungleichung $0 < n < N$ beruhenden Angaben über die Nullstellen der α, β, γ, δ (vgl. pag. 402) und ihre hieran anschlieſsende Darstellung durch ϑ-Funktionen genau in der früheren Form in Anwendung bringen können. Wir wählen etwa

$$n = 4200\, \varrho \pi^2.$$

Demnächst berechnen wir die Werte von e' und e'' aus der Gleichung $U_1 = 0$ von pag. 240, welche in unserem Falle lautet:

$$-\left(u + \frac{1}{2}\right)(4200^2 + 4800^2)\,\varrho^2\pi^4 + 2\left(1 + \frac{u}{2}\right) 4200 \cdot 4800\, \varrho^2 \pi^4$$
$$- \frac{3}{2}(1 - u^2)\, 750 \cdot 100\, \varrho^2 \pi^2 g = 0.$$

Benutzen wir wieder für g den Wert $100\pi^2$, so folgt

$$125u^2 - 228u + 97 = 0$$

oder

$$u^2 - 1{,}824u + 0{,}776 = 0.$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind 0,6759 und 1,1481. Mithin haben wir in der pag. 261 festgesetzten Reihenfolge:

(14) $$e = 0{,}5000,\quad e' = 0{,}6759,\quad e'' = 1{,}1481.$$

Jetzt berechnen wir den Legendreschen Modul

$$k = \sqrt{\frac{e' - e}{e'' - e}} = 0{,}5210$$

und gehen von diesem zu dem Winkel

$$\Theta = \arcsin k = 31{,}40^0$$

über. Der zu dem komplementären Modul k' in entsprechender Weise hinzugehörende Winkel Θ' ist daher

$$\Theta' = 90^0 - \Theta = 58{,}60^0.$$

Die Hülfsgröfsen M, φ_a, φ_b von pag. 264 werden gleichzeitig:

$$\log M = 0{,}1851 - 1\,, \quad \varphi_a = 71{,}10^0, \quad \varphi_b = 70{,}60^0.$$

Darauf sehen wir in der Legendreschen Tafel I die Werte von $\log F\left(k, \frac{\pi}{2}\right)$ und $\log F\left(k', \frac{\pi}{2}\right)$ nach. Wir finden auf pag. 228 und pag. 233 dieser Tafel

$$\log F\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = 0{,}2298\,, \quad \log F\left(k', \frac{\pi}{2}\right) = 0{,}3263.$$

Mithin haben wir

$$\begin{array}{llll} & \log F\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = 0{,}2298 & & \log F\left(k', \frac{\pi}{2}\right) = 0{,}3263 \\ & \log M \qquad = 0{,}1851 - 1 & & \log M \qquad = 0{,}1851 - 1 \\ \hline & \log \omega \qquad = 0{,}4149 - 1 & & \log \omega' \qquad = 0{,}5114 - 1 \\ (15) & \quad \omega \qquad = 0{,}2600 & & \quad \omega' \qquad = 0{,}3246. \end{array}$$

In unserem Beispiel liegt also der für die Berechnung der ϑ-Funktionen günstige Fall vor, dafs die Höhe des Periodenrechtecks gröfser ist als die Breite. Wir werden also keinen Grund haben, die in Gleichung (3) angegebene Umformung der ϑ-Reihen vorzunehmen.

Aus $\log \omega$ und $\log \omega'$ bilden wir nach Gleichung (2) die Gröfse q. Es ergiebt sich

$$\log q = 0{,}2959 - 2\,, \quad q = 0{,}0198.$$

Ferner haben wir die Gröfsen a und b aus der Legendreschen Tafel IX zu bestimmen, wobei eine kleine Interpolation nötig wird. Es ergiebt sich nach pag. 339 dieser Tafel:

$$F(k', \varphi_a) = 1{,}5129\,, \quad F(k', \varphi_b) = 1{,}4988.$$

Mithin wird

$$\begin{array}{llll} & \log F(k', \varphi_a) = 0{,}1798 & & \log F(k', \varphi_b) = 0{,}1757 \\ & \log M \qquad = 0{,}1851 - 1 & & \log M \qquad = 0{,}1851 - 1 \\ \hline & \log a \qquad = 0{,}3649 - 1 & & \log b \qquad = 0{,}3608 - 1 \\ (16) & \quad a \qquad = 0{,}2317 & & \quad b \qquad = 0{,}2295 \end{array}$$

Wir stellen sogleich einige bei der Berechnung unserer ϑ-Reihen häufig vorkommende Gröfsen in einer kleinen Tabelle zusammen:

Hosted by Google

$$e^{\frac{a\pi}{2\omega}} = 4{,}0563\,, \quad e^{-\frac{a\pi}{2\omega}} = 0{,}2465\,, \quad e^{\frac{3a\pi}{2\omega}} = 66{,}74\,, \quad e^{-\frac{3a\pi}{2\omega}} = 0{,}02\,,$$

$$-i\sin\frac{ia\pi}{2\omega} = 1{,}9049\,, \quad \cos\frac{ia\pi}{2\omega} = 2{,}1514\,,$$

$$-iq^2\sin\frac{3ia\pi}{2\omega} = 0{,}0130\,, \quad q^2\cos\frac{3ia\pi}{2\omega} = 0{,}0130\,;$$

$$e^{\frac{b\pi}{2\omega}} = 4{,}0031\,, \quad e^{-\frac{b\pi}{2\omega}} = 0{,}2498\,, \quad e^{\frac{3b\pi}{2\omega}} = 64{,}15\,, \quad e^{-\frac{3b\pi}{2\omega}} = 0{,}02\,,$$

$$-i\sin\frac{ib\pi}{2\omega} = 1{,}8766\,, \quad \cos\frac{ib\pi}{2\omega} = 2{,}1265\,,$$

$$-iq^2\sin\frac{3ib\pi}{2\omega} = 0{,}0125\,, \quad q^2\cos\frac{3ib\pi}{2\omega} = 0{,}0125\,;$$

$$e^{\frac{(\omega'-a)\pi}{2\omega}} = 1{,}7531\,, \quad e^{-\frac{(\omega'-a)\pi}{2\omega}} = 0{,}5704\,, \quad e^{\frac{3(\omega'-a)\pi}{2\omega}} = 5{,}39\,, \quad e^{-\frac{3(\omega-a)\pi}{2\omega}} = 0{,}19\,,$$

$$-i\sin\frac{i(\omega'-a)\pi}{2\omega} = 0{,}5913\,, \quad \cos\frac{i(\omega'-a)\pi}{2\omega} = 1{,}1617\,,$$

$$-iq^2\sin\frac{3i(\omega'-a)\pi}{2\omega} = 0{,}0011\,, \quad q^2\cos\frac{3i(\omega'-a)\pi}{2\omega} = 0{,}0011\,;$$

$$e^{\frac{(\omega'-b)\pi}{2\omega}} = 1{,}7766\,, \quad e^{-\frac{(\omega'-b)\pi}{2\omega}} = 0{,}5629\,, \quad e^{\frac{3(\omega'-b)\pi}{2\omega}} = 5{,}60\,, \quad e^{-\frac{3(\omega'-b)\pi}{2\omega}} = 0{,}18\,,$$

$$-i\sin\frac{i(\omega'-b)\pi}{2\omega} = 0{,}6068\,, \quad \cos\frac{i(\omega'-b)\pi}{2\omega} = 1{,}1697\,,$$

$$-iq^2\sin\frac{3i(\omega'-b)\pi}{2\omega} = 0{,}0011\,, \quad q^2\cos\frac{3i(\omega'-b)\pi}{2\omega} = 0{,}0011\,.$$

Nunmehr können wir zur Berechnung der Bahnkurve übergehen, welche die Kreiselspitze auf der Einheitskugel beschreibt. Da e und e' beide positiv sind, die Bahnkurve also ganz auf der nördlichen Halbkugel verläuft, so werden wir die Kurve so zeichnen, wie sie bei stereographischer Projektion vom *Südpole* erscheint. Dementsprechend wählen wir als analytische Darstellung der Bahnkurve die Gleichung (4′) von pag. 433

$$(17)\quad \begin{cases} \lambda = Ke^{iLt}\,\dfrac{\vartheta(t+\omega+ib)}{\vartheta(t+ia)}\,; \\[2ex] K = \dfrac{\vartheta(i\omega'-ia)}{\vartheta(\omega+i\omega'-ib)}\,e^{-\frac{i\pi}{2\omega}(\omega-ib+ia)}\,, \quad L = l + l' - \dfrac{\pi}{\omega}\,. \end{cases}$$

Alsdann bedeutet, wie wir wissen, λ direkt diejenige komplexe Variable, welche im gewöhnlichen Gaufsischen Sinne dem Bildpunkte der Kreiselspitze in der Äquatorebene der Einheitskugel bei stereographischer Projektion vom Südpole entspricht.

Hier sind zunächst die Konstanten K und L zu finden.

Wir haben, wenn wir die ϑ-Reihen mit dem zweiten Gliede abbrechen und die in der vorigen Tabelle angegebenen Werte benutzen:

Hosted by Google

$$K = \frac{-i\sin\frac{i(\omega'-a)\pi}{2\omega} + iq^2\sin\frac{3i(\omega'-a)\pi}{2\omega}}{\cos\frac{i(\omega'-b)\pi}{2\omega} + q^2\cos\frac{3i(\omega'-b)\pi}{2\omega}}\, e^{\frac{\pi}{2\omega}(a-b)}$$

$$= \frac{0{,}5913 - 0{,}0011}{1{,}1697 + 0{,}0011}\,\frac{4{,}0563}{4{,}0031} = 0{,}511.$$

Sodann berechnen wir zur Bestimmung von L die Gröſsen l und l' nach den Gleichungen (18) von pag. 428:

$$l = i\,\frac{\vartheta'(i\omega'-ia)}{\vartheta(i\omega'-ia)}, \qquad l' = i\,\frac{\vartheta'(i\omega'-\omega+ib)}{\vartheta(i\omega'-\omega+ib)};$$

hier wollen wir l' noch ein wenig umformen, indem wir schreiben:

$$l = i\left(\frac{\vartheta'(-i\omega'-\omega+ib)}{\vartheta(-i\omega'-\omega+ib)} - \frac{i\pi}{\omega}\right) = -i\,\frac{\vartheta'(\omega+i\omega'-ib)}{\vartheta(\omega+i\omega'-ib)} + \frac{\pi}{\omega};$$

also wird

$$l' - \frac{\pi}{\omega} = -i\,\frac{\vartheta'(\omega+i\omega'-ib)}{\vartheta(\omega+i\omega'-ib)}.$$

Da wir auch die Reihe für ϑ' mit dem zweiten Gliede abbrechen wollten, so ergiebt sich mit Rücksicht auf unsere Tabelle:

$$l = \frac{\pi}{2\omega}\,\frac{\cos\frac{i(\omega'-a)\pi}{2\omega} - 3q^2\cos\frac{3i(\omega'-a)\pi}{2\omega}}{-i\sin\frac{i(\omega'-a)\pi}{2\omega} + iq^2\sin\frac{3i(\omega'-a)\pi}{2\omega}} =$$

$$= \frac{\pi}{2\omega}\,\frac{1{,}1617 - 0{,}0033}{0{,}5913 - 0{,}0011} = \frac{\pi}{2\omega}\,1{,}963,$$

$$l' - \frac{\pi}{\omega} = \frac{\pi}{2\omega}\,\frac{-i\sin\frac{i(\omega'-b)\pi}{2\omega} - 3iq^2\sin\frac{3i(\omega'-b)\pi}{2\omega}}{\cos\frac{i(\omega'-b)\pi}{2\omega} + q^2\cos\frac{3i(\omega'-b)\pi}{2\omega}} =$$

$$= -\frac{\pi}{2\omega}\,\frac{0{,}6068 + 0{,}0033}{1{,}1697 + 0{,}0011} = -\frac{\pi}{2\omega}\,0{,}521.$$

Hieraus folgt

$$L = \frac{\pi}{2\omega}(1{,}963 - 0{,}521) = \frac{\pi}{2\omega}\,1{,}442.$$

Diese Werte der Konstanten setzen wir in Gleichung (11) ein, brechen abermals die ϑ-Reihen mit dem zweiten Gliede ab und lösen die trigonometrischen Funktionen in einen reellen und imaginären Teil auf. Setzen wir noch zur Abkürzung $\frac{t\pi}{2\omega} = s$ und ziehen unsere Tabelle von pag. 450 zu Rate, so ergiebt sich:

$$(18)\quad \lambda = 0{,}511\, e^{1{,}442\, is}\,\frac{(2{,}1265\cos s + 0{,}0125\cos 3s) - i(1{,}8766\sin s + 0{,}0125\sin 3s)}{(2{,}1514\sin s - 0{,}0130\sin 3s) + i(1{,}9049\cos s - 0{,}0130\cos 3s)}.$$

Wir wollen auf dem einzelnen Halbbogen zwischen den Parallelkreisen e und e' zehn Punkte berechnen, welche bez. den äquidistanten

Hosted by Google

Werten $t = 0, \frac{\omega}{9}, \frac{2\omega}{9}, \dots \frac{9\omega}{9}$ zugehören mögen. Die entsprechenden Werte von s sind $s = 0, \frac{\pi}{18}, \frac{2\pi}{18}, \dots \frac{\pi}{2}$ oder $s = 0^0, 10^0, 20^0, \dots 90^0$. Die zugehörigen Werte von λ mögen mit $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_9$ bezeichnet werden. Man berechnet praktischer Weise zuerst den absoluten Betrag dieser Grössen; das Verhältnis des reellen und imaginären Teiles ergiebt sich dann auf trigonometrischem Wege. Das Resultat der verhältnismässig bequemen Rechnung zeigt die folgende Tabelle:

$$
\begin{aligned}
\lambda_0 &= - 0,577\, i \\
\lambda_1 &= 0,164 - 0,549\, i \\
\lambda_2 &= 0,304 - 0,470\, i \\
\lambda_3 &= 0,406 - 0,356\, i \\
\lambda_4 &= 0,464 - 0,227\, i \\
\lambda_5 &= 0,480 - 0,108\, i \\
\lambda_6 &= 0,471 + 0,017\, i \\
\lambda_7 &= 0,439 + 0,118\, i \\
\lambda_8 &= 0,393 + 0,205\, i \\
\lambda_9 &= 0,338 + 0,281\, i.
\end{aligned}
$$

Der letzte Wert liefert eine erwünschte Kontrolle unserer Rechnung; es muss nämlich sein absoluter Betrag gleich dem Radius des in die Äquatorebene stereographisch projicierten Parallelkreises e', d. h. gleich $\operatorname{tang}\left(\frac{1}{2} \operatorname{arc} \cos e'\right)$ sein. In der That wird

$$\log |\lambda_9| = 0,6434 - 1 = \log \operatorname{tang} (23^0\, 45')$$

und in Übereinstimmung mit Gleichung (14) bis auf einen Fehler, der weniger als $\frac{1}{1000}$ des ganzen Wertes beträgt,

$$\cos (47^0\, 30') = 0,6756 = e'.$$

Die vorstehenden Werte von λ geben uns für die Zeichnung der Bahnkurve in stereographischer Projektion die rechtwinkligen Koordinaten von zehn ihrer Punkte, welche in der folgenden Figur durch die Zahlen 0, 1, 2, . . . markiert sind. Man hat dabei nur zu beachten, dass die positive reelle und imaginäre Axe der λ-Ebene durch Projektion aus denjenigen beiden Meridianen der Einheitskugel entstehen, welche bez. durch die positive x- und y-Axe hindurchgehen. Da die erstere in die letztere von der Vertikalen gesehen durch eine Drehung *im* Sinne des Uhrzeigers übergeführt wird (vgl. die in Figur 4 auf pag. 18 enthaltene Festsetzung), so gilt das Entsprechende für die

Hosted by Google

positive reelle und imaginäre Axe der λ-Ebene. Zählen wir die reelle Axe positiv nach rechts, so müssen wir die imaginäre Axe nach *unten*, also umgekehrt wie es in der Gaufsischen Ebene zu geschehen pflegt, positiv rechnen. Hierauf beziehen sich die Pfeile in der Figur.

Die Bahnkurve setzt, wie die Figur zeigt, auf der negativ imaginären Axe ein und umläuft die Vertikale im Sinne des Uhrzeigers. Die Verschiedenheit in den Längen der Teilbögen 0 1, 1 2, 2 3, . . ., welche sämtlich in demselben Zeitintervalle $\frac{\omega}{9}$ durchlaufen werden, giebt uns gleichzeitig ein Bild von der wechselnden Geschwindigkeit der Kreiselspitze. Der weitere Verlauf der Bahnkurve jenseits des Punktes 9 ist den Symmetrieverhältnissen entsprechend vervollständigt worden.

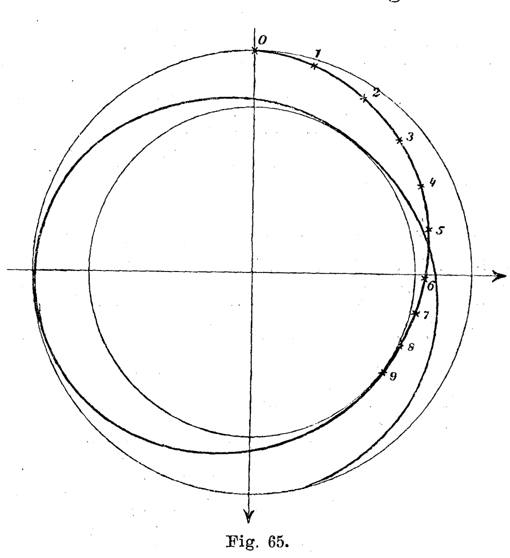


Fig. 65.

Insbesondere bemerken wir noch, dafs die Spannweite des einzelnen Halbbogens unserer Bahnkurve, die Gröfse ψ_ω, von deren Berechnung bereits pag. 269 gesprochen wurde, allgemein durch den Wert des Exponenten Lt für $t = \omega$ gegeben ist. Unsere Bahnkurvengleichung liefert nun für ψ_ω den Wert

$$\psi_\omega = L\omega = (l + l')\,\omega - \pi.$$

In unserem Beispiele wird also speziell

$$\psi_\omega = 1{,}442\,\frac{\pi}{2} = 129^0\,46'\,48''.$$

Auch die Berechnung der übrigen Elemente der Kreiselbewegung, z. B. die Berechnung der Horizontalprojektionen unserer beiden Impulskurven, bietet nun gar keine Schwierigkeit mehr. Die Ähnlichkeit in der analytischen Darstellung dieser Kurven mit der Darstellung unserer Bahnkurve wird dabei eine qualitative Ähnlichkeit in dem Verlauf dieser Kurven mit der eben angezeichneten bewirken.

Zum Schlusse möchten wir nachdrücklichst auf die merkwürdige Einfachheit und den ganz elementaren Charakter der somit gewonnenen numerischen Berechnungsweise der Kreiselbahnen hinweisen. Der analytische Apparat der elliptischen Funktionen versieht uns nicht nur

Hosted by Google

mit der theoretisch genauen Bahnkurvengleichung (17), sondern auch, was nicht minder bemerkenswert ist, mit einer höchst elementaren, praktisch ausreichenden Näherungsformel (in unserem Beispiele Gleichung (18)), welche weit vollständiger und bequemer ist, als die am Schlusse des vierten Kapitels entwickelten angenäherten Methoden. Natürlich ist die Zulässigkeit der in Rede stehenden Näherungsformel an die Bedingung gebunden, daſs man das Argument der ϑ-Funktion vorher auf das den Nullpunkt umgebende Periodenparallelogramm reduziert und daſs man, falls es nötig ist, ein Periodenrechteck von gröſserer Breite als Höhe in ein solches von gröſserer Höhe als Breite transformiert hat. Die Leichtigkeit, mit welcher diese Reduktion (durch die Funktionalgleichungen der ϑ-Funktionen) bez. diese Transformation (durch die Transformationsgleichung (3)) bei den ϑ-Funktionen ausgeführt werden kann, bildet einen der Vorzüge, welche die Rechnung mit den ϑ-Funktionen vor der direkten Auswertung der elliptischen Integrale auszeichnet.

Daſs in unserer Näherungsformel die transcendenten Konstanten ω, ω', a und b vorkommen, kann den elementaren Charakter der Näherungsmethode ebenso wenig beeinträchtigen, wie das Vorkommen der Exponentialgröſsen oder der trigonometrischen Funktionen, da jene Gröſsen ebenso wie diese ohne Umstände aus den betreffenden Tafeln entnommen werden können. Wenn man also eine elementare analytische Behandlung der Kreiselbewegung wünscht, so ist diese gerade auf dem Gebiete der elliptischen Funktionen zu suchen und durch Abbrechen der ϑ-Reihen zu realisieren.

Überhaupt können wir sagen, indem wir die Ergebnisse dieses Paragraphen etwas verallgemeinernd aussprechen: *Eine ϑ-Reihe bedeutet praktisch nichts anderes als eine Summe von zwei trigonometrischen Termen. Jede Formel mit elliptischen Funktionen läſst sich für die Zwecke des numerischen Rechnens durch eine solche mit wenigen trigonometrischen Funktionen ersetzen.*

§ 7. Darstellung der Bewegungen des kräftefreien Kreisels durch elliptische Funktionen.

Wir wollen in diesem Paragraphen die Bewegung des kräftefreien unsymmetrischen Kreisels, welche früher (vgl. pag. 149 ff.) nur bis zur Aufstellung der elliptischen Integrale geführt worden ist, nach dem Vorbilde der Theorie des schweren symmetrischen Kreisels eingehender untersuchen und durch die elliptischen Funktionen explicite darstellen.

Wir werden uns hier auf die analytische Seite des Problems beschränken dürfen, da wir die geometrischen Eigenschaften dieser Be-

wegung schon früher (Kap. III § 2) im Anschlusse an Poinsot ausgiebig diskutiert haben. In erster Linie wünschen wir zu zeigen, wie auch hier unsere Parameter $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die einfachste und vollständigste Beschreibung des Bewegungsvorganges vermitteln.

Um eine kurze Bezeichnung zu haben, belegen wir die ganze Klasse der hier zu betrachtenden Bewegungen mit dem schon früher benutzten Namen der *Poinsot-Bewegungen.*

Wir setzen zunächst die früher (pag. 148—150) gewonnenen Formeln her, welche für das Folgende hauptsächlich in Betracht kommen. Es sind dieses zunächst die beiden algebraischen Integrale der kräftefreien Kreiselbewegung, die Sätze von der Konstanz der lebendigen Kraft und der Impulslänge:

$$(1)\qquad \begin{cases} Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = 2h, \\ A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = G^2. \end{cases}$$

Bezeichnet ferner u das Quadrat der Länge des Drehungsvektors

$$u = p^2 + q^2 + r^2,$$

so berechneten sich p^2, q^2 und r^2 als lineare Funktionen von u, wobei insbesondere

$$(2)\qquad r^2 = \frac{uAB - 2h(A+B) + G^2}{(C-A)(C-B)}$$

war; die Zeit t aber wurde das folgende elliptische Integral

$$(3)\qquad t = \frac{1}{m}\int\frac{du}{pqr},$$

in welchem die Konstante m, (welche pag. 149 mit c bezeichnet wurde), den Wert

$$(4)\quad m = 2\left(\frac{B-C}{A} + \frac{C-A}{B} + \frac{A-B}{C}\right) = -2\,\frac{(A-B)(B-C)(C-A)}{ABC}$$

hat. Die im Raume feste Impulsaxe wählten wir bequemer Weise zur dritten Koordinatenaxe des im Raume festen Systems x, y, z. Dann drückten sich die Richtungskosinusse c, c', c'' dieser Axe gegen die im Körper festen Hauptträgheitsaxen X, Y, Z einfach durch die folgenden Gleichungen aus:

$$(5)\qquad c = \frac{Ap}{G}, \quad c' = \frac{Bq}{G}, \quad c'' = \frac{Cr}{G}.$$

Um die Behandlung des kräftefreien Kreisels möglichst enge an die des schweren Kreisels anzuschließen, wollen wir jetzt statt der Integrationsvariabeln u eine neue v einführen, welche gleich $\cos\vartheta = c''$ ist. Wir haben dann nach (5)

$$(6)\qquad v = \frac{Cr}{G};$$

die Beziehung zwischen u und v lautet daher nach (2)

$$\frac{G^2 v^2}{C^2} = \frac{uAB - 2h(A+B) + G^2}{(C-A)(C-B)}. \tag{7}$$

Um t durch v auszudrücken, berechnen wir aus (6) und (7)

$$\frac{du}{r} = \frac{G(C-A)(C-B)}{ABC} dv. \tag{8}$$

Ferner folgt aus (1) durch Elimination von q^2 oder p^2:

$$A(B-A)p^2 = (2hC - G^2v^2)\frac{B}{C} - G^2 + G^2v^2,$$

$$B(A-B)q^2 = (2hC - G^2v^2)\frac{A}{C} - G^2 + G^2v^2,$$

mithin

$$\begin{cases} p^2 = \dfrac{G^2(B-C)}{AC(B-A)}\left(\dfrac{(2hB-G^2)C}{(B-C)G^2} - v^2\right), \\ q^2 = \dfrac{G^2(A-C)}{BC(A-B)}\left(\dfrac{(2hA-G^2)C}{(A-C)G^2} - v^2\right). \end{cases} \tag{9}$$

Führen wir noch die Abkürzungen ein

$$\begin{cases} e^2 = \dfrac{(2hA-G^2)C}{(A-C)G^2}, \quad e'^2 = \dfrac{(2hB-G^2)C}{(B-C)G^2}, \\ V = \dfrac{(A-C)(B-C)}{AB}\dfrac{G^2}{C^2}(e^2-v^2)(v^2-e'^2), \end{cases} \tag{9'}$$

so können wir schreiben

$$pq = \frac{G}{A-B}\sqrt{V}. \tag{10}$$

Unser Integral (3) lautet daher, in die neue Variable v transformiert, mit Rücksicht auf (8), (10) und den in (4) angegebenen Wert von m:

$$t = \int \frac{dv}{\sqrt{V}}.$$

Unter der Quadratwurzel steht jetzt das Polynom vierten Grades V. Seine Nullstellen $v = \pm e$ und $v = \pm e'$ geben die sämtlichen Verzweigungspunkte der *zweiblättrigen Riemannschen Fläche* $(v, \sqrt{V})$ an, auf welcher wir im Folgenden zu operieren haben. Je zwei übereinanderliegende Punkte der Riemannschen Fläche sind durch gleiche Werte von v und entgegengesetzt gleiche von $\sqrt{V}$ charakterisiert.

Um die gegenseitige Lage der Verzweigungspunkte beurteilen zu können, berechnen wir aus (9) zunächst

$$e'^2 - e^2 = \frac{(2hC-G^2)(A-B)C}{(A-C)(B-C)G^2}; \tag{10'}$$

ferner setzen wir bezüglich der Hauptträgheitsmomente A, B, C voraus:

$$A > B > C.$$

Dann werden nach (9′) und (10′) die Vorzeichen von e^2, e'^2 und $e'^2 - e^2$ bez. gleich den Vorzeichen der Gröſsen

$$2hA - G^2, \quad 2hB - G^2, \quad 2hC - G^2.$$

Die letzteren ergeben sich aber, wenn wir aus den Gleichungen (1) der Reihe nach p^2, q^2 und r^2 eliminieren. Dann entsteht nämlich

$$(11) \qquad \begin{cases} 2hA - G^2 = B(A - B)q^2 + C(A - C)r^2, \\ 2hB - G^2 = A(B - A)p^2 + C(B - C)r^2, \\ 2hC - G^2 = A(C - A)p^2 + B(C - B)q^2. \end{cases}$$

Hier ist die rechte Seite der ersten Gleichung, da p^2, q^2, r^2 bei der thatsächlich stattfindenden Kreiselbewegung reelle positive Gröſsen sind, wegen der für die Hauptträgheitsmomente festgesetzten Ungleichung jedenfalls positiv, die rechte Seite der letzten Gleichung sicherlich negativ. Dagegen kann die rechte Seite der zweiten Gleichung (wegen $B - A < 0$ und $B - C > 0$) sowohl positiv wie negativ sein. Wir teilen daher die Bewegungen des kräftefreien Kreisels in zwei verschiedene Klassen $2hB - G^2 > 0$ und $2hB - G^2 < 0$ ein; den Grenzfällen $2hB - G^2 = 0$, welche beiden Klassen gemeinsam sind, gehört unter Anderem die instabile Rotation um die mittlere Hauptträgheitsaxe mit $p = 0$, $r = 0$ zu. Wir wollen aber im Folgenden vorerst nur solche Bewegungen betrachten, welche zu der Klasse $2hB - G^2 > 0$ gehören. Dann haben wir

$$2hA - G^2 > 0, \quad 2hB - G^2 > 0, \quad 2hC - G^2 < 0,$$

und dementsprechend

$$e^2 > 0, \quad e'^2 > 0, \quad e^2 > e'^2.$$

Die vier Verzweigungspunkte $\pm e$, $\pm e'$ liegen also sämtlich auf der reellen Axe und folgen auf einander in der Reihenfolge:

$$-\infty < -e < -e' < +e' < e < +\infty.$$

Die folgende Figur stellt einen durch die reelle Axe gelegten Ausschnitt aus der Riemannschen Fläche $(v, \sqrt{V})$ vor. Auf der so ent-

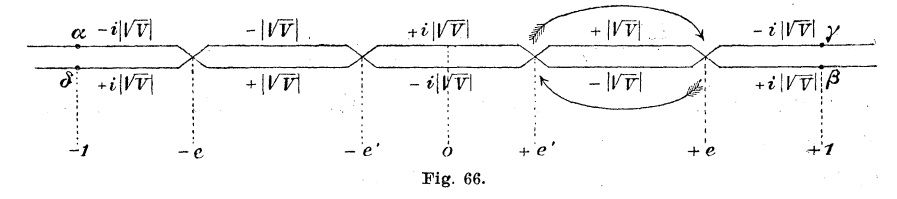


Fig. 66.

stehenden Doppelgeraden unterscheiden wir die vier Segmente $(-e, -e')$, $(-e', +e')$, $(+e', +e)$ und das im Unendlichen geschlossene Segment $(+e, \infty, -e)$. Nach Gleichung (9′) ist V in dem ersten und

dritten dieser Segmente positiv, in dem zweiten und vierten negativ. Damit also t reell ausfällt, ist die Integrationsvariable v auf eins der erstgenannten Segmente, sagen wir auf das Segment $(+e', +e)$ zu beschränken. Um dieses haben wir sie, damit dt überdies positiv wird, fortgesetzt in demselben Sinne (vgl. den Pfeil der Figur) herumzuführen. Die untere Grenze des Integrals legen wir in den Verzweigungspunkt $v = e$.

Im Folgenden bezeichnen wir mit 2ω den Zuwachs, den t bei einem vollen Umlauf um unser Integrationssegment ee' erfährt, setzen also

$$(12) \qquad \omega = \int_{e}^{e'} \frac{dv}{\sqrt{V}}.$$

Derselbe Zuwachs 2ω entsteht dann auch bei einem (in geeignetem Sinne gerechneten) Umlauf um das Segment $(-e, -e')$. Andrerseits bezeichnen wir (aus später ersichtlichen Gründen) den Zuwachs, den t bei einem Umlauf um eins der beiden anderen Segmente $(-e', e')$ bez. $(e, \infty, -e)$ annimmt, mit $4i\omega'$, so daſs also beispielsweise wird

$$(12') \qquad 2i\omega' = \int_{+e}^{\infty} \frac{dv}{\sqrt{V}} + \int_{-\infty}^{-e} \frac{dv}{\sqrt{V}}.$$

Die Gröſsen 2ω und $4i\omega'$ heiſsen *die Perioden unseres überall endlichen Integrals* t.

Vor allem müssen wir uns jetzt mit unseren Parametern α, β, γ, δ beschäftigen. Wir leiten zunächst Integralausdrücke für die Logarithmen dieser Gröſsen aus den pag. 43 gegebenen Gleichungen (4) ab.

Beispielsweise haben wir nach der ersten dieser Gleichungen

$$(13) \qquad \frac{d \log \alpha}{dt} = \frac{ir}{2} + \frac{q + ip}{2} \, \frac{\beta}{\alpha}.$$

Um hier den Quotienten $\frac{\beta}{\alpha}$ durch bekannte Gröſsen auszudrücken, vergleichen wir die dritten Horizontalreihen in den Schematen (3) und (9) von pag. 17 und 21 miteinander. Wir finden dann

$$(14) \qquad \alpha\gamma = \frac{ic' - c}{2}, \quad \beta\delta = \frac{ic' + c}{2}, \quad \alpha\delta + \beta\gamma = c''.$$

Verbindet man die letzte dieser Gleichungen mit der Identität $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, so ergiebt sich

$$(14') \qquad \alpha\delta = \frac{c'' + 1}{2}, \quad \beta\gamma = \frac{c'' - 1}{2}.$$

Aus (14) und (14′) folgt nun durch Division

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{ic' + c}{c'' + 1} = \frac{c' - 1}{ic' - c}.$$

Hosted by Google

Hier tragen wir noch die in (5) angegebenen Werte von c, c', c'' ein und erhalten:

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{Ap + iBq}{Cr + G} = \frac{G - Cr}{Ap - iBq}. \tag{15}$$

Mithin geht Gleichung (13) über in

$$\frac{d \log \alpha}{dt} = \frac{ir}{2} + \frac{q + ip}{2} \frac{Ap + iBq}{Cr + G}. \tag{16}$$

Auf der rechten Seite wollen wir p, q, r durch v ausdrücken. Bringen wir auf gleichen Nenner, so ergiebt sich rechts

$$\frac{i(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) + iGr + (A - B)pq}{2(Cr + G)}.$$

Im Zähler ist der erste Term nach dem Satze der lebendigen Kraft konstant $= 2ih$; der letzte Term wird nach Gleichung (10) gleich $G\sqrt{V}$. Mithin nimmt (16), wenn wir für r den Wert aus Gleichung (6) substituieren, die Form an:

$$\frac{d \log \alpha}{dt} = \frac{\frac{2ih}{G} + \frac{iG}{C} v + \sqrt{V}}{2(v + 1)}. \tag{16'}$$

Ersetzen wir endlich die Differentiation nach t durch eine solche nach v, so ergiebt sich

$$\frac{d \log \alpha}{dv} = \frac{\frac{2ih}{G} + \frac{iG}{C} v + \sqrt{V}}{2(v + 1)} \frac{1}{\sqrt{V}}. \tag{16''}$$

Die Integraldarstellung von $\log \alpha$ *lautet daher*, wenn wir die unwesentliche Integrationskonstante weglassen:

$$\log \alpha = \int \frac{\frac{2ih}{G} + \frac{iG}{C} v + \sqrt{V}}{2(v + 1)} \frac{dv}{\sqrt{V}}; \tag{17}$$

in entsprechender Weise findet man

$$(17) \quad \begin{cases} \log \beta = \displaystyle\int \frac{-\frac{2ih}{G} + \frac{iG}{C} v + \sqrt{V}}{2(v - 1)} \frac{dv}{\sqrt{V}}, \\ \log \gamma = \displaystyle\int \frac{\frac{2ih}{G} - \frac{iG}{C} v + \sqrt{V}}{2(v - 1)} \frac{dv}{\sqrt{V}}, \\ \log \delta = \displaystyle\int \frac{-\frac{2ih}{G} - \frac{iG}{C} v + \sqrt{V}}{2(v + 1)} \frac{dv}{\sqrt{V}}. \end{cases}$$

Wir haben nun das Verhalten dieser Integrale auf unserer Riemannschen Fläche $(v, \sqrt{V})$, insbesondere die Lage der Unendlichkeitsstellen zu untersuchen.

Hosted by Google

Betrachten wir z. B. $\log \alpha$. Von den Unendlichkeitsstellen des Integranden, d. i. den Stellen $v = \pm e$, $\pm e'$; $v = -1$, $v = \infty$ kommen die Verzweigungspunkte $\pm e$ und $\pm e'$ als Unendlichkeitsstellen des Integrals nicht in Betracht, weil hier die Ordnung des Unendlichwerdens kleiner als 1 ist. Die beiden anderen Stellen $v = -1$ und $v = \infty$ repräsentieren auf der Riemannschen Fläche je zwei übereinanderliegende Punkte. Wir werden nun sehen, daſs $\log \alpha$ in den *beiden* übereinanderliegenden Punkten $v = \infty$, aber nur in einem der Punkte $v = -1$ logarithmisch unendlich wird.

Bei der Untersuchung der Stelle $v = \infty$ können wir im Zähler der Integraldarstellung (17) die beiden ersten Terme gegen den dritten $\sqrt{V}$ fortlassen, weil jene von niedrigerer Ordnung unendlich werden wie dieser. Streichen wir auch im Nenner 1 gegen v, so behalten wir einfach übrig

$$\log \alpha = \int \frac{dv}{2v} = \frac{1}{2} \log v. \tag{18}$$

Diese Rechnung gilt gleichmäſsig für beide Punkte $v = \infty$ der Riemannschen Fläche und für alle vier Parameter α, β, γ, δ. Wir sehen also:

Für $v = \infty$ werden die Logarithmen aller vier Parameter in beiden Blättern der Fläche logarithmisch unendlich.

Wir fügen noch, indem wir uns auf die Erklärungen von pag. 404 und auf die Darstellung von $\log \alpha$ in Gleichung (18) stützen, hinzu:

Bei einem positiven, auf der Riemannschen Fläche geschlossenen einmaligen Umlauf um eine der beiden Stellen $v = \infty$ erfahren die Logarithmen unserer vier Parameter den Zuwachs $-\pi i$.

Indem wir zur Stelle $v = -1$ übergehen, bemerken wir zunächst, daſs, wenn $v + 1 = 0$, d. h. $Cr + G = 0$ ist, nach den beiden letzten Gliedern von Gleichung (15) gleichzeitig auch entweder $Ap + iBq$ oder $Ap - iBq$ verschwindet. Das eine findet im einen, das andere im anderen Blatte der Riemannschen Fläche statt.

In demjenigen Blatte nun, wo $Ap + iBq$ verschwindet, bleibt nach Gleichung (16) $\frac{d \log \alpha}{dt}$ und also auch $\log \alpha$ endlich, weil hier das Nullwerden des Nenners durch das des Zählers aufgehoben wird. Wir merken insbesondere noch den Wert von $\sqrt{V}$ an, der sich aus dem soeben erwiesenen Verschwinden des Zählers in Gleichung (17) ergiebt:

$$\sqrt{V} = -\left(\frac{2ih}{G} + \frac{iG}{C} v\right).$$

In dem anderen Blatte dagegen, wo $Ap - iBq$ verschwindet, findet ein Unendlichwerden von $\log \alpha$ statt. Die Art des Unendlich-

Hosted by Google

werdens ergiebt sich folgendermaſsen. Da die Werte von $\sqrt{V}$ in übereinanderliegenden Punkten der Riemannschen Fläche sich nur im Vorzeichen unterscheiden, so wird für die in Rede stehende Stelle der Wert von $\sqrt{V}$ dem soeben angegebenen entgegengesetzt gleich; wir haben jetzt:

$$\sqrt{V} = +\left(\frac{2ih}{G} + \frac{iG}{C}v\right).$$

Der Zähler in Gleichung (17) wird also einfach gleich $2\sqrt{V}$, so daſs sich ergiebt:

$$\log\alpha = \int\frac{dv}{v+1} = \log(v+1). \tag{18'}$$

Untersucht man in entsprechender Weise das Verhalten von $\log\beta$, $\log\gamma$, $\log\delta$ an den Stellen $v = \pm 1$, so kommt man zu dem folgenden zusammenfassenden Resultat:

Die Logarithmen unserer Parameter α, β, γ, δ *werden je in einem der vier zu den Werten* $v = \pm 1$ *gehörigen Punkten der Riemannschen Fläche* $(v, \sqrt{V})$ *logarithmisch unendlich. Der Zuwachs, den diese Logarithmen bei einem positiven einmaligen Umlauf um die betreffende Unendlichkeitsstelle erfahren, ist, wie aus Gleichung* (18′) *hervorgeht, gleich* $+2\pi i$.

Die Verteilung der Unendlichkeitsstellen auf die beiden Blätter der Riemannschen Fläche ist in Fig. 66 pag. 457 durch Beifügung der Buchstaben α, β, γ, δ angedeutet.

Das Verhalten unserer Parameter auf der Riemannschen Fläche im vorliegenden Falle ist hiernach nicht ganz so einfach wie im Falle des schweren symmetrischen Kreisels. Ihre Logarithmen sind jetzt nicht wie früher Normalintegrale dritter Gattung, da sie im Ganzen an drei Stellen der Riemannschen Fläche unendlich werden, nämlich je an zwei bei $v = \infty$ und je an einer bei $v = \pm 1$ gelegenen Stelle. Dieser Umstand hat für die spätere Darstellung durch die ϑ-Funktionen seine gewichtigen Konsequenzen.

Nunmehr gehen wir von den Logarithmen zu den Parametern selbst über. Dabei verwandelt sich die logarithmische Unstetigkeit (18′) in eine einfache Nullstelle, die Unstetigkeit (18) aber in eine Unendlichkeitsstelle, in deren Umgebung sich α (und entsprechend β, γ und δ) wie $C\sqrt{v}$ verhält. Hieraus folgt, *daſs unsere Parameter im Unendlichen der Riemannschen Fläche verzweigt sind;* sie ändern sich nämlich bei einem auf der Fläche geschlossenen Umlauf um einen der beiden Punkte $v = \infty$ im Vorzeichen. Überall sonst sind sie relativ zur Riemannschen Fläche unverzweigt und bleiben dementsprechend bei allen denjenigen Umläufen ungeändert, welche den Wert von t ungeändert lassen. Ferner

Hosted by Google

nehmen sie bei den „Periodenumläufen", bei denen sich t um 2ω bez. $4i\omega'$ vermehrt, gewisse charakteristische Faktoren an, deren Logarithmen als Perioden der Integrale (17) berechnet werden könnten.

Nach diesen Vorbereitungen nehmen wir den Umkehrgedanken aus § 3 dieses Kapitels auf. Wir betrachten also von jetzt an t als unabhängige Variable und deuten diese in einer komplexen t-Ebene. In dieser Ebene zeichnen wir das früher beschriebene schachbrettartige Muster (vgl. Figur 64), welches die Ebene in unendlich viele Rechtecke einteilt, mit dem Unterschiede, dafs die Länge der horizontalen und vertikalen Rechtecksseiten jetzt 2ω und $4\omega'$ beträgt. Jedes einzelne dieser Rechtecke stellt eine konforme Abbildung unserer Riemannschen Fläche $(v, \sqrt{V})$ vor.

Es genügt nun (wie früher) die Werteverteilung der Funktionen $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$, $\delta(t)$ in einem dieser Rechtecke zu verfolgen, weil der Übergang zu den benachbarten Rechtecken durch Multiplikation mit den vorher genannten Konstanten bewerkstelligt wird. Betrachten wir z. B. (vgl. Fig. 67) das Rechteck mit den Ecken

$$\omega + 2i\omega', \quad -\omega + 2i\omega', \quad -\omega - 2i\omega', \quad \omega - 2i\omega'.$$

Da jeder Parameter auf der Riemannschen Fläche an einer Stelle 0 und an zwei Stellen ∞ wird, mufs es auch in unserem Rechtecke, welches ja ein eindeutiges Abbild der Fläche ist, für jeden Parameter eine Nullstelle und zwei Unendlichkeitsstellen geben. Wie liegen diese Stellen?

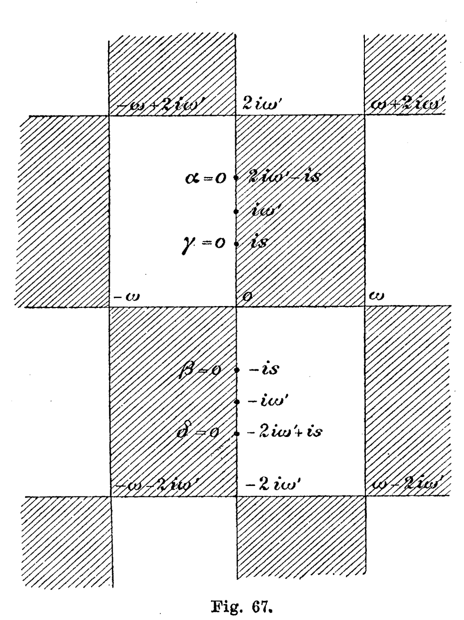


Fig. 67.

Um die Nullstellen zu ermitteln, berechnen wir den Wert des Integrals erster Gattung t von e bis 1. Da e einen Cosinus bedeutet (den Cosinus des kleinsten Winkels, welchen die Axe Z mit der Axe z bei der Kreiselbewegung bildet), so ist jedenfalls $e \leqq 1$ und der Wert des genannten Integrales imaginär. Wir setzen ihn gleich is und haben, da $\sqrt{V}$ nur die Quadrate von v enthält:

$$(19) \qquad is = \int\limits_e^1 \frac{dv}{\sqrt{V}} = -\int\limits_{-e}^{-1} \frac{dv}{\sqrt{V}}.$$

Hiernach sind die Nullstellen von γ und β direkt gegeben durch $t = +is$ *und* $t = -is$. Um ferner zu den Nullstellen von α und δ zu gelangen, gehen wir entweder im oberen oder unteren Blatte von e durch das Unendliche hindurch nach $-e$ und von da nach dem Punkte $v = -1$. Das Integral t nimmt hierbei einen der Werte $\pm 2i\omega' \pm is$ an. Von diesen liegen, als Punkte der t-Ebene gedeutet, die Werte $2i\omega' - is$ und $-2i\omega' + is$ in unserem Periodenrechteck. *Der eine von ihnen liefert die Nullstelle von α, der andere die von δ.* Wie sich im Einzelnen die Nullstellen von γ und β auf die Punkte $\pm is$ und die Nullstellen von δ und α auf die Punkte $\pm(2i\omega' - is)$ verteilen, ist nicht schwer zu entscheiden. Wir gehen hierauf indessen nicht ein, sondern verweisen dieserhalb auf Figur 67.

Die Lage der Unendlichkeitsstellen ferner ist durch den Wert des Integrales

$$\int_e^\infty \frac{dv}{\sqrt{V}}$$

charakterisiert. Hierfür können wir auch schreiben, da V nur gerade Potenzen von v enthält:

$$\frac{1}{2}\left(\int_e^\infty \frac{dv}{\sqrt{V}} + \int_{-\infty}^{-e} \frac{dv}{\sqrt{V}}\right)$$

Der Wert dieses Ausdruckes ist aber nach Gleichung (12′) bekannt, nämlich gleich $i\omega'$. Verlegen wir den Integrationsweg in das andere Blatt, so ergiebt sich ersichtlich $-i\omega'$ statt $+i\omega'$. *In der t-Ebene entsprechen daher den beiden übereinander liegenden Punkten $v = \infty$, den Unendlichkeitsstellen unserer Parameter, die Punkte $t = \pm i\omega'$.*

Aufser den angegebenen und in Figur 67 verzeichneten Punkten sind natürlich die sämtlichen äquivalenten Punkte, welche sich von jenen um die Periodenvielfache $2m\omega + 4m'i\omega'$ unterscheiden, gleichfalls Null- bez. Unendlichkeitsstellen. Die Ordnung des Null- und Unendlichwerdens ist dabei dieselbe wie auf der Riemannschen Fläche. Die Ordnung der Nullstellen ist durchweg gleich 1, die der Unendlichkeitsstellen gleich $\frac{1}{2}$.

Auf die Lage der Null- und Unendlichkeitsstellen gründen wir nun die analytische Darstellung unserer Parameter durch ϑ-Quotienten. Dabei ist wohl zu bemerken, dafs an der Definition der ϑ-Funktion (vgl. pag. 418) eine kleine Änderung deshalb vorzunehmen ist, weil die Perioden unseres Integrals erster Gattung, welche früher 2ω und $2i\omega'$ hiefsen, jetzt mit 2ω und $4i\omega'$ bezeichnet wurden. Dementsprechend

Hosted by Google

ist in der Reihendarstellung sowie in den Funktionalgleichungen der ϑ-Funktion etc. durchweg $2\omega'$ durch $4\omega'$ zu ersetzen. Um Zweideutigkeiten zu vermeiden, wollen wir diese ϑ-Funktion mit $\Theta(t)$ bezeichnen — allerdings sehr im Gegensatz zu der von Jacobi eingeführten Bedeutung dieses Zeichens — während wir die Bezeichnung $\vartheta(t)$ für die mit den Gröſsen 2ω, $2i\omega'$ gebildete Reihe reservieren. Ausführlich geschrieben lautet daher die Definition der beiden im Folgenden neben einander zu benutzenden Funktionen $\vartheta(t)$ und $\Theta(t)$ folgendermaſsen:

$$\vartheta(t) = \vartheta(t, 2\omega, 2i\omega') = e^{-\frac{\omega'\pi}{4\omega}} \sin\frac{\pi t}{2\omega} - e^{-\frac{9\omega'\pi}{4\omega}} \sin\frac{3\pi t}{2\omega} + \cdots$$

$$\Theta(t) = \vartheta(t, 2\omega, 4i\omega') = e^{-\frac{2\omega'\pi}{4\omega}} \sin\frac{\pi t}{2\omega} - e^{-\frac{18\omega'\pi}{4\omega}} \sin\frac{3\pi t}{2\omega} + \cdots$$

Um zur Darstellung von α zu gelangen, betrachten wir nun den Quotienten

$$\frac{\Theta(t - 2i\omega' + is)}{\sqrt{\Theta(t - i\omega')\,\Theta(t + i\omega')}}.$$

Dieser wird an denselben Stellen und von derselben Ordnung null und unendlich wie unser Parameter α. Überdies ändert er sich ebenso wie dieser bei Vermehrung von t um 2ω bez. um $4i\omega'$ nur um konstante Faktoren. Dividieren wir also α durch diesen Quotienten, so bekommen wir eine nirgends im Endlichen verschwindende und nirgends unendlich werdende eindeutige Funktion, welche sich mit konstanten Faktoren multipliziert, wenn t um eine der Perioden vermehrt wird. Von einer solchen Funktion weist man aber genau so wie pag. 420 nach, daſs sie die Form $k e^{lt}$ haben muſs. *Mithin folgt:*

$$(20) \qquad \alpha = k_1 e^{l_1 t} \frac{\Theta(t - 2i\omega' + is)}{\sqrt{\Theta(t - i\omega') \cdot \Theta(t + i\omega')}}.$$

In entsprechender Weise ergiebt sich:

$$(20) \qquad \left\{\begin{aligned} \beta &= k_2 e^{l_2 t} \frac{\Theta(t + is)}{\sqrt{\Theta(t - i\omega') \cdot \Theta(t + i\omega')}}, \\ \gamma &= k_3 e^{l_3 t} \frac{\Theta(t - is)}{\sqrt{\Theta(t - i\omega') \cdot \Theta(t + i\omega')}}, \\ \delta &= k_4 e^{l_4 t} \frac{\Theta(t + 2i\omega' - is)}{\sqrt{\Theta(t - i\omega') \cdot \Theta(t + i\omega')}}. \end{aligned}\right.$$

Hier sind noch die Konstanten k und l zu bestimmen.

Bezüglich der Konstanten l zeigen wir zunächst, daſs

$$(21) \qquad l_4 = -l_1, \quad l_3 = -l_2$$

sein muſs. Aus den Gleichungen (14′)

Hosted by Google

$$\alpha\delta = \frac{v+1}{2}, \qquad \beta\gamma = \frac{v-1}{2}$$

folgt nämlich, daſs diese Produkte ebenso wie v selbst doppelperiodische Funktionen mit den Perioden 2ω und $4i\omega'$ sind. Vermehren wir nun t um 2ω, so würde sich $\alpha\delta$ und $\beta\gamma$ bez. um die Faktoren

$$e^{(l_1+l_4)2\omega} \text{ bez. } e^{(l_2+l_3)2\omega}$$

ändern, da die in $\alpha\delta$ und $\beta\gamma$ auftretenden Θ-Funktionen im Quotienten ungeändert bleiben. Andrerseits würden sich dieselben Gröſsen, wenn wir t um $4i\omega'$ vermehren, um die Faktoren

$$e^{(l_1+l_4)4i\omega'} \text{ bez. } e^{(l_2+l_3)4i\omega'}$$

ändern. Diese sämtlichen vier Faktoren sind also gleich 1 zu setzen, was nur dadurch zu erreichen ist, daſs wir, wie oben angegeben, $l_4 = -l_1$, $l_3 = -l_2$ nehmen.

Wir wollen ferner zeigen, daſs

$$l_2 = l_1 + \frac{\pi i}{2\omega} \tag{22}$$

ist. Zu dem Zwecke gehen wir von einer der Gleichungen (14) aus, welche wir mit Rücksicht auf (5) so schreiben können:

$$\alpha\gamma = \frac{iBq - Ap}{2G}. \tag{23}$$

Nun zeigen aber die in den Gl. (9) für p^2 und q^2 berechneten Werte, daſs p und q bei einem einmaligen Umgang um die Verzweigungspunkte $v = e$ und $v = e'$, bei welchem t um 2ω wächst, sich im Vorzeichen ändern, daſs sie aber bei einem Umgange um die Punkte $v = e$ und $v = -e$, während dessen t um $4i\omega'$ wächst, ungeändert bleiben. Andrerseits würde nach den Gleichungen (20) und (21), wenn wir t um 2ω bez. $4i\omega'$ vermehren, $\alpha\gamma$ die Faktoren annehmen

$$e^{(l_1-l_2)2\omega} \text{ bez. } e^{(l_1-l_2)4i\omega'}\, e^{-\frac{2\pi\omega'}{\omega}}.$$

Der erste dieser Faktoren ist also gleich -1, der zweite gleich $+1$ zu setzen. Dies führt mit Notwendigkeit auf die angegebene Relation (22).

Somit bleibt nur noch die eine Gröſse l_1 übrig. Ihr Wert ergiebt sich aus (20) durch logarithmische Differentiation:

$$l_1 = \frac{d\log\alpha}{dt} - \frac{d\log\Theta(t-2i\omega'+is)}{dt} + \frac{1}{2}\left\{\frac{d\log\Theta(t+i\omega')}{dt} + \frac{d\log\Theta(t-i\omega')}{dt}\right\}. \tag{24}$$

Hier können wir für t irgend einen speziellen Wert einsetzen, für den der zugehörige Wert von v und also auch (nach (16')) der Wert

Hosted by Google

von $\frac{d \log \alpha}{dt}$ bekannt ist. Z. B. kann man $t = -is$ nehmen, worauf

$$v = +1, \quad \sqrt{V} = -\frac{2ih}{G} + \frac{iG}{C}, \quad \frac{d \log \alpha}{dt} = \frac{iG}{2C}$$

wird. Es folgt dann

$$(24') \qquad l_1 = \frac{iG}{2C} + \frac{\Theta'(2i\omega')}{\Theta(2i\omega')} + \frac{1}{2}\left\{\frac{\Theta'(i\omega' - is)}{\Theta(i\omega' - is)} - \frac{\Theta'(i\omega' + is)}{\Theta(i\omega' + is)}\right\}.$$

Hieraus erkennt man, dafs l_1 rein imaginär ist, so dafs wir l_1 lieber gleich il setzen, wo l reell ist.

Man könnte den Ausdruck für l_1 bez. für l leicht noch etwas vereinfachen; indessen legen wir hierauf keinen Wert, da wir im Folgenden *die Gröfse l selbst* neben den Gröfsen ω, ω' und s, welche allein zur Festlegung der Bewegung nicht ausreichen, *als eine der charakteristischen Konstanten der Poinsot-Bewegung* ansehen werden.

Die vollständige Tabelle unserer Konstanten l_i lautet nun folgendermafsen:

$$(25) \quad l_1 = il, \quad l_2 = i\left(l + \frac{\pi}{2\omega}\right), \quad l_3 = -i\left(l + \frac{\pi}{2\omega}\right), \quad l_4 = -il.$$

Um auch die Konstanten k zu bestimmen, gehen wir auf die Anfangswerte der α, β, γ, δ zur Zeit $t = 0$ zurück und drücken diese nach der ursprünglichen Definition von pag. 21 durch die Anfangswerte der Eulerschen Winkel φ, ψ, ϑ aus. Wir haben dann

$$\alpha_0 = \cos\frac{\vartheta_0}{2}\, e^{\frac{i(\varphi_0 + \psi_0)}{2}} \quad \text{etc.}$$

Die Anfangszeit $t = 0$ ist nun so gewählt, dafs in ihr $v = e$ und also, nach den Gleichungen (9), $q = 0$ wird. Aus (5) ergiebt sich aber, dafs mit q auch der Richtungscosinus c' zwischen der Y- und der z-Axe verschwindet. Der Winkel zwischen diesen beiden Axen ist also ein Rechter. Wir nannten aber diejenige Gerade der XY-Ebene, welche senkrecht zur z-Axe steht, die Knotenlinie. Mithin fallen für $t = 0$ die Knotenlinie und die Y-Axe zusammen. Es ist demnach $\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}$ zu nehmen. Der Winkel ψ_0 ferner ist gänzlich in unsere Willkür gegeben. In der That kann der Verlauf der Bewegung in keiner Weise davon abhängen, wie wir das xyz-System im Raume orientieren. Wir können insbesondere also auch die x-Axe in der Anfangslage mit der Knotenlinie zusammenfallen lassen und dementsprechend $\psi_0 = 0$ wählen. Dann aber zeigen die genannten Gleichungen von pag. 21, dafs

$$(26) \qquad \alpha_0 = -\delta_0, \quad \beta_0 = -\gamma_0$$

wird. Setzen wir andrerseits in den Gleichungen (20) $t = 0$, so er-

Hosted by Google

kennen wir, dafs nach diesen Gleichungen

$$(26') \qquad \frac{\alpha_0}{k_1} = -\frac{\delta_0}{k_4}, \quad \frac{\beta_0}{k_2} = -\frac{\gamma_0}{k_3}$$

wäre. Damit die letzten Gleichungen mit den vorhergehenden verträglich sind, mufs notwendig

$$(27) \qquad k_1 = k_4, \quad k_2 = k_3$$

genommen werden.

Um schliefslich den gemeinsamen Wert von k_1 und k_4 einerseits, von k_2 und k_3 andrerseits zu bestimmen, gehen wir auf die Gleichungen (14′)

$$(28) \qquad \alpha\delta = \frac{v+1}{2}, \quad \beta\gamma = \frac{v-1}{2}$$

zurück. Hier wollen wir die rechterhand stehenden doppeltperiodischen Funktionen von t

$$\frac{v \pm 1}{2}$$

durch t darstellen. Da $v+1$ für $t = \pm(2i\omega' - is)$ verschwindet und für $t = \pm i\omega'$ unendlich wird, so hat der Ausdruck

$$\frac{\Theta(t - 2i\omega' + is)\,\Theta(t + 2i\omega' - is)}{\Theta(t - i\omega')\,\Theta(t + i\omega')}$$

dieselben Null- und Unendlichkeitsstellen in der t-Ebene wie $v+1$. Er ist überdies gleichfalls eine doppeltperiodische Funktion und kann sich daher von $\frac{v+1}{2}$ nur um eine Konstante unterscheiden. Wir haben also

$$(29) \qquad \frac{v+1}{2} = C\,\frac{\Theta(t - 2i\omega' + is)\,\Theta(t + 2i\omega' - is)}{\Theta(t - i\omega')\,\Theta(t + i\omega')}$$

und entsprechend

$$(29') \qquad \frac{v-1}{2} = C'\,\frac{\Theta(t - is)\,\Theta(t + is)}{\Theta(t - i\omega')\,\Theta(t + i\omega')}.$$

Die Werte der hiermit eingeführten Konstanten C und C', welche natürlich nicht mit dem Trägheitsmomente C verwechselt werden dürfen, ergeben sich leicht, wenn wir etwa in (29) $t = is$, in (29′) $t = 2i\omega' - is$ einsetzen. Dann werden die linken Seiten gleich $+1$ bez. -1, und die Θ-Quotienten der rechten Seiten gleich

$$\frac{\Theta(2i\omega' - 2is)\cdot\Theta(2i\omega')}{\Theta(i\omega' - is)\cdot\Theta(i\omega' + is)}$$

bez. gleich

$$\frac{\Theta(2i\omega' - 2is)\cdot\Theta(2i\omega')}{\Theta(i\omega' - is)\cdot\Theta(3i\omega' - is)} = \frac{\Theta(2i\omega' - 2is)\cdot\Theta(2i\omega')}{\Theta(i\omega' - is)\cdot\Theta(i\omega' + is)}\,e^{-\frac{(\omega' - s)\pi}{\omega}}$$

Mithin haben wir

$$(30) \qquad C = \frac{\Theta(i\omega' - is)\,\Theta(i\omega' + is)}{\Theta(2i\omega' - 2is)\,\Theta(2i\omega')}, \quad C' = -e^{\frac{(\omega' - s)\pi}{\omega}}\,C.$$

Hosted by Google

Setzen wir nun in den Gleichungen (28) linkerhand die Werte der α, β, γ, δ aus (20) ein und drücken wir die rechten Seiten nach (29) aus, so heben sich die von t abhängigen Bestandteile heraus und wir erhalten unmittelbar:

$$k_1 k_4 = C, \quad k_2 k_3 = C',$$

also mit Rücksicht auf (27):

$$(31) \qquad k_1 = \sqrt{C}, \quad k_2 = \sqrt{C'}, \quad k_3 = \sqrt{C'}, \quad k_4 = \sqrt{C}$$

Die Vorzeichen dieser sowie der in (20) vorkommenden Quadratwurzeln sind so zu wählen, dafs die aus letzteren entspringenden Werte von α_0, β_0, γ_0, δ_0 mit dem vorher besprochenen Anfangszustande übereinstimmen.

Alles Vorhergehende zusammenfassend können wir also unsere Parameter durch das nachstehende elegante Gleichungssystem darstellen:

$$(32) \quad \begin{cases} \alpha = \sqrt{C}\, e^{ilt} \dfrac{\Theta(t - 2i\omega' + is)}{\sqrt{\Theta(t - i\omega')\,\Theta(t + i\omega')}}, \\ \beta = i\sqrt{C}\, e^{ilt}\, e^{\frac{i\pi}{2\omega}(t - i\omega' + is)} \dfrac{\Theta(t + is)}{\sqrt{\Theta(t - i\omega')\,\Theta(t + i\omega')}}, \\ \gamma = i\sqrt{C}\, e^{-ilt}\, e^{-\frac{i\pi}{2\omega}(t + i\omega' - is)} \dfrac{\Theta(t - is)}{\sqrt{\Theta(t - i\omega')\,\Theta(t + i\omega')}}, \\ \delta = \sqrt{C}\, e^{-ilt} \dfrac{\Theta(t + 2i\omega' - is)}{\sqrt{\Theta(t - i\omega')\,\Theta(t + i\omega')}}; \\ C = \dfrac{\Theta(i\omega' - is)\,\Theta(i\omega' + is)}{\Theta(2i\omega' - 2is)\,\Theta(2i\omega')}. \end{cases}$$

Durch diese Gleichungen sind die sämtlichen Poinsot-Bewegungen in ein einheitliches analytisches Schema gebracht. Wenn wir für die vier darin auftretenden Konstanten ω, ω', s und l alle möglichen reellen Werte einsetzen, müssen sich alle möglichen Bewegungen des kräftefreien Kreisels ergeben. Durch eine Abzählung überzeugt man sich übrigens leicht, dafs unsere vier Konstanten wirklich von einander unabhängig sind, ihre Zahl also nicht weiter herabgedrückt werden kann. Alle weiteren Sätze, welche wir im Folgenden aufstellen werden, sind einfache Folgerungen aus diesem analytischen Schema.

Wir richten unsere Aufmerksamkeit zunächst auf die Bahnkurve, welche irgend ein Punkt des Kreisels, der von O den Abstand 1 hat, im Raume beschreibt. (Die Bahnkurven aller übrigen Kreiselpunkte, deren Abstand von O nicht gleich 1 ist, sind natürlich jenen Bahnkurven geometrisch ähnlich.) Die Lage des betreffenden Punktes gegen den Kreisel charakterisieren wir wie früher durch die komplexe Gröfse Λ, die Lage im Raume durch λ.

Hosted by Google

Dann besteht zwischen λ und Λ die uns von früher her bekannte Beziehung:

(33) $$\lambda = \frac{\alpha \Lambda + \beta}{\gamma \Lambda + \delta}.$$

Tragen wir hier für α, β, γ, δ die gefundenen Werte ein, so ist λ als Funktion von t bekannt. Diese Funktion liefert dann in der früher beschriebenen Weise direkt die stereographische Projektion der Bahnkurve auf die xy-Ebene.

Besonders einfach wird die Gleichung für die Bahnkurve der im Abstande 1 *von O auf der Z-Axe gelegenen Punkte.* Wir wählen den auf der positiven Z-Axe gelegenen Punkt aus; (für den auf der negativen Z-Axe gilt das Folgende mutatis mutandis gleichfalls). Diesem entspricht nach Gleichung (1′) von pag. 430 der Wert $\Lambda = \infty$; der zugehörige Wert von λ werde mit λ_Z bezeichnet. Die Gleichung der Bahnkurve in stereographischer Projektion lautet daher nach (33) einfach

$$\lambda_Z = \frac{\alpha}{\gamma}$$

oder, wenn wir aus (32) einsetzen:

(34) $$\lambda_Z = -\, i e^{2ilt + \frac{i\pi}{2\omega}(t + i\omega' - is)} \frac{\Theta(t - 2i\omega' + is)}{\Theta(t - is)}.$$

Ganz entsprechende Darstellungen müssen sich aber auch für die Bahnkurven von Punkten der anderen Hauptaxen aufstellen lassen, da man ja die Bezeichnung der Axen vertauschen kann. Diese Darstellungen lassen sich auch direkt aus der Gleichung (33) herleiten. Wir setzen hier für Λ diejenigen Werte ein, welche den im Abstande 1 von O auf der positiven Y- und X-Axe gelegenen Punkten zukommen. Es sind dieses (s. Gleichung (1′) von pag. 430) die Werte $\Lambda = i$ und $\Lambda = 1$. Die Gleichung der Bahnkurve für diese Punkte lautet daher:

$$\lambda_Y = \frac{\alpha i + \beta}{\gamma i + \delta}, \quad \lambda_X = \frac{\alpha + \beta}{\gamma + \delta}.$$

Man überzeugt sich nun, indem man aus (32) einsetzt, daſs auch diese Ausdrücke als einfache Theta-Quotienten geschrieben werden können. Dabei sind aber die Perioden der hier auftretenden Thetas nicht wie bisher 2ω, $4i\omega'$, sondern vielmehr bei λ_Y 4ω, $2i\omega'$ und bei λ_X 4ω, $2\omega + 2i\omega'$. Der Grund für diese Verschiedenartigkeit der Perioden liegt, wie man noch näher ausführen könnte, offenbar darin, daſs wir bei der Auswahl der Integrationsvariabeln v und bei der Berechnung von t die auf unsere drei Axen XYZ bezüglichen Daten (p, q, r, A, B, C etc.) in unsymmetrischer Weise benutzt haben.

Die Umrechnung der vorstehenden Thetaausdrücke in die neuen mit halbierten bez. verdoppelten Perioden gehört in ein von den Mathematikern



vielfach angebautes und in theoretischer Hinsicht wichtiges Gebiet, in die sog. *Transformationstheorie der elliptischen Funktionen.* Es ist sehr interessant, dafs diese aus rein abstrakten Gesichtspunkten entwickelte Theorie, die wir im Folgenden noch mehrfach streifen werden, bei unserer Behandlung der Poinsot-Bewegung eine konkrete Anwendung findet. Leider können wir hier unmöglich ausführlich auf diese Theorie eingehen; wir müssen uns darauf beschränken, soviel als für den gerade vorliegenden Zweck erforderlich ist, davon mitzuteilen und ad hoc abzuleiten.

Durch die angedeuteten Überlegungen erkennt man nun die Richtigkeit der folgenden zusammenfassenden Angabe:

Die Bahnkurve, welche ein im Abstande 1 *von* O *gelegener Punkt einer der drei Hauptaxen bei der Poinsotbewegung beschreibt, läfst sich allemal in bemerkenswert einfacher Form durch eine elliptische Funktion zweiter Art ersten Grades beschreiben. Die Perioden dieser elliptischen Funktion sind, je nachdem es sich um einen Punkt der* Z-, Y- *oder* X-*Axe handelt,* 2ω, $4i\omega'$, *oder* 4ω, $2i\omega'$ *oder endlich* 4ω, $2\omega+2i\omega'$.

Dagegen verhalten sich die Ausdrücke für λ, welche nach Gl. (33) den Bahnkurven der übrigen Kreiselpunkte entsprechen, bei Vermehrung von t um eine der Perioden 2ω, $4i\omega'$ nicht rein multiplikativ; sie sind daher nicht als elliptische Funktionen zu bezeichnen.

Sodann betrachten wir der Vollständigkeit halber die neun Richtungscosinus $a, b, c, a', b', c', a'', b'', c''$, welche die Axen des beweglichen XYZ-Systems mit den Axen des festen xyz-Systems bilden. Wir wollen mit Hülfe von Umrechnungen, welche abermals in die Transformationstheorie der elliptischen Funktionen hineingehören, zeigen, dafs auch diese Gröfsen sich in sehr einfacher Weise, *nämlich als elliptische Funktionen zweiter Art ersten Grades mit den Perioden* 2ω, $2i\omega'$ darstellen lassen. Genauer gesagt, gilt dieses nicht von den Richtungscosinussen selbst, sondern einerseits von den komplexen Verbindungen derselben

$$a+ib, \quad a'+ib', \quad a''+ib'',$$

(sowie den konjugierten Gröfsen) und andrerseits von den Cosinussen

$$c, \quad c', \quad c''.$$

Wir schreiben uns zunächst die Ausdrücke dieser Gröfsen in den $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ hin, welche sich unmittelbar durch Vergleich der Schemata (3) und (9) von pag. 17 und 21 ergeben und verifizieren an den fertigen Ausdrücken die Richtigkeit des angegebenen Resultates. Die fraglichen Ausdrücke lauten:

$$(35) \quad \begin{cases} a+ib=\alpha^2-\beta^2, & a'+ib'= \ \ i(\alpha^2+\beta^2), \quad a''+ib''=-2\alpha\beta, \\ \quad c=-\alpha\gamma+\beta\delta, & c'=-i(\alpha\gamma+\beta\delta), \qquad c''=\alpha\delta+\beta\gamma. \end{cases}$$

Hosted by Google

Betrachten wir etwa die erste dieser Gröfsen, $a+ib$. Nach Gleichung (32) haben wir:

$$(36)\qquad a+ib=Ce^{2ilt}\frac{\Theta^2(t-2i\omega'+is)+e^{\frac{i\pi}{\omega}(t-i\omega'+is)}\Theta^2(t+is)}{\Theta(t-i\omega')\,\Theta(t+i\omega')}.$$

Der Nenner verschwindet für $t=i\omega'+2m\omega+4m'i\omega'$, sowie für $t=-i\omega'+2m\omega+4mi\omega'$. In ihrer Gesamtheit sind also die Nullstellen des Nenners gegeben durch

$$t=-i\omega'+2m\omega+2m'i\omega',$$

Ferner verschwindet der Zähler, wie man leicht aus den Eigenschaften der Θ-Funktion folgert für $t=\omega+i\omega'-is+2m\omega+4m'i\omega'$ und für $t=\omega-i\omega'-is+2m\omega+4m'i\omega'$. Die Gesamtheit dieser t-Werte läfst sich so schreiben

$$t=\omega+i\omega'-is+2m\omega+2m'i\omega'.$$

Überdies ändern sich Zähler und Nenner, nachdem man sie noch mit dem gemeinsamen Faktor $e^{-\frac{t\pi i}{2\omega}}$ multipliziert hat, bei Vermehrung von t um 2ω und $2i\omega'$ bez. um die Faktoren

$$-1,\ +e^{\frac{\pi\omega'}{\omega}-\frac{i\pi}{\omega}(t+is-i\omega')}\ \text{(Zähler)},$$
$$-1,\ -e^{\frac{\pi\omega'}{\omega}-\frac{i\pi}{\omega}(t+i\omega')}\ \text{(Nenner)}.$$

Dies sind aber gerade diejenigen Faktoren, um welche sich auch Zähler und Nenner des folgenden mit den Perioden 2ω, $2i\omega'$ gebildeten ϑ-Quotienten ändern, mit dessen Null- und Unendlichkeitsstellen auch die Null- und Unendlichkeitsstellen von $a+ib$ übereinstimmen:

$$\frac{\vartheta(t-\omega+is-i\omega')}{\vartheta(t+i\omega')}.$$

Von diesem kann sich also die obige Kombination von Θ-Reihen nur durch einen konstanten Faktor unterscheiden. Wir bekommen somit die folgende Relation zwischen den Θ-Funktionen von den Perioden 2ω, $4i\omega'$ und den ϑ-Reihen von den Perioden 2ω, $2i\omega'$:

$$(37)\qquad \begin{cases} C\,\dfrac{\Theta^2(t-2i\omega'+is)+e^{\frac{i\pi}{\omega}(t-i\omega'+is)}\Theta^2(t+is)}{\Theta(t-i\omega')\,\Theta(t+i\omega')}= \\ C_1\,\dfrac{\vartheta(t-\omega+is-i\omega')}{\vartheta(t+i\omega')}. \end{cases}$$

Zur Bestimmung von C_1 setzen wir $t=-is$, worauf die linke Seite wegen des in (32) angegebenen Wertes von C übergeht in

$$\frac{\Theta(2i\omega')}{\Theta(2is-2i\omega')}.$$

Wir haben also zunächst

$$(37') \qquad C_1 = \frac{\Theta(2i\omega')}{\Theta(2is - 2i\omega')} \cdot \frac{\vartheta(is - i\omega')}{\vartheta(\omega + i\omega')}.$$

Dieser Wert läſst sich aber noch weiter vereinfachen und ganz auf ϑ-Funktionen zurückführen. Wir stellen zu dem Zwecke die folgende allgemeine Relation*) voran:

$$(38) \qquad \frac{\Theta(2t)}{\Theta(2t_1)} = \frac{\vartheta(t)\,\vartheta(t+\omega)}{\vartheta(t_1)\,\vartheta(t_1+\omega)}.$$

Um ihre Richtigkeit einzusehen, bemerke man, daſs sich die Zähler der rechten und linken Seite bei Vermehrung von t um 2ω und $2i\omega'$ genau um die gleichen Faktoren ändern. Die Zähler sind also bis auf eine multiplikative Konstante einander gleich. Setzt man noch $t = t_1$, so sieht man, daſs diese Konstante richtig gewählt ist.

In Gleichung (38) wollen wir nun insbesondere die Werte $t = i\omega'$, $t_1 = is - i\omega'$ eintragen. Dann folgt:

$$\frac{\Theta(2i\omega')}{\Theta(2is - 2i\omega')} = \frac{\vartheta(i\omega')\,\vartheta(\omega + i\omega')}{\vartheta(is - i\omega')\,\vartheta(\omega + is - i\omega')}.$$

Mithin können wir statt (37') einfacher schreiben:

$$(39) \qquad C_1 = \frac{\vartheta(i\omega')}{\vartheta(\omega + is - i\omega')}.$$

Die Gleichung (36) für die gesuchte Gröſse $a + ib$ nimmt daher wegen (37) und (39) die folgende definitive Form an:

$$a + ib = \frac{\vartheta(i\omega')}{\vartheta(\omega + is - i\omega')} \frac{\vartheta(t - \omega + is - i\omega')}{\vartheta(t + i\omega')} e^{2ilt}.$$

In ganz entsprechender Weise kann man die sämtlichen in (35) angegebenen Ausdrücke umrechnen und auf ϑ-Funktionen von den Perioden 2ω, $2i\omega'$ reduzieren. *Wir stellen die Resultate in der folgenden Tabelle zusammen:*

$$(40) \qquad \begin{cases} a + ib = \dfrac{\vartheta(i\omega')\,\vartheta(t - \omega + is - i\omega')}{\vartheta(is - i\omega' + \omega)\,\vartheta(t + i\omega')} e^{2ilt}, \\[2ex] a' + ib' = i\,\dfrac{\vartheta(\omega + i\omega')\,\vartheta(t + is - i\omega')}{\vartheta(is - i\omega' + \omega)\,\vartheta(t + i\omega')} e^{2ilt}, \\[2ex] a'' + ib'' = i\,\dfrac{\vartheta(\omega)\,\vartheta(t + is)}{\vartheta(is - i\omega' + \omega)\,\vartheta(t + i\omega')} e^{2ilt} e^{\frac{i\pi}{2\omega}(t - i\omega' + is)}, \\[2ex] \qquad c = \dfrac{\vartheta(is)\,\vartheta(t - \omega)}{\vartheta(is - i\omega' + \omega)\,\vartheta(t + i\omega')} e^{-\frac{i\pi}{2\omega}(t + i\omega' - is)}, \\[2ex] \qquad c' = i\,\dfrac{\vartheta(\omega + is)\,\vartheta(t)}{\vartheta(is - i\omega' + \omega)\,\vartheta(t + i\omega')} e^{-\frac{i\pi}{2\omega}(t + i\omega' - is)}, \\[2ex] \qquad c'' = \dfrac{\vartheta(is + i\omega')\,\vartheta(t + i\omega' + \omega)}{\vartheta(is - i\omega' + \omega)\,\vartheta(t + i\omega')} e^{-\frac{\pi s}{\omega}}. \end{cases}$$

*) Auch diese Formel, ebenso wie die Gleichung (37) etc. wird in der Lehre von der Transformation der elliptischen Funktionen systematisch entwickelt.

Hosted by Google

Wir haben in diesen Gleichungen das wesentlichste Resultat einer berühmten Arbeit von Jacobi*) (Sur la rotation d'un corps etc.) auf einem neuen Wege abgeleitet. Dasselbe lautet in unserer Terminologie folgendermaſsen:

Die neun Richtungscosinus zwischen den Axen des beweglichen und des festen Koordinaten-Systems (oder richtiger die angegebenen komplexen Kombinationen derselben) sind sämtlich elliptische Funktionen ersten Grades von den Perioden 2ω und $2i\omega'$.

Wir gehen schlieſslich zur Betrachtung der *Polhodie-* und *Herpolhodiekurve***) der Poinsot-Bewegung über.

Über die Polhodiekurve vorderhand nur wenige Worte. Nach den Gleichungen (5) sind ihre Koordinaten p, q, r den Richtungskosinussen c, c', c'' proportional; sie stellen sich daher ebenso wie diese durch *elliptische Funktionen ersten Grades* dar. Dabei werden die Faktoren, mit denen sich p, q, r bei Vermehrung von t um die Perioden 2ω, $2i\omega'$ multiplizieren, besonders einfach, nämlich gleich ± 1, wie aus den Gleichungen (40) ersichtlich. Dies ergiebt sich auch aus dem Umstande, daſs die Gröſsen p^2, q^2 und r^2 als ganze Funktionen von v doppeltperiodisch sein, d. h. bei Periodenzuwächsen den Faktor $+1$ aufweisen müssen. Bei den Quadratwurzeln p, q, r werden daher nur die Faktoren ± 1 auftreten können.

Ausführlicher gehen wir auf die Herpolhodiekurve ein. Ihre Gleichung schreiben wir in der Form von pag. 44 an:

$$\pi + i\varkappa = 2i\left(\beta\frac{d\alpha}{dt} - \alpha\frac{d\beta}{dt}\right),$$
$$-\varrho = 2i\left(\delta\frac{d\alpha}{dt} - \gamma\frac{d\beta}{dt}\right).$$

Setzen wir in die erste Gleichung die Werte von α und β aus (32) ein, so erhalten wir:

$$\pi + i\varkappa = 2i\alpha\beta\left(\frac{d\log\alpha}{dt} - \frac{d\log\beta}{dt}\right)$$
$$= -2C\frac{\Theta(t-2i\omega'+is)\,\Theta(t+is)}{\Theta(t-i\omega')\,\Theta(t+i\omega')}e^{2ilt+\frac{i\pi}{2\omega}(t-i\omega'+is)}\cdot\left\{\frac{\Theta'(t-2i\omega'+is)}{\Theta(t-2i\omega'+is)} - \frac{\Theta'(t+is)}{\Theta(t+is)} - \frac{i\pi}{2\omega}\right\}.$$

Hier wollen wir abermals zu ϑ-Funktionen von den Perioden 2ω und $2i\omega'$ übergehen. Bemerken wir zunächst, daſs die Klammer sich bei Vermehrung von t um 2ω und $2i\omega'$ bez. um die Faktoren $+1$ und -1 ändert. Dieselben Änderungen erleidet aber der Quotient:

*) Vgl. Ges. Werke Bd. 2 pag. 293 oder Crelles Journal Bd. 39.

**) Die Darstellung der Polhodiekurve und teilweise auch die der Herpolhodiekurve durch elliptische Funktionen ist zum ersten Male von Rueb in seiner Dissertation, Utrecht 1834, gegeben.


Hosted by Google

$$\frac{\vartheta(t-\omega+is)}{\vartheta(t+is)},$$

mit dessen Null- und Unendlichkeitsstellen auch die Null- und Unendlichkeitsstellen unserer Klammer übereinstimmen. Wir haben also

$$\frac{\Theta'(t-2i\omega'+is)}{\Theta(t-2i\omega'+is)}-\frac{\Theta'(t+is)}{\Theta(t+is)}-\frac{i\pi}{2\omega}=C_1\frac{\vartheta(t-\omega+is)}{\vartheta(t+is)}.$$

Die Konstante C_1 bestimmen wir, indem wir etwa $t=-is$ setzen, zu

$$C_1=\frac{\vartheta'(0)}{\vartheta(\omega)}.$$

Desgleichen läſst sich der Θ-Quotient vor der Klammer in ϑ-Funktionen von den Perioden 2ω, $2i\omega'$ umrechnen. Es wird nämlich offenbar

$$C\frac{\Theta(t-2i\omega'+is)\,\Theta(t+is)}{\Theta(t-i\omega')\,\Theta(t+i\omega')}=C_2\frac{\vartheta(t+is)}{\vartheta(t+i\omega')}.$$

Die eingeführte Konstante C_2 bestimmt sich wieder, wenn wir $t=-is$ setzen. Mit Rücksicht auf den Wert von C aus (32) wird dann zunächst:

$$C_2=\frac{\Theta'(0)\,\vartheta(i\omega'-is)}{\Theta(2i\omega'-2is)\,\vartheta'(0)}.$$

Zur weiteren Vereinfachung dieses Quotienten gehen wir auf die Gleichung (38) zurück. Setzen wir daselbst $t=0$, $t_1=i\omega'-is$, so erhalten wir:

$$\frac{2\,\Theta'(0)}{\Theta(2i\omega'-2is)}=\frac{\vartheta'(0)\,\vartheta(\omega)}{\vartheta(i\omega'-is)\,\vartheta(\omega+i\omega'-is)}.$$

Mithin wird

$$C_2=\frac{1}{2}\,\frac{\vartheta(\omega)}{\vartheta(\omega+i\omega'-is)}.$$

Hiernach ergiebt sich für $\pi+i\varkappa$ der folgende definitive Wert:

$$(41)\quad \pi+i\varkappa=-\frac{\vartheta'(0)}{\vartheta(\omega+i\omega'-is)}\,e^{2ilt+\frac{i\pi}{2\omega}(t-i\omega'+is)}\,\frac{\vartheta(t-\omega+is)}{\vartheta(t+i\omega')}.$$

Dieser Ausdruck weist die gröſste Analogie mit dem früheren Ausdruck für die Herpolhodiekurve des schweren symmetrischen Kreisels (Gleichung (13) und (13′) von pag. 437) auf. Er ist nicht nur gleichfalls eine *elliptische Funktion ersten Grades*, sondern er kann auch, indem wir für s eine geeignete Substitution machen, direkt in jenen übergeführt werden. Im folgenden Paragraphen werden wir aus dieser Bemerkung wichtige Konsequenzen zu ziehen haben.

In entsprechender Weise können wir noch den Ausdruck von ϱ bilden. Nach Früherem (vgl. pag. 124) wissen wir, daſs ϱ eine Konstante $\left(=\frac{2h}{G}\right)$ ist. Wir können daher in dem oben angegebenen allgemeinen Werte von ϱ sogleich ein spezielles t einsetzen, z. B. $t=+is$

Dann verschwindet γ und es wird gleichzeitig (wegen $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$) $\alpha\delta = 1$. Wir bekommen daher

$$-\varrho = 2i\alpha\delta\left(\frac{d\log\alpha}{dt}\right) = 2i\,\frac{d\log\alpha}{dt},$$

d. h.

$$-\varrho = 2i\left(il + \frac{\Theta'(2is - 2i\omega')}{\Theta(2is - 2i\omega')} - \frac{1}{2}\left\{\frac{\Theta'(is - i\omega')}{\Theta(is - i\omega')} + \frac{\Theta'(is + i\omega')}{\Theta(is + i\omega')}\right\}\right).$$

Auch hier wollen wir von den Θ- zu den ϑ-Funktionen übergehen. Wir erreichen dieses durch die folgenden Substitutionen:

$$\frac{\Theta'(2is - 2i\omega')}{\Theta(2is - 2i\omega')} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\vartheta'(is - i\omega')}{\vartheta(is - i\omega')} + \frac{\vartheta'(\omega + is - i\omega')}{\vartheta(\omega + is - i\omega')}\right\}$$

und

$$\frac{\Theta'(is - i\omega')}{\Theta(is - i\omega')} + \frac{\Theta'(is + i\omega')}{\Theta(is + i\omega')} = \frac{\vartheta'(is - i\omega')}{\vartheta(is - i\omega')} - \frac{i\pi}{2\omega}.$$

Die erste dieser Gleichungen folgt aus (38) durch logarithmische Differentiation; die zweite verifiziert man, wenn man die rechte und linke Seite auf ihr Verhalten bei Periodenzuwächsen vergleicht und eine additive Konstante richtig bestimmt.

Statt des ursprünglichen Wertes von ϱ können wir auf solche Weise schreiben:

(42) $$-\varrho = i\left(2il + \frac{3i\pi}{2\omega} + \frac{\vartheta'(\omega + is + i\omega')}{\vartheta(\omega + is + i\omega')}\right).$$

Als Gesamtresultat dieses Paragraphen ergiebt sich, dafs auch für die Behandlung der Poinsot-Bewegungen unsere Parameter α, β, γ, δ ein sehr geeignetes Instrument liefern. Sind ihre Ausdrücke in Θ-Reihen einmal gefunden, so haben wir die Darstellung aller übrigen Elemente der Bewegung in der Hand. Zwar waren diese Ausdrücke selbst hier nicht ganz so einfach, wie in der Theorie der schweren Kugelkreisels; auch konnten wir beim Übergang von den Θ- zu den ϑ-Funktionen etwas umständliche Umrechnungen nicht vermeiden. Diese liegen aber in der Natur der Sache begründet und haben im Hinblick auf die Transformationstheorie der elliptischen Funktionen an sich ein gewisses Interesse. Wollten wir die Benutzung unserer Θ-Reihen überhaupt vermeiden und mit Jacobi etwa direkt auf die Ausdrücke der neun Richtungskosinusse ausgehen, so würde die Vollständigkeit der Entwickelungen darunter leiden. Insbesondere würden uns die schönen Resultate über die von einem Punkte der Hauptträgheitsaxen beschriebenen Bahnkurven entgangen sein.

Hosted by Google

§ 8. Konjugierte Poinsot-Bewegungen. Jacobis Theorem über den Zusammenhang zwischen der Bewegung des kräftefreien unsymmetrischen und des schweren Kugelkreisels.

Nachdem die Behandlung der einzelnen Poinsot-Bewegung erledigt ist, kommen wir nun dazu, die Beziehungen zweier in bestimmter Weise einander zugeordneter, sog. „konjugierter“ Poinsot-Bewegungen zu schildern. Dabei wird sich ein in der Litteratur viel genanntes Theorem von Jacobi ergeben, welches einen bemerkenswerten Zusammenhang zwischen der Bewegung des schweren Kugelkreisels und der Theorie der konjugierten Poinsot-Bewegungen statuiert.

Zu dem Zweck gehen wir nochmals auf die Polhodiekurve zurück und zeigen, daſs ein und dieselbe Polhodiekurve stets in doppelter Weise als Polhodiekurve einer Poinsot-Bewegung aufgefaſst werden kann, daſs sie nämlich gleichzeitig die Polhodiekurve für zwei verschiedene reelle kräftefreie Kreisel darstellt.

Eine Polhodiekurve besteht (vgl. die Figur von pag. 131) stets aus zwei symmetrisch gleichen Ästen. Beschreibt der Punkt mit den Koordinaten p, q, r den einen Ast, so durchläuft der Punkt $-p$, $-q$, $-r$ den anderen Ast in entgegengesetzter Richtung. Bei der einzelnen Poinsot-Bewegung wird natürlich nur der eine Ast von dem Endpunkt des Drehungsvektors bestrichen.

Wir fragen, ob der andere Ast die gleiche Rolle bei einer anderen Poinsot-Bewegung spielt.

Die Antwort ergiebt sich sofort aus den Eulerschen Gleichungen. Nach Voraussetzung genügen die Koordinaten p, q, r den Gleichungen:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{B-C}{A} qr, \quad \frac{dq}{dt} = \frac{C-A}{B} rp, \quad \frac{dr}{dt} = \frac{A-B}{C} pq.$$

Dann erfüllen aber ersichtlich die Koordinaten des diametralen Punktes $p' = -p$, $q' = -q$, $r' = -r$ die folgenden Gleichungen:

$$(1) \quad \frac{dp'}{dt} = -\frac{B-C}{A} q'r', \quad \frac{dq'}{dt} = -\frac{C-A}{B} r'p', \quad \frac{dr'}{dt} = -\frac{A-B}{C} p'q'.$$

Die Gröſsen p', q', r' gehören also einem anderen Kreisel als Drehungskomponenten hinzu, dessen Trägheitsmomente — wir wollen sie mit A', B', C' bezeichnen — *mit den Trägheitsmomenten des ursprünglichen Kreisels durch die Relationen verbunden sind:*

$$(2) \quad \frac{B'-C'}{A'} = -\frac{B-C}{A}, \quad \frac{C'-A'}{B'} = -\frac{C-A}{B}, \quad \frac{A'-B'}{C'} = -\frac{A-B}{C}.$$

Wir haben zunächst zu zeigen, daſs durch diese Gleichungen ein *reeller* Kreisel definiert wird, d. h., daſs eine Massenverteilung von den

Hosted by Google

Hauptträgheitsmomenten A', B', C' möglich ist. Zu dem Zwecke genügt es, sich zu überzeugen, I) daſs die Gröſsen A', B', C' sämtlich positiv sind, und II) daſs sie den bekannten Ungleichungen von pag. 100 (denselben Ungleichungen, welche auch zwischen den Seiten eines gewöhnlichen Dreiecks bestehen,) genügen.

I) Die Gleichungen (2) stellen drei lineare homogene Gleichungen für die Unbekannten A', B', C' dar; durch diese sind natürlich nur die Verhältnisse $A':B':C'$ bestimmt. Und zwar finden wir durch Auflösung dieser Gleichungen leicht:

$$(3)\quad A':B':C' = A(B+C-A):B(C+A-B):C(A+B-C).$$

Die rechts stehenden Gröſsen sind aber sämtlich positiv, da ja die A, B, C den für die Realität des ursprünglichen Kreisels erforderlichen Ungleichungen genügen sollen. Wählen wir also, was gestattet ist, eine der Gröſsen A', B', C' als positiv, so werden nach der vorstehenden Proportion auch die beiden anderen Gröſsen positiv sein müssen.

II) Hätten wir umgekehrt die Gleichungen (2) nach den A, B, C aufgelöst, so hätten wir offenbar die folgende Proportion erhalten:

$$(3')\quad A:B:C = A'(B'+C'-A'):B'(C'+A'-B'):C'(A'+B'-C').$$

Hiernach verhalten sich also auch die drei Gröſsen $B'+C'-A'$, $C'+A'-B'$, $A'+B'-C'$ wie drei positive Zahlen. Da doch mindestens eine von ihnen positiv sein muſs, werden es also auch die beiden anderen sein.

Hiermit ist unser Kreisel A', B', C' als reell nachgewiesen.

Wir wollen ferner auch die Konstanten $2h'$ und G' unseres zweiten Kreisels mit den Konstanten $2h$ und G des ersten in Zusammenhang bringen. Daſs nämlich die Drehkomponenten p', q', r' zwei Integralgleichungen von der Form

$$A'p'^2 + B'q'^2 + C'r'^2 = 2h',$$
$$A'^2p'^2 + B'^2q'^2 + C'^2r'^2 = G'^2$$

genügen, ist von vornherein klar, da diese Gleichungen eine direkte analytische Folge der (in den A', B', C' geschriebenen) Eulerschen Gleichungen (1) sind. Der fragliche Zusammenhang ergiebt sich unmittelbar aus den Gleichungen (11) von pag. 457. Wir schreiben uns diese in der folgenden Form auf:

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{2hA-G^2}{BC} = \dfrac{A-B}{C}q^2 + \dfrac{A-C}{B}r^2, \\[2ex] \dfrac{2hB-G^2}{CA} = \dfrac{B-A}{C}p^2 + \dfrac{B-C}{A}r^2, \\[2ex] \dfrac{2hC-G^2}{AB} = \dfrac{C-A}{B}p^2 + \dfrac{C-B}{A}q^2. \end{cases}$$

Hosted by Google

$$(4')\quad\begin{cases}\dfrac{2h'A'-G'^2}{B'C'}=\dfrac{A'-B'}{C'}q'^2+\dfrac{A'-C'}{B'}r'^2,\\[2mm] \dfrac{2h'B'-G'^2}{C'A'}=\dfrac{B'-A'}{C'}p'^2+\dfrac{B'-C'}{A'}r'^2,\\[2mm] \dfrac{2h'C'-G'^2}{A'B'}=\dfrac{C'-A'}{B'}p'^2+\dfrac{C'-B'}{A'}q'^2.\end{cases}$$

In diesen beiden Gleichungstripeln sind nun die rechten Seiten einander entgegengesetzt gleich. Mithin ergeben sich die folgenden Relationen:

$$(5)\quad\begin{cases}\dfrac{2h'A'-G'^2}{B'C'}=-\dfrac{2hA-G^2}{BC},\quad \dfrac{2h'B'-G'^2}{C'A'}=-\dfrac{2hB-G^2}{CA},\\[2mm] \qquad\dfrac{2h'C'-G'^2}{A'B'}=-\dfrac{2hC-G^2}{AB},\end{cases}$$

von denen die dritte vermöge (2) eine Folge der beiden ersten ist. Zwei von ihnen können darauf zur Bestimmung der Verhältnisse von h' und G' zu den Trägheitsmomenten A', B', C' benutzt werden. Somit sind die 5 Konstanten A', B', C', h', G' bis auf einen Proportionalitätsfaktor bekannt. Auf diesen Faktor, welcher notwendig unbestimmt bleibt, kommt es aber bei der Bewegung in keiner Weise an.

Die durch die Verhältnisse $A':B':C':h':G'$ definierte Poinsot-Bewegung ist die oben erwähnte, zu der Bewegung $A:B:C:h:G$ *konjugierte.* Umgekehrt ist diese letztere Bewegung, wie unmittelbar aus der Symmetrie der Gleichungen folgt, die konjugierte zu jener ersteren. Man bemerke noch, dafs, wenn für den einen der beiden konjugierten Kreisel, wie wir voraussetzten, die Beziehung

$$A > B > C$$

gilt, dafs dann für den anderen Kreisel die Ungleichung

$$A' < B' < C'$$

folgt; ferner, dafs, wenn die eine der beiden konjugierten Kreiselbewegungen, wie wir annahmen, zu der Klasse

$$2hB - G^2 > 0$$

gehört, dafs dann die andere Bewegung in die Klasse

$$2h'B' - G'^2 < 0$$

hineingehört.

Wir müssen ferner den Zusammenhang zwischen den „transcendenten" Konstanten ω, ω', s und l beider konjugierter Kreisel, welche für uns noch wichtiger sind, wie die „elementaren" Konstanten $A:B:C:h:G$, feststellen.

Zunächst sieht man, dafs die Konstanten ω und ω' für beide Kreisel dieselben sind. Die Gleichheit von ω ergiebt sich ohne Weiteres aus

Hosted by Google

der Bedeutung dieser Gröfse. ω bedeutet nämlich, wie wir sagen können, die Zeit, während welcher der Drehungsvektor den zwischen den Koordinatenebenen $q=0$ und $p=0$ ausgespannten Bogen der Polhodiekurve bestreicht. In der That wird nach den Gleichungen (9) des vorigen Paragraphen $q=0$ für $v=e$, d. h. für $t=0$ und $p=0$ für $v=e'$, d. h. für $t=\omega$. Die beiden diametralen Äste der Polhodiekurve und insbesondere der eben genannte Bogen, (aus dessen kongruenter und symmetrisch gleicher Wiederholung sich die ganze Polhodiekurve zusammensetzt), werden aber von den Drehungsvektoren der konjugierten Kreisel in demselben Tempo durchlaufen. Also mufs in der That ω für beide Kreisel gleich sein.

Die Gleichheit von ω' ferner könnten wir ähnlich erweisen, wenn wir den vorstehenden Schlufs auch für imaginäre Werte der Zeit zulassen wollen. Wir können aber auch so verfahren: Es ist nach den Gleichungen (6) und (10) von pag. 455, 456

$$t=\int\frac{dv}{\sqrt{V}}=\frac{C}{A-B}\int\frac{dr}{pq}=\frac{C'}{A'-B'}\int\frac{dr'}{p'q'}. \tag{6}$$

Nun ergiebt sich der Wert von $i\omega'$ für die eine und die andere Kreiselbewegung, wenn wir als untere Grenze des betreffenden Integrales t denjenigen Wert von r bez. r', für welchen $q=0$ bez. $q'=0$ ist, und als obere Grenze den Wert $r=\infty$ bez. $r'=\infty$ nehmen. Die beiden so entstehenden Integrale sind aber nach der vorstehenden Gleichung identisch, da sich die genannten oberen und unteren Grenzen vermöge der Beziehung $p'=-p$, $q'=-q$, $r'=-r$ entsprechen.

Anders liegt die Sache für die Konstanten s der beiden Bewegungen, die wir als s und s' unterscheiden. Es war

$$is=\int_e^1\frac{dv}{\sqrt{V}}.$$

Führen wir wie in (6) die Integrationsvariable r ein, so wird

$$is=\frac{C}{A-B}\int\frac{dr}{pq}, \tag{7}$$

wo die untere Grenze derjenige Wert von r ist, für den q verschwindet, die obere der Wert $r=\frac{G}{C}$. In entsprechender Weise ist is' zu definieren:

$$is'=\frac{C'}{A'-B'}\int\frac{dr'}{p'q'}, \tag{7'}$$

wobei als untere Grenze derjenige Wert von r' zu denken ist, für den q' verschwindet, als obere Grenze der Wert $r'=\frac{G'}{C'}$. In den Integralen


Hosted by Google

(7) und (7′) sind also nur die unteren Grenzen entsprechende Werte; die oberen Grenzen sind durchaus verschieden; *mithin werden auch die Konstanten s und s' verschieden ausfallen.*

Wir betrachten endlich die Konstanten l und l'. Da die einzelne Poinsot-Bewegung von vier Willkürlichkeiten abhängt und da die konjugierte Poinsot-Bewegung durch die ursprüngliche vollständig mitbestimmt ist, wird es möglich sein, die Konstanten l und l' einzeln durch ω, ω', s und s' auszudrücken. Wir erreichen dieses folgendermaſsen. Nach den Gleichungen (5) von pag. 43 haben wir

$$p + iq = 2i\left(\beta \frac{d\delta}{dt} - \delta \frac{d\beta}{dt}\right)$$

für die eine der beiden konjugierten Bewegungen. Bedeuten α', β', γ', δ' die nach dem Schema der Gleichungen (32) gebildeten Werte der α, β, γ, δ für die andere Bewegung, so gilt gleichzeitig:

$$p' + iq' = 2i\left(\beta' \frac{d\delta'}{dt} - \delta' \frac{d\beta'}{dt}\right).$$

Die Beziehung zwischen den beiden konjugierten Polhodiekurven liefert daher

$$\left(\beta \frac{d\delta}{dt} - \delta \frac{d\beta}{dt}\right) = -\left(\beta' \frac{d\delta'}{dt} - \delta' \frac{d\beta'}{dt}\right)$$

oder

$$\beta\delta\left(\frac{d\log\delta}{dt} - \frac{d\log\beta}{dt}\right) = -\beta'\delta'\left(\frac{d\log\delta'}{dt} - \frac{d\log\beta'}{dt}\right).$$

In dieser Gleichung setzen wir für t die speziellen Werte $t = -is'$ und $t = -is$ ein. Im ersten Falle verschwindet l', im zweiten Falle l aus unserer Gleichung, so daſs wir im ersten Falle l, im zweiten l' getrennt erhalten. *Für l ergiebt sich so der folgende Wert:*

$$(8)\quad \begin{cases} 2il + \dfrac{i\pi}{2\omega} = \dfrac{\Theta'(-is - is' + 2i\omega')}{\Theta(-is - is' + 2i\omega')} - \dfrac{\Theta'(is - is')}{\Theta(is - is')} \\ -e^{-\frac{i\pi}{2\omega}(is - is')} \dfrac{\Theta'(0)\,\Theta(2i\omega' - 2is)}{\Theta(is - is')\,\Theta(-is - is' + 2i\omega')} \dfrac{\Theta(i\omega' - is')\,\Theta(i\omega' + is')}{\Theta(i\omega' - is)\,\Theta(i\omega' + is)}. \end{cases}$$

Der entsprechende Wert von l' folgt durch Vertauschung von s und s'.

Um die rechte Seite zu vereinfachen, denken wir vorübergehend die Gröſse $-is'$ als variabel und fragen nach den Unendlichkeitsstellen der rechts stehenden Ausdrücke in dieser Variabeln, die wir mit t' bezeichnen wollen.

Der erste Term wird ersichtlich unendlich groſs für die Werte

$$\text{(I)}\qquad t' = is - 2i\omega' + 2m\omega + 4m'i\omega'$$

und zwar allemal mit dem Residuum $+1$. Ebenso wird der zweite Term unendlich für

$$\text{(II)}\qquad t' = -is + 2m\omega + 4m'i\omega'$$

und zwar mit dem Residuum -1. Der dritte Term wird an allen den genannten Stellen (I) und (II) und nur an diesen ebenfalls unendlich. Um die Residuen zu berechnen, bemerken wir (1), daſs für $t' = is - 2i\omega'$, sowie für $t' = -is$ das Residuum -1 beträgt, und (2), daſs unser dritter Term bei Vermehrung von t' um 2ω bez. um $4i\omega'$ den Faktor -1 bez. $+1$ aufnimmt. Hiernach wird das Residuum dieses dritten Termes an den Stellen (I) und (II) allgemein gleich $(-1)^{m+1}$ sein. Es werden daher die Unendlichkeitsstellen des ersten Termes bei geradem, die des zweiten Termes bei ungeradem m durch das Unendlichwerden des dritten Termes aufgehoben. Mithin bleiben nur die folgenden Unendlichkeitsstellen bestehen:

$$\text{(I}'\text{)}\quad t' = is + 2\omega + 2i\omega' + 4m\omega + 4m'i\omega', \text{ (Residuum } +2),$$
$$\text{(II}'\text{)}\quad t' = -is + 4m\omega + 4m'i\omega', \text{ (Residuum } -2).$$

Dies ist eine Anordnung von Unendlichkeitsstellen, wie sie einer in t' doppeltperiodischen Funktion von den Perioden 4ω und $4i\omega'$ entspricht. In der That bleibt auch die rechte Seite von (8) bei Vermehrung von t' um 4ω und $4i\omega'$ gänzlich ungeändert.

Wir können nun leicht die fragliche doppeltperiodische Funktion durch ϑ-Funktionen von der Periode 2ω und $2i\omega'$ ausdrücken. Betrachten wir nämlich

$$\frac{\vartheta'\left(\frac{t' - is - 2\omega - 2i\omega'}{2}\right)}{\vartheta\left(\frac{t' - is - 2\omega - 2i\omega'}{2}\right)} - \frac{\vartheta'\left(\frac{t' + is}{2}\right)}{\vartheta\left(\frac{t' + is}{2}\right)}.$$

Diese Gröſse hat gerade, als Funktion von t' aufgefaſst, die Unendlichkeitsstellen (I′) und (II′) mit den richtigen Residuen und ist doppeltperiodisch von den Perioden 4ω, $4i\omega'$. Sie kann sich daher von der rechten Seite der Gleichung (8) nur um eine additive Konstante c, d. h. um eine von t' unabhängige Gröſse unterscheiden, welche man durch Einsetzen eines speziellen Wertes (z. B. $t' = -i\omega'$) bestimmt; und zwar findet man so $c = -\frac{i\pi}{\omega}$.

Wir führen noch die Abkürzungen ein

$$(9)\qquad \frac{s' - s}{2} = \omega' - a, \quad \frac{s' + s}{2} = b,$$

setzen also

$$(9')\qquad s = -\omega' + a + b, \quad s' = \omega' - a + b;$$

dann können wir den zuletzt ermittelten Wert von $2il$ folgendermaſsen schreiben:

$$(10)\qquad 2il + \frac{3i\pi}{2\omega} = \frac{\vartheta'(i\omega' - ia)}{\vartheta(i\omega' - ia)} - \frac{\vartheta'(\omega + i\omega' + ib)}{\vartheta(\omega + i\omega' + ib)}.$$

Hosted by Google

Der entsprechende Wert von l' ergiebt sich, wie erwähnt, wenn wir in (8) s mit s' vertauschen. *Man erhält dadurch*

$$(10') \qquad 2il' + \frac{3i\pi}{2\omega} = -\frac{\vartheta'(i\omega' - ia)}{\vartheta(i\omega' - ia)} - \frac{\vartheta'(\omega + i\omega' + ib)}{\vartheta(\omega + i\omega' + ib)}.$$

Wir merken noch die aus (10) und (10′) folgenden Formeln an:

$$(11) \qquad \begin{cases} i(l + l') = -\dfrac{\vartheta'(\omega + i\omega' + ib)}{\vartheta(\omega + i\omega' + ib)} - \dfrac{3i\pi}{2\omega}, \\ i(l - l') = \dfrac{\vartheta'(i\omega' - ia)}{\vartheta(i\omega' - ia)}. \end{cases}$$

Der Zusammenhang zwischen den Konstanten s, s', l, l' ist damit gefunden.

Wir können uns nun auf den Standpunkt stellen, dafs es, gewissermafsen aus Symmetriegründen, praktischer wäre, die einzelne Poinsot-Bewegung statt durch die Gröfsen ω, ω', s und l lieber durch die vier Gröfsen ω, ω', s und s' oder auch durch die Gröfsen ω, ω', a und b festzulegen, indem wir die konjugierte Poinsot-Bewegung mit in Betracht ziehen.

In diesen Konstanten wollen wir uns insbesondere die im vorigen Paragraphen abgeleiteten Gleichungen (41), (42) der *Herpolhodiekurve* noch einmal hinschreiben. Dieselben lauten, wenn wir sogleich einige Reduktionen anbringen:

$$\pi + i\varkappa = \frac{\vartheta'(0)}{\vartheta(\omega + ia + ib)} e^{\frac{\pi(a+b)}{2\omega}} e^{\left\{\frac{\vartheta'(i\omega' - ia)}{\vartheta(i\omega' - ia)} - \frac{\vartheta'(\omega + i\omega' + ib)}{\vartheta(\omega + i\omega' + ib)}\right\} t} \frac{\vartheta(t - \omega - i\omega' + ia + ib)}{\vartheta(t - i\omega')},$$

$$-\varrho = i\left(\frac{\vartheta'(i\omega' - ia)}{\vartheta(i\omega' - ia)} - \frac{\vartheta'(\omega + i\omega' + ib)}{\vartheta(\omega + i\omega' + ib)} + \frac{\vartheta'(\omega + ia + ib)}{\vartheta(\omega + ia + ib)}\right).$$

Dies sind aber genau die Formeln für die Polhodiekurve des schweren Kugelkreisels, wie wir sie pag. 436, 437 aufgestellt haben, mit dem einzigen Unterschiede, dafs bei unseren jetzigen Formeln der Faktor $-\frac{1}{2}$ hinzugetreten ist.

Schreiben wir uns in gleicher Weise die Gleichungen der Herpolhodiekurve des konjugierten Kreisels hin, so bekommen wir Formeln, die sich von den vorhergehenden nur durch Vertauschung von $+a$ mit $-a$ unterscheiden; so entstehen aber gerade unsere früheren Gleichungen der Herpolhodiekurve des schweren Kugelkreisels, mit dem Unterschiede, dafs jetzt der Faktor $+\frac{1}{2}$ gegen früher hinzugetreten ist.

Wir haben also das merkwürdige Resultat:

Die Koordinaten der Herpolhodiekurven unserer beiden konjugierten Kreisel von den Konstanten ω, ω', a und b sind in jedem Zeitmomente

identisch mit den durch -2 *resp.* $+2$ *dividierten Koordinaten der Polhodie- resp. Herpolhodiekurve des schweren Kugelkreisels von denselben Konstanten.*

Hier liegt offenbar ein tieferer Zusammenhang zwischen unseren konjugierten Poinsot-Bewegungen und der Bewegung des schweren Kugelkreisels verborgen, den wir durch die folgenden Überlegungen aufzuklären beabsichtigen.

Wir denken uns die beiden konjugierten Kreisel um den gemeinsamen Punkt O bei zusammenfallender Axe des Impulses und gemeinsamer Anfangslage rotieren und fragen nach der Relativbewegung der beiden zugehörigen umgekehrten Bewegungen, d. h. derjenigen beiden Bewegungen, welche der umgebende Raum einem Beobachter auszuführen scheint, der seinen Standpunkt das eine Mal auf dem einen, das andere Mal auf dem andern der beiden konjugierten Kreisel nimmt.

Die beiden ursprünglichen direkten Bewegungen veranschaulichen wir uns nach der Vorschrift Poinsots, indem wir den betreffenden Polhodiekegel auf dem Herpolhodiekegel ohne Gleitung abrollen lassen. Die umgekehrten (inversen) Bewegungen erhalten wir hieraus in der Weise, daſs wir umgekehrt die Polhodiekegel festhalten und die Herpolhodiekegel auf ihnen ohne Gleitung abwickeln. Die Relativbewegung der beiden Herpolhodiekegel stellt uns dann das Poinsotsche Bild der Relativbewegung der umgekehrten Poinsot-Bewegungen dar.

Nun besitzen aber nach Definition konjugierte Kreisel diametral gelegene Polhodiekurven und folglich kongruente Polhodiekegel. In unserem Falle rollen also die beiden Herpolhodiekegel auf einem und demselben Polhodiekegel. Und zwar berühren sie diesen beständig längs einer und derselben Erzeugenden, welche durch die jeweiligen Werte der Verhältnisse $p:q:r = p':q':r'$ gegeben ist, und drehen sich um diese mit ein und derselben Winkelgeschwindigkeit

$$\sqrt{p^2+q^2+r^2} = \sqrt{p'^2+q'^2+r'^2}$$

im entgegengesetzten Sinne. (Wir haben uns vorzustellen, daſs der eine Herpolhodiekegel den Polhodiekegel von innen, der andere von auſsen berührt, so daſs sie bei ihrer im entgegengesetzten Sinne stattfindenden Drehung beständig in Kontakt bleiben können.) Wenn aber zwei Kegel ohne zu gleiten auf einem dritten abrollen und dabei dauernd in Kontakt bleiben, so rollen sie auch ohne Gleitung aufeinander ab. Wir können somit, um die fragliche Relativbewegung zu erhalten, den Polhodiekegel ganz ausschalten und direkt den einen Herpolhodiekegel auf dem anderen abwickeln. Auf diese Weise gewinnen wir aus dem Poinsotschen Bilde der ursprünglichen Kreiselbewegungen zugleich das Poinsotsche Bild der oben genannten Relativbewegung.

Hosted by Google

Halten wir nach Belieben einen der beiden Herpolhodiekegel fest, so spielt dieser für die Relativbewegung die Rolle des Herpolhodiekegels, während der andere Herpolhodiekegel als Polhodiekegel der Relativbewegung zu bezeichnen sein würde. Wir sehen also:

Herpolhodie- und Polhodiekegel unserer Relativbewegung sind mit den beiden Herpolhodiekegeln der ursprünglichen Einzelbewegungen identisch.

Etwas anders liegt die Sache, wenn wir außer den Kegeln die auf ihnen verlaufenden Herpolhodie- und Polhodiekurven der Relativbewegung in Betracht ziehen. Diese sind nicht etwa ohne Weiteres mit den Herpolhodiekurven der konjugierten Poinsot-Bewegungen identisch. Denn erstens rollen ja diese letzteren Kurven auf den Polhodiekurven der Poinsot-Bewegungen ab, welche in Bezug auf O diametral liegen. Mithin müssen sich auch diejenigen beiden Punkte der Herpolhodiekurven, welche in jedem Momente den Endpunkt des Drehungsvektors in den Poinsot-Bewegungen geben, auf entgegengesetzten Seiten von O befinden. Um überhaupt zwei auf einander abrollende Kurven zu haben, müssen wir also die eine Herpolhodiekurve durch ihr diametrales Gegenbild in Bezug auf O ersetzen. Aber auch die so entstehenden beiden Kurven, die Herpolhodiekurve der einen und das diametrale Gegenbild der Herpolhodiekurve bei der anderen Poinsotbewegung, sind noch nicht direkt die Polhodie- und Herpolhodiekurve der Relativbewegung. Wir überzeugen uns nämlich leicht, daß die Drehgeschwindigkeit des Polhodiekegels in der Relativbewegung doppelt so groß ist wie die Drehgeschwindigkeit in den ursprünglichen Einzelbewegungen. In der That müssen wir den als Polhodiekegel fungierenden Kegel bei der Relativbewegung erst in die Lage des Polhodiekegels bei der Poinsot-Bewegung überdrehen, was durch die Drehung $(-p\,dt,\ -q\,dt,\ -r\,dt)$ geschieht und dann in die Lage des als Herpolhodiekegel dienenden Kegels, wozu die Drehung $(p'dt,\ q'dt,\ r'dt) = (-p\,dt,\ -q\,dt,\ -r\,dt)$ erforderlich ist. Die in der Zeit dt stattfindende Gesamtdrehung beträgt also bei der Relativbewegung $(-2p\,dt,\ -2q\,dt,\ -2r\,dt)$; die Winkelgeschwindigkeit ist daher bei richtiger Wahl des Vorzeichens $2\sqrt{p^2+q^2+r^2}$, d. h. doppelt so groß wie bei den ursprünglichen Poinsot-Bewegungen.

Nun erhalten wir die Herpolhodie- und Polhodiekurve, indem wir uns auf den betreffenden Kegeln in der Richtung der instantanen Drehaxe die Größe der Winkelgeschwindigkeit abtragen. Wir kommen dabei ersichtlich zu Kurven, welche der Herpolhodiekurve der einen und dem diametralen Gegenbilde der Herpolhodiekurve der anderen unserer konjugierten Poinsot-Bewegungen geometrisch ähnlich und in dem doppelten Maßstabe angefertigt sind. Es ergiebt sich so:

Hosted by Google

Die Koordinaten der Herpolhodie- und Polhodiekurve unserer Relativbewegung entstehen aus den Koordinaten der Herpolhodiekurven der beiden konjugierten Poinsot-Bewegungen, indem man diese mit $+2$ *und* -2 *multipliziert.*

Wir haben aber oben ausgerechnet, dafs die mit $+2$ und -2 multiplizierten Koordinaten der Herpolhodiekurven bei den Poinsot-Bewegungen genau übereinstimmen mit den Koordinaten der Herpolhodie- und Polhodiekurve des schweren Kugelkreisels. Berücksichtigen wir noch, dafs eine Bewegung durch Angabe ihrer Herpolhodie- und Polhodiekurve völlig bestimmt ist, so gewinnen wir das merkwürdige Resultat:

Die Bewegung des schweren Kugelkreisels ist identisch mit der Relativbewegung der zu zwei konjugierten Poinsot-Bewegungen gehörigen inversen Bewegungen.

Dies ist das eingangs erwähnte, berühmte Jacobische Theorem — allerdings in einer von der ursprünglichen Jacobischen nicht unwesentlich abweichenden Formulierung. Der Zusammenhang, welcher hier zwischen zwei verschiedenen Rotationsproblemen ausgesprochen wird, ist in der That ein überraschender und liegt keineswegs auf der Oberfläche der Dinge.

Um diesen Zusammenhang im Einzelnen noch deutlicher zu verstehen, können wir uns insbesondere fragen: *Was entspricht in den Poinsot-Bewegungen der Figurenaxe des Kugelkreisels, was der Vertikalen?* Die Antwort hierauf lautet einfach so: *Die Impulsaxe der einen Poinsot-Bewegung giebt die Figurenaxe, die der anderen die Vertikale.* Bemerken wir nämlich Folgendes: Die in Rede stehenden transcendenten Kegel sind sämtlich in dem Sinne periodisch, dafs sie, um eine gewisse Axe durch einen gewissen Winkel gedreht, mit sich zur Deckung kommen. Diese „Periodicitätsaxe" ist nun bei dem Herpolhodiekegel der Poinsot-Bewegungen die im Raume feste Axe des Impulses, bei dem Polhodie- und Herpolhodiekegel der Kugelkreisel-Bewegung die Figurenaxe und die Vertikale. Da nun die Kegel wechselweise übereinstimmen, so werden auch ihre „Periodicitätsaxen" zusammenfallen müssen. Die Axe des Impulses der einen Poinsot-Bewegung ist also mit der Vertikalen, die der anderen mit der Figurenaxe des Kugelkreisels identisch.

Aus dem Jacobischen Theorem ergiebt sich weiterhin eine merkwürdig einfache Konstruktion für die gegenseitige Lage von Vertikaler und Figurenaxe bei der Bewegung des schweren Kugelkreisels. Wir denken uns die Trägheitsellipsoide der beiden konjugierten Kreisel konstruiert und so gestellt, dafs ihre Hauptaxen zusammenfallen. Projizieren wir die Schnittkurve dieser beiden Ellipsoide von O aus, so erhalten wir den ge-

Hosted by Google

meinsamen Polhodiekegel der konjugierten Kreisel. Darauf konstruieren wir uns zu irgend einer Erzeugenden $p:q:r$ des Kegels die zugehörige Impulsaxe im einen und im anderen Kreisel, d. h. die Geraden $Ap:Bq:Cr$ und $A'p:B'q:C'r'$. Rein geometrisch finden wir diese Geraden, indem wir in den Durchstofsungspunkten der Erzeugenden mit den Trägheitsellipsoiden die Tangentialebenen legen und von O aus auf diese die Lote fällen. Diese beiden Lote geben dann direkt die gegenseitige Lage von Vertikaler und Figurenaxe bei der Bewegung des Kugelkreisels an. Ihr Neigungscosinus wird, wie man sieht, einfach gleich

$$\frac{AA'p^2+BB'q^2+CC'r^2}{GG'}. —$$

Zum Überflufs wollen wir noch einen zweiten Beweis geben. *Wir wollen nämlich jetzt noch das Jacobische Theorem an den Zusammensetzungsformeln der α, β, γ, δ verifizieren.*

Unsere beiden Poinsot-Bewegungen seien wie früher durch die Parameter $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ und $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ bestimmt. Die zugehörigen umgekehrten Bewegungen des Raumes sind dann nach pag. 30 durch die folgenden Parameterwerte

$$\delta,\ -\beta,\ -\gamma,\ \alpha \quad \text{und} \quad \delta',\ -\beta',\ -\gamma',\ \alpha'$$

bestimmt. Die Relativbewegung unserer beiden konjugierten Kreisel, d. h. diejenige Drehung, welche den einen Kreisel aus seiner Lage zur Zeit t in die Lage des anderen Kreisels überführt, erhalten wir aber dadurch, dafs wir (1) den einen der beiden Kreisel aus seiner Lage zur Zeit t in seine Anfangslage zurückbringen und (2) aus dieser in die Lage des anderen Kreisels überdrehen. Ebenso ergiebt sich die Relativbewegung der beiden umgekehrten Bewegungen dadurch, dafs wir (1) die eine der beiden umgekehrten Bewegungen, sagen wir die durch $\delta', -\beta', -\gamma', \alpha'$ gegebene rückgängig machen, was durch eine Drehung von den Parametern $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ geschieht und sodann die andere umgekehrte Bewegung $\delta, -\beta, -\gamma, \alpha$ ausführen. Wir haben also, um die Relativbewegung der umgekehrten Bewegungen zu erhalten, die folgenden beiden Drehungen nach einander auszuführen:

$$(1)\ \alpha',\ \beta',\ \gamma',\ \delta' \quad \text{und} \quad (2)\ \delta,\ -\beta,\ -\gamma,\ \alpha.$$

Nach den Zusammensetzungsformeln von pag. 32 hat nun die resultierende Drehung, welche in ihrer Wirkung der Aufeinanderfolge der Drehungen (1) und (2) gleichkommt, die folgenden Parameter:

$$\alpha''=\alpha'\delta-\beta'\gamma,\quad \beta''=-\alpha'\beta+\beta'\alpha$$
$$\gamma''=\gamma'\delta-\delta'\gamma,\quad \delta''=-\gamma'\beta+\delta'\alpha.$$



Wir wollen zeigen, daſs dieses in der That die Parameter des Kugelkreisels sind.

Zu dem Zwecke haben wir für α, β, γ, δ; α', β', γ', δ' ihre Ausdrücke in den Θ-Funktionen bei Zugrundelegung der Konstanten ω, ω', s und s' bez. ω, ω', a und b einzutragen und haben abermals von den Θ- zu den ϑ-Funktionen überzugehen. Dabei brauchen wir nur beispielsweise α'' und β'' zu berechnen, da sich die beiden anderen Parameter aus diesen durch Vertauschung von $+i$ und $-i$ herleiten lassen.

Für α'' erhalten wir nach den Gleichungen (32) von pag. 468 folgende Darstellung:

$$\alpha'' = \sqrt{CC'}\, e^{i(l'-l)t}\, \frac{\Theta(t-2i\omega'+is')\,\Theta(t+2i\omega'-is)+e^{\frac{i\pi}{2\omega}(-2i\omega'+is'+is)}\,\Theta(t+is')\,\Theta(t-is)}{\Theta(t-i\omega')\,\Theta(t+i\omega')}.$$

Hier stimmt zunächst der Exponentialfaktor mit demjenigen Exponentialfaktor überein, welcher bei der Bewegung des schweren Kugelkreisels in dem Ausdrucke von α auftrat. In der That haben wir nach Gleichung (11)

$$e^{i(l'-l)t} = e^{-\frac{\vartheta'(i\omega'-ia)}{\vartheta(i\omega'-ia)}t}.$$

Ferner rechnet man leicht nach, daſs unser Θ-Quotient bei Vermehrung von t um 2ω und $2i\omega'$ bez. die Faktoren $+1$ und

$$e^{-\frac{i\pi}{\omega}\frac{is'-is}{2}} = e^{-\frac{i\pi}{\omega}(i\omega'-ia)}$$

aufnimmt. Dies sind aber dieselben Faktoren, mit denen sich bei denselben Vermehrungen der ϑ-Quotient

$$\frac{\vartheta(t-ia)}{\vartheta(t-i\omega')}$$

multipliziert. Da auch die Unendlichkeitsstellen in der t-Ebene übereinstimmen, muſs unser obiger Ausdruck bis auf eine Konstante diesem ϑ-Quotienten gleich sein. Eben dieser ϑ-Quotient trat aber auch in dem Ausdruck des Parameters α bei der Bewegung des schweren Kugelkreisels auf. Daſs schlieſslich auch die multiplizierenden Konstanten in den beiden verglichenen Ausdrücken übereinstimmen, wollen wir ohne Beweis erwähnen.

Was sodann den Wert von β'' betrifft, so haben wir

$$\beta'' = \sqrt{CC'}\, e^{i\left(l+l'+\frac{\pi}{2\omega}\right)t}$$

$$\cdot \frac{-e^{\frac{i\pi}{2\omega}(-i\omega'+is)}\,\Theta(t-2i\omega'+is')\,\Theta(t+is)+e^{\frac{i\pi}{2\omega}(-i\omega'+is')}\,\Theta(t+is')\,\Theta(t-2i\omega'+is)}{\Theta(t-i\omega')\,\Theta(t+i\omega')}.$$



Wiederum ändert sich der rechts stehende Bruch nur um gewisse konstante Faktoren, wenn wir eine der Perioden zu t hinzufügen, nämlich um die Faktoren $+1$ bez.

$$-e^{-\frac{i\pi}{\omega}\left(-i\omega'+\frac{is+is'}{2}\right)}=e^{-\frac{i\pi}{\omega}(-\omega+ib-i\omega')}.$$

Dieselben Faktoren nimmt aber auch der folgende ϑ-Quotient auf.

$$\frac{\vartheta(t-\omega+ib)}{\vartheta(t+i\omega')}=-e^{\frac{i\pi t}{\omega}}\frac{\vartheta(t-\omega+ib)}{\vartheta(t-i\omega')}.$$

Mithin wird β'' unter Berücksichtigung der Gleichungen (11) dem nachstehenden Ausdrucke proportional werden:

$$e^{i\left(l+l'+\frac{3\pi}{2\omega}\right)t}\frac{\vartheta(t-\omega+ib)}{\vartheta(t-i\omega')}=e^{-\frac{\vartheta'(\omega+i\omega'+ib)}{\vartheta(\omega+i\omega'+ib)}}\frac{\vartheta(t-\omega+ib)}{\vartheta(t-i\omega')}.$$

Dies ist aber der variable Bestandteil des Wertes von β bei der Bewegung des schweren Kugelkreisels. Endlich stimmt auch der konstante Proportionalitätsfaktor überein, was wir jedoch nicht ausdrücklich beweisen wollen.

Somit ist die Identität der Parameter α'', β'', γ'', δ'' unserer Relativbewegung mit den Parametern α, β, γ, δ des schweren Kugelkreisels dargethan, worin ein abermaliger und zwar der denkbar direkteste Beweis des Jacobischen Theorems liegt. —

Die hier gegebene Formulierung des Jacobischen Theorems ist, wie erwähnt, von der ursprünglichen Jacobischen*) etwas verschieden. Jacobi zerlegt nämlich die einzelne Poinsot-Bewegung in einen periodischen und einen nicht-periodischen Bestandteil oder, wie wir vielleicht nach Analogie mit Früherem sagen dürfen, in einen Nutations- und einen Präcessions-Bestandteil. Der Präcessions-Bestandteil führt, für sich betrachtet, den Körper mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit um die Impulsaxe herum und wird so eingerichtet, daſs der übrigbleibende Nutations-Bestandteil eine rein periodische in sich zurücklaufende Bewegung darstellt. Die Präcessionsgeschwindigkeit wird dabei im Wesentlichen durch die Konstante l, die Nutationsbewegung durch die in der Darstellung der Poinsot-Bewegung auftretenden ϑ-Quotienten gegeben. Jacobi denkt sich nun den Präcessions-Bestandteil dadurch herausgeschafft, daſs er die Bewegung auf ein im Raume bewegliches Axenkreuz xyz bezieht, welches mit der Präcessionsgeschwindigkeit l um die (mit der Impulsaxe zusammenfallende) z-Axe gleichförmig rotiert. An diesem Axenkreuz gemessen ist die Bewegung eine reine, periodisch wiederkehrende Nutation. Indem Jacobi gleicher Weise die konjugierte Poinsot-Bewegung von ihrem Präcessions-Bestandteil befreit, fragt er

*) Ges. Werke Bd. II pag. 480.

nach der Relativbewegung der beiden konjugierten Nutationen und findet, dafs diese mit der Nutationsbewegung des schweren symmetrischen Kreisels identisch ist. (Jacobi kann hier den symmetrischen Kreisel an Stelle des Kugelkreisels setzen, da die Bewegungen beider, wie wir wissen, sich, kurz gesagt (vgl. pag. 234), nur um einen Exponentialfaktor unterscheiden, d. h. nur in ihrem Präcessions-Bestandteile verschieden, in ihrem Nutations-Bestandteile dagegen gleich sind.) Offenbar ist unsere Formulierung des Jacobischen Theorems einfacher und weitergehend als die Jacobische, da sie Nutation und Präcession gleichzeitig berücksichtigt. Wir wollen den Satz, wie wir ihn oben ausgesprochen haben, kurz „das vervollständigte Jacobische Theorem" nennen.

Auch im Beweise sind wir erheblich von Jacobi abgewichen. Jacobi beschreibt die Lage des XYZ- gegen das xyz-System in den beiden konjugierten Poinsot-Bewegungen durch die neun Richtungscosinusse $a, \ldots c''$, d. h. durch die Koeffizienten derjenigen ternären Substitution, welche die Koordinaten XYZ in die xyz überführt. Bei der Aufsuchung der Relativbewegung mufs er daher *zwei ternäre* Substitutionen zusammensetzen und die $3 \times 3 = 9$ Koeffizienten der resultierenden Substitution berechnen. Demgegenüber besteht die Vereinfachung bei dem von uns zuletzt gegebenen Beweise darin, dafs wir statt der ternären *zwei binäre* Substitutionen zusammensetzten und nur die $2 \times 2 = 4$ Koeffizienten der resultierenden Drehung nötig hatten. Übrigens ist der Beweis von Jacobi selbst in seinen hinterlassenen Papieren nur angedeutet; er wurde erst nach seinem Tode von Lottner*) ausgeführt.

Die Möglichkeit, das Jacobische Theorem in dem hier gemeinten Sinne zu vervollständigen, d. h. die konjugierten Poinsot-Bewegungen direkt ohne vorherige Absonderung der Präcessions-Bestandteile zusammenzusetzen, ist wohl zuerst von Halphen**) bemerkt worden.

Einen sehr einfachen elementaren Beweis giebt Hr. Darboux***) von dem Jacobischen Theorem. Darboux fragt geradezu nach der Kraft, welche zur kinetischen Realisierung unserer Relativbewegung erforderlich ist und findet, dafs diese mit der Schwerkraft identisch ist. Einen ähnlichen Gedankengang schlägt wenig später Herr Routh†) ein.

---

*) Vgl. Jacobis ges. Werke, Bd. II, pag. 510 u. ff.

**) Comptes Rendues, Bd. 100, pag. 1065—1068.

***) Journ. de Liouville 1885 in der pag. 234 cit. Arbeit; vgl. auch die Noten XVIII und XIX zum Cours de Mécanique von Despeyrous-Darboux Bd. II.

†) Quaterly Journal of Mathem. vol. XXIII 1888. On a theorem of Jacobi in dynamics. Vgl. auch Bd. II der Rigid dynamics desselben Verf., art. 174, 175 und 206.

Hosted by Google

Auf die sonstigen Arbeiten, die sich mit dem Jacobischen Theorem befassen (Padova in den Atti d. Acad. di Torino, vol. XIX 1884 und Atti d. R. Istit. di Veneto, vol. III 1892; Halphen, Fonctions Elliptiques, Bd. II, Cap. 2 und 3, A. de Saint-Germain in der pag. 115 citierten Monographie) können wir hier nicht eingehen.

Zum Schluſs noch einige Bemerkungen über Zweck und Bedeutung des Jacobischen Theorems.

Wir haben in dieser Hinsicht vor allem zu betonen, *daſs dieses Theorem einen rein kinematischen Charakter hat.* In der That ist der Begriff der Relativbewegung lediglich ein kinematischer Begriff. Über die kinetische Realisierung einer Relativbewegung wissen wir von vornherein nichts. Sie wird im Allgemeinen unter ganz anderen Bedingungen erfolgen müssen, als diejenigen sind, unter denen die betreffenden Einzelbewegungen vor sich gehen. Dementsprechend kommt es beim Jacobischen Theorem gerade auf die kinematisch definierten Polhodie- und Herpolhodiekurven an, während die kinetisch wichtigeren Impulskurven bei unserem Beweise zurücktraten. Wir werden also sagen müssen: *Das Jacobische Theorem statuiert keinen mechanischen, sondern nur einen geometrischen Zusammenhang zwischen der Poinsot-Bewegung und der Bewegung des Kugelkreisels.*

Ferner kann man im Zweifel sein, ob die Poinsot-Bewegung wirklich so viel einfacher und übersichtlicher wie die Bewegung des schweren Kugelkreisels ist, daſs es sich verlohnt, diese Bewegung auf jene zurückzuführen. Allerdings läſst sich die Poinsot-Bewegung bis zu einem gewissen Grade der Vollständigkeit durch elementare Mittel (durch Abrollen eines Ellipsoides auf einer Ebene) beschreiben. Indessen darf man den Gegensatz zwischen elementarer und transcendenter Abhängigkeit nicht überschätzen. Es kann sehr wohl sein, daſs eine in transcendenter Form gegebene Bewegung für die numerische Rechnung und für die Anschauung nicht komplizierter ist, wie eine algebraisch darstellbare.

Aber selbst wenn wir annehmen, daſs wir die einzelne Poinsot-Bewegung in all ihren Details völlig beherrschen, so besitzen wir deshalb noch keine klare Vorstellung von der Relativbewegung zweier solcher Bewegungen bez. der zugehörigen umgekehrten Bewegungen. In der That ist das Bild einer Relativbewegung in der Anschauung sehr schwer zu fassen. Es dürfte kaum möglich sein, ohne längere Entwickelungen von dem Jacobischen Theorem aus zu einer klaren Vorstellung beispielsweise von der Bahnkurve der Kreiselspitze, der Polhodie- und Herpolhodiekurve in der Bewegung des Kugelkreisels vorzudringen. Wir möchten uns deshalb der von Jacobi ausgesprochenen

Hosted by Google

Ansicht nicht anschliefsen, dafs man in der gleichzeitigen Betrachtung der konjugierten Poinsot-Bewegungen ein Mittel besitzt, um die Bewegung des schweren Kreisels wirklich von Grund aus zu verstehen.

Trotzdem ist der durch Jacobi erschlossene Zusammenhang zwischen Poinsot-Bewegung und Bewegung des Kugelkreisels in kinematischer Hinsicht so merkwürdig und interessant, dafs wir ihn hier nicht mit Stillschweigen übergehen konnten.

§ 9. Die Lagrangeschen Gleichungen für die α, β, γ, δ des schweren Kugelkreisels und ihre direkte Integration. Zusammenhang zwischen der Bewegung des Kugelkreisels und einem Probleme der Punktmechanik.

Nachdem sich im Vorhergehenden unsere Parameter α, β, γ, δ in mannigfacher Beziehung so ausgezeichnet bewährt haben, werden wir uns in diesem abschliefsenden Paragraphen fragen, ob wir ihnen nicht in der Theorie des schweren Kugelkreisels eine noch centralere Stellung dadurch verleihen können, dafs wir sie von vornherein bei der Aufstellung der Differentialgleichungen und deren Integration zu Grunde legen. Es hat ja etwas Unbefriedigendes, dafs wir diese Parameter erst gegen Ende der Theorie (in diesem Kapitel) ausgiebig gebraucht haben, während wir die ursprüngliche Integration mit den Eulerschen Winkeln φ, ψ, ϑ bewerkstelligten. Demgegenüber wollen wir nun zeigen, dafs die Differentialgleichungen der Bewegung des schweren Kugelkreisels, in den α, β, γ, δ geschrieben, eine überraschend einfache Gestalt annehmen und dafs sich das ganze Integrationsgeschäft bei konsequenter Benutzung unserer Parameter sehr viel eleganter und kürzer wie bei der früheren Methode gestaltet und mit einem Schlage zu der definitiven Darstellung der Bewegung durch ϑ-Quotienten führt.

Der Umstand, dafs wir diese Entwickelungen erst jetzt bringen, und dafs wir uns bisher mit schwerfälligeren analytischen Methoden begnügt haben, liegt lediglich in der Anordnung des Stoffes, nicht in der Natur der Sache begründet. Die folgenden Betrachtungen setzen nämlich einige Vorkenntnisse aus der Theorie der elliptischen Funktionen voraus, die erst in diesem Kapitel vorbereitet werden konnten. Nur aus diesem Grunde haben wir bisher auf die konsequente Verwertung der α, β, γ, δ verzichtet.

Noch nach anderer Richtung hin sind die folgenden Ausführungen bemerkenswert. Wir werden nämlich die Bewegung des schweren Kugelkreisels mit der Bewegung eines einzelnen Massenpunktes im Raume von vier Dimensionen in Zusammenhang bringen, so wie wir sie im vorigen Paragraphen mit der kräftefreien Bewegung des unsymmetrischen

Hosted by Google

Kreisels verglichen haben. Dabei ist der hier gemeinte Zusammenhang ein durchgreifender, auch in kinetischer Hinsicht gültiger, während der von Jacobi entdeckte nur kinematischer Natur war.

Gleichzeitig werden wir Gelegenheit haben, einen Ausblick in eine eigentümliche, eventuell mehrdimensionale Auffassung der mechanischen Probleme im Sinne der Punktmechanik zu nehmen, für welche unsere Behandlung des Kugelkreisels ein vorzüglich einfaches Beispiel darbietet.

Den Ausgangspunkt unserer Betrachtungen bilden die allgemeinen Lagrangeschen Gleichungen des schweren Kugelkreisels. Es wurde bereits pag. 155 die wunderbare Thatsache betont, daſs die Form dieser Gleichungen für alle möglichen Koordinaten, durch welche wir die Lage eines mechanischen Systems beschreiben mögen, dieselbe bleibt. Die Bewegungsgleichungen leiten sich allemal aus dem Ausdrucke T der lebendigen Kraft und dem Ausdrucke dA der Arbeit bei einer unendlich kleinen Verrückung (bez. aus der potentiellen Energie V) nach ein und derselben Regel ab. Wie pag. 158 erwähnt, bleibt das Lagrangesche Schema sogar im Wesentlichen bestehen, wenn man die Lage des Systems durch überzählige Koordinaten festlegt, d. h. durch Gröſsen, welche mittelst einer (oder mehrerer) Relationen $F = \text{const.}$ (bez. $F_1, F_2, \ldots = \text{const.}$) verknüpft sind. Man hat dann nur statt T den Ausdruck $T + \lambda F$ (bez. $T + \lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 + \cdots$) zu benutzen, wo die „Lagrangeschen Multiplikatoren" λ so zu bestimmen sind, daſs die Lösungen der Lagrangeschen Gleichungen mit den Bedingungsgleichungen verträglich werden.

Diese Regel wollen wir jetzt benutzen, um die Bewegungsgleichungen des schweren Kugelkreisels in den $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, auf welche schon pag. 158 hingewiesen wurde, anzuschreiben. Verstehen wir unter $[\mathsf{A}]$, $[\mathsf{B}]$, $[\Gamma]$, $[\Delta]$ die Komponenten des Impulses, unter $\mathsf{A}, \mathsf{B}, \Gamma, \Delta$ die Komponenten der äuſseren Kraft, welche zu den Lagenkoordinaten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ gehören, so haben wir ohne Weiteres:

$$(1)\quad \begin{cases} [\mathsf{A}] = \dfrac{\partial (T+\lambda F)}{\partial \alpha'}, & [\mathsf{B}] = \dfrac{\partial (T+\lambda F)}{\partial \beta'}, \quad [\Gamma] = \dfrac{\partial (T+\lambda F)}{\partial \gamma'}, \quad [\Delta] = \dfrac{\partial (T+\lambda F)}{\partial \delta'}, \\ \mathsf{A} = -\dfrac{\partial V}{\partial \alpha}, & \mathsf{B} = -\dfrac{\partial V}{\partial \beta}, \quad \Gamma = -\dfrac{\partial V}{\partial \gamma}, \quad \Delta = -\dfrac{\partial V}{\partial \delta}. \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{d[\mathsf{A}]}{dt} - \dfrac{\partial (T+\lambda F)}{\partial \alpha} = \mathsf{A}, \\ \dfrac{d[\mathsf{B}]}{dt} - \dfrac{\partial (T+\lambda F)}{\partial \beta} = \mathsf{B}, \\ \dfrac{d[\Gamma]}{dt} - \dfrac{\partial (T+\lambda F)}{\partial \gamma} = \Gamma, \\ \dfrac{d[\Delta]}{dt} - \dfrac{\partial (T+\lambda F)}{\partial \delta} = \Delta, \end{cases}$$

Hosted by Google

Die Bedeutung der hier benutzten Gröſsen ist folgende: Zunächst lautet die Bedingungsgleichung, welche die α, β, γ, δ verknüpft, wie wir wissen,

$$F = \alpha\delta - \beta\gamma = 1. \tag{3}$$

Sodann ist die potentielle Energie $V = P\cos\vartheta$. Da nach den Definitionsgleichungen (8) von pag. 21 $\cos\vartheta = \alpha\delta + \beta\gamma$, so haben wir, in den α, β, γ, δ geschrieben,

$$V = P(\alpha\delta + \beta\gamma). \tag{4}$$

Bei der Berechnung der kinetischen Energie T des Kugelkreisels gehen wir von dem Ausdrucke

$$T = \frac{A}{2}(p^2 + q^2 + r^2)$$

aus, wollen aber, um Zweideutigkeiten in der Bezeichnung zu vermeiden, im Folgenden statt A lieber $\frac{M}{2}$ schreiben. Benutzen wir für $p + iq$, $-p + iq$, r die Werte aus den Gleichungen (5) von pag. 43, so ergiebt sich

$$\begin{aligned} T &= M\{(\beta\delta' - \delta\beta')(\alpha\gamma' - \gamma\alpha') - (\gamma\beta' - \alpha\delta')(\delta\alpha' - \beta\gamma')\}, \\ &= M\{(\alpha\delta - \beta\gamma)(\alpha'\delta' - \beta'\gamma')\}. \end{aligned}$$

Mit Rücksicht auf die Bedingungsgleichung $F = 1$ gewinnen wir also den auſserordentlich einfachen Wert:

$$T = M(\alpha'\delta' - \beta'\gamma'). \tag{5}$$

Wegen der angegebenen Werte von F, V und T gehen die Gleichungen (1) und (2) in die folgenden über:

$$\left\{\begin{array}{llll} [\mathsf{A}] = M\delta', & [\mathsf{B}] = -M\gamma', & [\Gamma] = -M\beta', & [\Delta] = M\alpha', \\ \mathsf{A} = -P\delta, & \mathsf{B} = -P\gamma, & \Gamma = -P\beta, & \Delta = -P\alpha, \\ \frac{d[\mathsf{A}]}{dt} - \lambda\delta = \mathsf{A}, & \frac{d[\mathsf{B}]}{dt} + \lambda\gamma = \mathsf{B}, & \frac{d[\Gamma]}{dt} + \lambda\beta = \Gamma, & \frac{d[\Delta]}{dt} - \lambda\alpha = \Delta. \end{array}\right. \tag{6}$$

Eliminieren wir aus (6) die Impuls- und Kraftkomponenten, so haben wir, indem wir die Gleichungen in der umgekehrten Reihenfolge schreiben:

$$\left\{\begin{array}{l} M\alpha'' - \lambda\alpha = -P\alpha, \\ M\beta'' - \lambda\beta = +P\beta, \\ M\gamma'' - \lambda\gamma = +P\gamma, \\ M\delta'' - \lambda\delta = -P\delta. \end{array}\right. \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1. \tag{7}$$

Dies sind die überaus einfachen und symmetrischen Bewegungsgleichungen des schweren Kugelkreisels in den α, β, γ, δ.

Hosted by Google

Wir kommen später auf diese Differentialgleichungen ausführlich zurück. Zunächst wollen wir noch einen Schritt weiter gehen und die vorstehenden Gleichungen in ihren reellen und imaginären Teil auflösen, indem wir von den $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ zu den Quaternionengröfsen A, B, C, D übergehen. Da nach pag. 21

$$\alpha = D + iC, \quad \beta = -B + iA,$$
$$\gamma = B + iA, \quad \delta = D - iC,$$

so ergiebt sich:

$$(8) \qquad \begin{cases} MA'' - \lambda A = + PA, \\ MB'' - \lambda B = + PB, \\ MC'' - \lambda C = - PC, \\ MD'' - \lambda D = - PD, \end{cases} \quad A^2 + B^2 + C^2 + D^2 = 1.$$

Die somit erhaltenen *Lagrangeschen Differentialgleichungen des schweren Kugelkreisels in den* A, B, C, D sind, wie man sieht, in ihrer Bauart von den vorhergehenden Gleichungen nicht verschieden; nur die Form der Bedingungsgleichung erscheint geändert.

Diese Gleichungen legen nun eine Deutung der Kreiselbewegung im Sinne der Punktmechanik des vierdimensionalen Raumes aufserordentlich nahe.

Wir wollen die ihrer Definition nach reellen Gröfsen A, B, C, D als gewöhnliche rechtwinklige Koordinaten im Raume von vier Dimensionen auffassen und zwar denken wir an einen vierdimensionalen Raum, der die genaue Verallgemeinerung unseres gewöhnlichen Euklidischen dreidimensionalen Raumes bildet. Wir werden also insbesondere in unserem vierdimensionalen Raume den Pythagoräischen Lehrsatz zur Anwendung bringen und dementsprechend die Entfernung zweier Punkte A_1, B_1, C_1, D_1; A_2, B_2, C_2, D_2 durch den Ausdruck messen:

$$\sqrt{(A_2 - A_1)^2 + (B_2 - B_1)^2 + (C_2 - C_1)^2 + (D_2 - D_1)^2}.$$

In diesem Raume soll nun die „Bewegung“ eines Punktes von der Masse M untersucht werden; das Quadrat der Geschwindigkeit dieses Punktes werden wir nach dem eben Gesagten gleich

$$A'^2 + B'^2 + C'^2 + D'^2$$

setzen; seine kinetische Energie wird mithin sein:

$$(9) \qquad T = \frac{M}{2}(A'^2 + B'^2 + C'^2 + D'^2).$$

Ferner wollen wir annehmen, dafs unser Punkt einer äufseren Kraft unterliegt, deren potentielle Energie an der Stelle A, B, C, D des vierdimensionalen Raumes gleich ist:

Hosted by Google

$$(10) \qquad V = \frac{P}{2}(-A^2 - B^2 + C^2 + D^2).$$

Endlich soll der Punkt gezwungen sein, auf der um den Koordinatenanfang geschlagenen „Einheitskugel“ zu verbleiben, d. h. sein Abstand vom Koordinatenanfang soll beständig gleich 1 sein. Dies bedeutet zufolge unserer obigen Festsetzung über das Maſs der Entfernungen im vierdimensionalen Raume, daſs beständig die Bedingungsgleichung erfüllt sein soll

$$(11) \qquad F = A^2 + B^2 + C^2 + D^2 = 1.$$

Unter der „Bewegung“ des Punktes im Raume von vier Dimensionen verstehen wir dabei nichts anderes als den Inbegriff solcher Koordinatenänderungen, welche den um eine Zeile vermehrten Differentialgleichungen für die Bewegung des Punktes im Raume von drei Dimensionen genügen.

Das vierdimensionale Bewegungsproblem, welches hierdurch definiert ist, können wir kurz bezeichnen als *die Bewegung eines sphärischen Pendels im Raume von vier Dimensionen unter dem Einfluſs des durch* (10) *charakterisierten Kraftsystems.**)

Bilden wir nun die Differentialgleichungen dieses sphärischen Pendels etwa nach Analogie mit den bekannten Lagrangeschen Gleichungen erster Art im Falle der dreidimensionalen Punktmechanik, so ergeben sich genau die Gleichungen (8). Wir können also sagen:

Die Bewegung des schweren Kugelkreisels ist identisch mit der Bewegung eines sphärischen Pendels im Raume von vier Dimensionen unter dem Einfluſs des vorher angegebenen Kraftsystems.

Um uns kurz ausdrücken zu können, wollen wir den Punkt der vierdimensionalen Kugel, dessen rechtwinklige Koordinaten jeweils gleich den Quaternionenparametern des Kugelkreisels sind, den *Repräsentanten* der Kreiselbewegung nennen und wollen uns von der

*) Das *genaue Analogon* des dreidimensionalen sphärischen Pendels im Raume von vier Dimensionen wäre offenbar die Bewegung eines Massenpunktes auf der Einheitskugel in einem Kraftfelde, dessen potentielle Energie einer der Koordinaten A, B, C, D proportional ist oder, etwas allgemeiner, nur von einer dieser Koordinaten abhängt. Die Niveauflächen dieses Kraftfeldes bestehen aus einem System paralleler (dreifach ausgedehnter) „Ebenen“ des vierdimensionalen Raumes, ebenso wie die Niveauflächen der Schwere im Raume von drei Dimensionen aus dem Systeme der sämtlichen Horizontalebenen bestehen, während die Niveauflächen unseres Kraftfeldes (10) ein System von Flächen zweiten Grades darstellen.

Natürlich ist dieser, dem sphärischen Pendel im engeren Sinne analoge Kreisel integrabel. Er gehört in der von Herrn Liebmann (Math. Ann. Bd. 50, pag. 65) gegebenen Liste zu dem als reell hervorgehobenen Falle (5), bei welchem

$$V = f(\beta - \gamma) = f(2B)$$

vorausgesetzt wird.

Hosted by Google

Bewegung dieses Repräsentanten ein möglichst klares Bild zu verschaffen suchen. Dabei handelt es sich in erster Linie darum, die uns von früher her bekannten Bewegungsgesetze des Kreisels, die Impulssätze $n = \text{const}$, $N = \text{const}$ und den Satz der lebendigen Kraft als Eigenschaften der Bewegung des Repräsentanten umzudeuten. Diese Gesetze sollen hier von neuem auf Grund der Gleichungen (8) abgeleitet werden. Und zwar werden wir genau so verfahren, wie wir es bei der Behandlung des dreidimensionalen sphärischen Pendels auf Grund der in rechtwinkligen Koordinaten x, y, z geschriebenen Lagrangeschen Gleichungen erster Art thun würden.

Wir multiplizieren zunächst die Gleichungen (8) der Reihe nach mit B, A, D, C und nehmen die Differenz der beiden ersten und der beiden letzten Gleichungen. So ergiebt sich:

$$M(A''B - B''A) = 0,$$
$$M(C''D - D''C) = 0.$$

Offenbar sind die linken Seiten vollständige Differentialquotienten nach der Zeit. Wir können daher integrieren und erhalten, wenn wir die Integrationskonstanten mit $\frac{n+N}{2}$ und $\frac{n-N}{2}$ bezeichnen:

$$(12) \qquad \begin{cases} M(A'B - B'A) = \dfrac{n+N}{2}, \\ M(C'D - D'C) = \dfrac{n-N}{2}. \end{cases}$$

Die Wahl der Konstantenbezeichnung deutet an, in welcher Weise diese Gleichungen mit unseren früheren Integralgleichungen $n = \text{const}$ und $N = \text{const}$ zusammenhängen. Um diese Gleichungen in Worte zu fassen, bemerken wir, daſs die linken Seiten den Inhalten gewisser infinitesimaler Dreiecke proportional sind. Es ist z. B. $\frac{1}{2}(A'B - B'A)dt$ gleich dem Inhalt des Dreiecks mit den Ecken $0, 0, 0, 0$; $A, B, 0, 0$; $A + dA$; $B + dB, 0, 0$. Daraufhin überzeugt man sich von der Richtigkeit der folgenden Aussage:

Der Repräsentant des Kugelkreisels bewegt sich so, daſs der Radiusvektor vom Koordinatenanfang nach dem Projektionspunkt des Repräsentanten auf die (zweifach ausgedehnten) Ebenen $C = D = 0$ bez. $A = B = 0$ in gleichen Zeiten gleiche Flächen beschreibt.

Unsere Impulssätze $n = \text{const}$ und $N = \text{const}$ sind hierdurch in engste Beziehung zu den Flächensätzen der gewöhnlichen Punktmechanik gebracht, wie denn auch die Ableitung der Gleichungen (12) mit der üblichen Ableitung der Flächensätze genau parallel lief.

Hosted by Google

Um sodann den Satz der lebendigen Kraft von Neuem zu gewinnen, multiplizieren wir die Gleichungen (8) der Reihe nach mit A', B', C', D' und addieren.

Berücksichtigen wir, dafs nach Gleichung (11)

$$AA' + BB' + CC' + DD' = 0 \tag{13}$$

ist, so ergiebt sich

$$M(A'A'' + B'B'' + C'C'' + D'D'') = P(AA' + BB' - CC' - DD').$$

Wiederum stehen rechts und links vollständige Differentialquotienten. Wir integrieren daher und finden, unter h die Integrationskonstante verstanden:

$$\frac{M}{2}(A'^2 + B'^2 + C'^2 + D'^2) = \frac{P}{2}(A^2 + B^2 - C^2 - D^2) + h \tag{14}$$

oder, wenn wir die Abkürzungen aus den Gleichungen (9) und (10) benutzen

$$T + V = h.$$

Wir sind somit zum Satze der lebendigen Kraft gelangt und zwar genau durch denjenigen Prozefs, den man in der Mechanik des einzelnen Punktes bei Rechnungen mit rechtwinkligen Koordinaten anzuwenden gewöhnt ist. Um diesen Satz im Sinne der vierdimensionalen Punktmechanik zu deuten, berücksichtigen wir, dafs T dem Quadrat der Geschwindigkeit des Repräsentanten proportional ist; wir können dann etwa sagen:

Unser Repräsentant passiert bei seiner Bewegung die einzelne Niveaufläche $V =$ const. stets mit der gleichen Geschwindigkeit, welche sich aus der Konstanten h, der Masse M und dem Werte des zu der betr. Niveaufläche gehörigen Potentiales V nach der letzten Formel leicht berechnen läfst.

Schliefslich wollen wir noch die Gröfse des Lagrangeschen Multiplikators λ berechnen. Dieser giebt uns den „Druck“ an, welchen unser Massenpunkt auf die ihn führende Kugelfläche in radialer Richtung ausübt, oder, wenn wir wollen, die Spannung des von O auslaufenden Armes, an dessen Ende unser Massenpunkt befestigt ist. Wir multiplizieren zu dem Zwecke die Gleichungen (8) der Reihe nach mit A, B, C, D und addieren. Dabei ergiebt sich wegen der Bedingungsgleichung $A^2 + B^2 + C^2 + D^2 = 1$:

$$\lambda = M(AA'' + BB'' + CC'' + DD'') - P(A^2 + B^2 - C^2 - D^2).$$

Es ist aber nach Gleichung (13)

$$AA'' + BB'' + CC'' + DD'' = -(A'^2 + B'^2 + C'^2 + D'^2),$$

also mit Rücksicht auf (14)

$$M(AA'' + BB'' + CC'' + DD'') = -P(A^2 + B^2 - C^2 - D^2) - 2h.$$


Hosted by Google

Der angegebene Wert von λ reduziert sich daher auf

$$\lambda = -2P(A^2 + B^2 - C^2 - D^2) - 2h = 4V - 2h. \tag{15}$$

Dieses Ergebnis wollen wir folgendermaſsen als Satz aussprechen:

Beim Durchgange durch die gleiche Niveaufläche $V =$ const *drückt der Repräsentant stets mit der gleichen Stärke* $\lambda = 4V - 2h$ *senkrecht gegen die ihn tragende Kugelfläche.*

Wir gehen nun dazu über, die oben angekündigte Revision unseres früheren Integrationsverfahrens zu geben. Wir werden geradezu, indem wir von den Differentialgleichungen der A, B, C, D bez. der $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ausgehen, in gröſster Kürze eine vollständige und neue analytische Theorie der Kreiselbewegung entwickeln, ohne die früheren Resultate als bekannt vorauszusetzen.

Durch die Gleichungen (12)—(15) ist der Anfang des Integrationsprozesses in den Quaternionengröſsen A, B, C, D bereits gemacht. Zur Weiterführung benutzen wir die Hülfsgröſse

$$u = -A^2 - B^2 + C^2 + D^2 \tag{16}$$

und versuchen diese als Funktion von t auszudrücken. Hierzu dienen folgende Rechnungen.

Wir bilden

$$u' = 2(-AA' - BB' + CC' + DD')$$

und kombinieren diese Gleichung mit (13), wobei sich ergiebt:

$$\begin{cases} AA' + BB' = -\dfrac{u'}{4}, \\ CC' + DD' = +\dfrac{u'}{4}. \end{cases} \tag{17}$$

Darauf quadrieren und summieren wir die erste dieser Gleichungen und der Gleichungen (12) und finden:

$$(A^2 + B^2)(A'^2 + B'^2) = \frac{M^2u'^2 + 4(n+N)^2}{16M^2}. \tag{18}$$

Ebenso folgt aus der zweiten der Gleichungen (17) und (12)

$$(C^2 + D^2)(C'^2 + D'^2) = \frac{M^2u'^2 + 4(n-N)^2}{16M^2}. \tag{18'}$$

Ferner haben wir wegen der Definition von u und der Bedingungsgleichung $A^2 + B^2 + C^2 + D^2 = 1$:

$$\begin{cases} A^2 + B^2 = \dfrac{1-u}{2}, \\ C^2 + D^2 = \dfrac{1+u}{2}, \end{cases} \tag{19}$$

so daſs wir statt (18) auch schreiben können:

Hosted by Google

$$A'^2 + B'^2 = \frac{M^2 u'^2 + 4(n+N)^2}{8M^2(1-u)}$$

$$C'^2 + D'^2 = \frac{M^2 u'^2 + 4(n-N)^2}{8M^2(1+u)}$$

und

$$A'^2 + B'^2 + C'^2 + D'^2 = \frac{M^2 u'^2 + 4(n^2+N^2) + 8nNu}{4M^2(1-u^2)}.$$

Mit diesem Werte gehen wir in die Gleichung der lebendigen Kraft hinein.

Wir erhalten dann:

$$u'^2 = U,$$

wo U folgende Bedeutung hat:

$$(20)\quad U = \frac{4}{M^2}\{2Mh(1-u^2) - (n^2+N^2+2nNu) - MPu(1-u^2)\};$$

hiernach bestimmt sich t durch das elliptische Integral

$$(21)\qquad t = \int_e^u \frac{du}{\sqrt{U}}.$$

Die untere Grenze e des Integrals denken wir uns in einen der Wurzelwerte von $U = 0$ gelegt. Die beiden anderen Wurzelwerte seien e' und e''. Wir führen sogleich die folgenden Bezeichnungen für einige charakteristische Werte von t ein:

$$(21')\quad \omega = \int_e^{e'} \frac{du}{\sqrt{U}},\quad i\omega' = \int_e^{-\infty} \frac{du}{\sqrt{U}},\quad ia = \int_e^{-1} \frac{du}{\sqrt{U}},\quad ib = \int_{e'}^{+1} \frac{du}{\sqrt{U}}.$$

Kehren wir die in (21) enthaltene Beziehung zwischen t und u um, so ergiebt sich u als eine doppeltperiodische Funktion von t mit den Perioden 2ω und $2i\omega'$. Somit haben wir unsere früheren Entwickelungen den neuen Bezeichnungen angepaſst.

Nunmehr gehen wir auf die ursprünglichen Differentialgleichungen (7) für die α, β, γ, δ zurück, welche für das Folgende doch bequemer sind, wie die in den Quaternionengröſsen geschriebenen Gleichungen (8), wie sich später zeigen wird. Hier tragen wir den Wert von λ aus Gleichung (15) ein und denken uns u als doppeltperiodische Funktion von t berechnet. Wir erhalten so:

$$(22)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2\alpha}{dt^2} = \left(\dfrac{2P}{M}u(t) - \dfrac{2h-P}{M}\right)\alpha, \\[2ex] \dfrac{d^2\beta}{dt^2} = \left(\dfrac{2P}{M}u(t) - \dfrac{2h+P}{M}\right)\beta, \end{cases}$$

Die Differentialgleichungen für die beiden anderen Parameter γ und δ sind den angegebenen genau gleich.

Hosted by Google

Unser Problem hängt somit von der Lösung dieser *linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit doppeltperiodischen Koeffizienten* ab. Über solche Gleichungen mögen zunächst einige historische Notizen Platz finden.

Die vorstehenden Differentialgleichungen gehören zu einem Gleichungstypus, welcher in der Litteratur vielfach studiert worden ist. Wir bezeichnen sie als *Lamésche Gleichungen*, da sie Verallgemeinerungen derjenigen Differentialgleichungen darstellen, welche zuerst von Lamé bei einer Aufgabe der Wärmeleitung behandelt worden sind. Gegenüber den allgemeinsten Gleichungen, welche Lamés Namen tragen, sind unsere Differentialgleichungen durch die wichtige Eigenschaft ausgezeichnet, daſs ihre Integrale eindeutige Funktionen von t sind. Solche Gleichungen sind ganz besonders von Hermite und zwar gerade im Anschluſs an die Rotationsprobleme (s. unten) untersucht worden. Es ist daher berechtigt, diese Gleichungen allgemein mit Hermites Namen zu belegen und sie als den *Hermiteschen Fall der Laméschen Gleichungen* zu bezeichnen.

Aus der Form der Differentialgleichung kann man das Statthaben des Hermiteschen Falles nach allgemeinen Regeln folgendermaſsen entscheiden. Man suche die singulären Stellen der Differentialgleichung — wir handeln zunächst von der Gleichung für α — d. h. diejenigen Punkte der t-Ebene auf, an denen in der Entwickelung der Integrale andere als ganzzahlige Potenzen vorkommen. Diese singulären Punkte sind in unserem Falle mit den Unendlichkeitsstellen des Koeffizienten von α identisch, welche keine anderen sind, wie die Unendlichkeitsstellen der Funktion $u(t)$, d. h. wie die Stellen

$$t = i\omega' + 2m\omega + 2m'i\omega'.$$

Darauf mache man eine Potenzentwickelung an einer dieser Stellen, z. B. an der Stelle $t = i\omega'$ und setze

$$\alpha = a_0(t - i\omega')^{-n} + a_1(t - i\omega')^{-n+1} + \cdots,$$

wobei die Koeffizienten der Entwickelung und der Exponent n aus der Differentialgleichung zu bestimmen sind. Für $\frac{\alpha''}{\alpha}$ ergiebt sich dabei eine Reihe, welche mit dem Terme

$$\frac{n(n+1)}{(t - i\omega')^2}$$

beginnt. Desgleichen entwickele man den Koeffizienten von α in eine nach Potenzen von $t - i\omega'$ fortschreitende Reihe, welche mit der $(-2)^{\text{ten}}$ Potenz beginnen wird. Das erste Glied dieser Reihe werde mit

$$\frac{m}{(t - i\omega')^2}$$

Hosted by Google

bezeichnet, ($m =$ „Multiplikator des Unendlichwerdens"). Alsdann bestimmt sich n aus der Gleichung

$$n(n+1) = m. \tag{23}$$

Sollen nun die Integrale unserer Differentialgleichung eindeutige Funktionen von t werden, so muſs offenbar n eine ganze Zahl sein. Die vorstehende Gleichung giebt uns daher, umgekehrt gelesen, eine Bedingung, welcher der Multiplikator m im Hermiteschen Falle genügen muſs. Wir sehen also:

Das Statthaben des Hermiteschen Falles läſst sich aus der Differentialgleichung heraus dadurch beurteilen, daſs man den Multiplikator m aufsucht, mit welchem der Koeffizient von α an der Stelle $t = i\omega'$ und an den äquivalenten Stellen unendlich wird. Dieser Multiplikator muſs die Form $n(n+1)$ haben, unter n eine ganze positive Zahl verstanden.

Die eben genannte Bedingung ist hier nur als notwendige Bedingung für die Eindeutigkeit der Integrale abgeleitet; daſs sie zugleich die hinreichende Bedingung dafür darstellt, ist auf Grund der Parallelogrammeinteilung der t-Ebene nicht schwer zu sehen, soll aber hier übergangen werden.

Wir überzeugen uns nun leicht, daſs unser Kriterium bei den Gleichungen (22) erfüllt ist. Wir betrachten zu dem Zwecke das Integral

$$t - i\omega' = \int_{\infty}^{u} \frac{du}{\sqrt{U}};$$

substituieren wir $u = \frac{1}{v}$ und entwickeln $U^{-\frac{1}{2}}$ nach aufsteigenden Potenzen von v, so ergiebt sich nach Ausführung der Integration in erster Annäherung

$$t - i\omega' = -\sqrt{\frac{Mv}{P}} = -\sqrt{\frac{M}{Pu}},$$

also umgekehrt

$$u = \frac{M}{P}\,\frac{1}{(t - i\omega')^2}. \tag{24}$$

Führt man die Rechnung ein Glied weiter, so erhält man, wie wir des Späteren wegen hinzufügen, in derselben Weise:

$$u = \frac{M}{P}\,\frac{1}{(t - i\omega')^2}\left(1 + \frac{2}{3}\,\frac{h}{M}\,(t - i\omega')^2\right). \tag{24'}$$

Aus Gleichung (24) bestimmt sich der Multiplikator, von welchem oben die Rede war, unmittelbar. Wir haben einfach

$$m = \frac{2P}{M} \cdot \frac{M}{P} = 2;$$

Hosted by Google

aus Gleichung (23) folgt daher

$$n = 1.$$

Wir können hiernach sagen:

In den Gleichungen (22) *liegt wirklich der Hermitesche Fall der Laméschen Gleichung vor, und zwar das einfachste Vorkommnis desselben, der Unterfall* $n = 1$.

Die Integrale der Hermite-Laméschen Gleichung sind nun, zumal in dem einfachsten Falle $n = 1$, sofort hingeschrieben. Man überzeugt sich zunächst, daſs, da die Differentialgleichung bei Vermehrung von t um 2ω und $2i\omega'$ völlig ungeändert bleibt, auch ihre Integrale gegenüber Vermehrungen des Argumentes um Perioden ein sehr einfaches Verhalten zeigen müssen. Nennt man nämlich zwei partikuläre Lösungen der Differentialgleichung $z_1(t)$ und $z_2(t)$, so muſs sich $z_1(t + 2\omega)$, $z_1(t + 2i\omega')$ (und ebenso $z_2(t + 2\omega)$, $z_2(t + 2i\omega')$) aus z_1 und z_2 linear zusammensetzen lassen. Durch spezielle Auswahl der partikulären Lösungen z_1 und z_2 kann man sogar erreichen, daſs $z_1(t + 2\omega)$ und $z_1(t + 2i\omega')$ direkt mit $z_1(t)$ proportional wird, so daſs also

$$z_1(t + 2\omega) = \varrho\, z_1(t), \quad z_1(t + 2i\omega') = \sigma\, z_1(t)$$

wird. Entsprechend läſst sich die andere partikuläre Lösung z_2 wählen. Das Verhalten dieser Partikular-Lösungen gegenüber wiederholten Periodenzuwächsen ist hiernach klar.

Nun bezeichneten wir eindeutige Funktionen von t, welche sich bei Vermehrung des Arguments um Perioden in dieser Weise „multiplikativ“ verhalten, allgemein als elliptische Funktionen zweiter Art. Dieselben können, wie wir wissen, als Produkt eines Exponentialfaktors und eines ϑ-Quotienten dargestellt werden, wobei so viele ϑ-Funktionen im Zähler und Nenner auftreten, als der Grad der Funktion, d. h. die Anzahl der im einzelnen Periodenrechteck gelegenen Unendlichkeitsstellen beträgt. Diese Anzahl ist im Falle der Hermite-Laméschen Gleichung überdies von vornherein bekannt. Wir sahen nämlich, daſs, wenn $m = n(n + 1)$ ist, eine und nur eine n-fache Unendlichkeitsstelle bei $t = i\omega'$ (und den äquivalenten Punkten) vorhanden war. Die aus dem Multiplikator m zu bestimmende Zahl n giebt also direkt den Grad der elliptischen Funktionen an. Wir gewinnen also das folgende Resultat:

Die Hermite-Lamésche Gleichung wird allgemein durch elliptische Funktionen zweiter Art n^{ten} Grades integriert. In dem hier vorliegenden einfachsten Falle $n = 1$ reichen wir insbesondere mit elliptischen Funktionen zweiter Art ersten Grades aus.

Wir bemerken ferner, daſs unsere Differentialgleichung bei Vertauschung von t mit $-t$ völlig ungeändert bleibt. Daraus folgt, daſs

Hosted by Google

zugleich mit $z(t)$ immer auch $z(-t)$ ein Integral der Differentialgleichung darstellt. Ist insbesondere $z(t)$ als eine der multiplikativen partikulären Lösungen gewählt, so ist auch $z(-t)$ eine multiplikative Lösung, welche im allgemeinen von $z(t)$ verschieden ist. *Wir können also die im Vorstehenden genannten Lösungen z_1 und z_2 bez. gleich setzen:*

$$z_1 = z(t), \quad z_2 = z(-t).$$

Im Übrigen fügen wir die selbstverständliche Bemerkung hinzu:

Die allgemeine Lösung ergiebt sich aus unsern Partikularlösungen in der Form

$$c_1 z(t) + c_2 z(-t), \tag{25}$$

wo c_1 und c_2 die willkürlichen Integrationskonstanten sind.

In unserem Falle $n = 1$ hat $z(t)$ die folgende einfache Form

$$z(t) = e^{\lambda t} \frac{\vartheta(t - t_1)}{\vartheta(t - i\omega')}, \tag{26}$$

wo die eingeführten Konstanten λ und t_1 aus der Differentialgleichung zu bestimmen sind. Die folgende Rechnung, welche zu dieser Konstantenbestimmung dient, läſst gleichzeitig erkennen, daſs $z(t)$ bei richtiger Konstantenwahl der in Rede stehenden Differentialgleichung wirklich genügt, und liefert somit einen expliciten Beweis der sämtlichen vorhergehenden Bemerkungen.

Wir betrachten vorerst die Gröſse

$$\tag{27} \left\{ \begin{aligned} \frac{z''}{z} &= \frac{d^2 \log z}{dt^2} + \left(\frac{d \log z}{dt}\right)^2 = \\ &= \frac{d^2 \log \vartheta(t - t_1)}{dt^2} - \frac{d^2 \log \vartheta(t - i\omega')}{dt^2} + \left(\lambda + \frac{d \log \vartheta(t - t_1)}{dt} - \frac{d \log \vartheta(t - i\omega')}{dt}\right)^2. \end{aligned} \right.$$

Dieselbe wird nur an den Stellen $t = t_1$ und $t = i\omega'$ sowie an den äquivalenten Stellen unendlich, und zwar an den ersteren von der ersten, an den letzteren von der zweiten Ordnung. Entwickeln wir nämlich $\frac{d \log \vartheta(t)}{dt}$ nach dem Taylorschen Lehrsatze bei $t = 0$, so ergiebt sich

$$\frac{d \log \vartheta(t)}{dt} = \frac{1}{t} + \frac{\vartheta'''(0)}{3\,\vartheta'(0)}\, t + \cdots, \tag{28}$$

also

$$\frac{d^2 \log \vartheta(t)}{dt^2} = -\frac{1}{t^2} + \frac{\vartheta'''(0)}{3\,\vartheta'(0)} + \cdots. \tag{28'}$$

Mithin lautet die Entwickelung unseres obigen Ausdrucks an den Stellen $t = t_1$ bez. $t = i\omega'$, wenn wir nur die unendlich werdenden Terme hinschreiben:

$$\frac{z''}{z} = \frac{2}{t - t_1}\left(\lambda - \frac{d \log \vartheta(t_1 - i\omega')}{dt_1}\right) + \cdots \quad (\text{für } t = t_1),$$

$$\frac{z''}{z} = \frac{2}{(t - i\omega')^2} + \frac{2}{t - i\omega'}\left(\lambda + \frac{d \log \vartheta(i\omega' - t_1)}{dt_1}\right) + \cdots \quad (\text{für } t = i\omega').$$

Hosted by Google

Wir können nun durch Wahl von λ die Unendlichkeitsstelle bei $t = t_1$ in Fortfall bringen; wir brauchen nur zu setzen

$$\lambda = \frac{d \log \vartheta (t_1 - i\omega')}{d t_1};$$

gleichzeitig verschwindet dann auch in unserer zweiten Entwickelung der Term mit $(t - i\omega')^{-1}$. Diese lautet daher jetzt:

$$\frac{z''}{z} = \frac{2}{(t - i\omega')^2} + \cdots \tag{29}$$

oder, wenn wir noch das konstante Glied der Potenzreihe mitnehmen wollen:

$$\frac{z''}{z} = \frac{2}{(t - i\omega')^2} - \left(\frac{d^2 \log \vartheta (t - t_1)}{d t^2}\right)_{t = i\omega'} + \frac{\vartheta'''(0)}{3\,\vartheta'(0)} + \cdots \tag{29'}$$

Ferner sieht man es der in (27) gegebenen Darstellung sofort an, daſs $\frac{z''}{z}$ eine doppeltperiodische Funktion von den Perioden 2ω und $2i\omega'$ ist. Es werden daher die Entwickelungen (28) und (29) auſser für die Stellen $t = t_1$ und $t = i\omega'$ auch für die sämtlichen äquivalenten Stellen gültig sein. Mithin werden bei unserer Wahl von λ auſser der Stelle $t = t_1$ auch die sämtlichen mit ihr äquivalenten Stellen als Unendlichkeitsstellen in Fortfall kommen und es wird andrerseits die Gleichung (29) nicht nur an der Stelle $t = i\omega'$, sondern auch an den sämtlichen äquivalenten Stellen gültig sein. Somit haben wir bewiesen:

Bei unserer Wahl von λ ist $\frac{z''}{z}$ eine doppeltperiodische Funktion von t, welche an den Stellen $t = i\omega'$ und den äquivalenten Stellen und nur an diesen von der zweiten Ordnung mit dem Multiplikator 2 unendlich wird.

Eine ebensolche Funktion ist aber nach obigem

$$\frac{2P}{M} u(t).$$

Die Differenz beider wäre also eine doppeltperiodische Funktion, welche für keinen Punkt der t-Ebene unendlich wird. Eine solche Funktion reduziert sich aber notwendiger Weise auf eine Konstante c. Wir haben also:

$$\frac{z''}{z} - \frac{2P}{M} u(t) = c. \tag{30}$$

Dies ist direkt eine Lamésche Gleichung. Wir sehen mithin:

Bei der obigen Wahl von λ genügt unsere elliptische Funktion ersten Grades $z(t)$ der Hermite-Laméschen Gleichung

$$z'' = \left(\frac{2P}{M} u(t) + c\right) z. \tag{30'}$$

Hosted by Google

Die in dieser Gleichung vorkommende Gröfse c hängt dabei von der noch disponibeln Konstanten t_1 ab. Durch passende Wahl dieser Konstanten wird es daher möglich sein, der Konstanten c einen beliebigen Wert zu erteilen, und es insbesondere so einzurichten, dafs die vorstehende Gleichung direkt in die erste oder zweite der Gleichungen (22) übergeht.

Um dieses zu erreichen, drücken wir zunächst die Gröfse c in einer für das Folgende bequemen Weise durch t_1 aus. Wir setzen zu dem Zwecke in (30) $t = i\omega'$ und schreiben:

$$(31) \qquad c = \left\{\frac{z''}{z} - \frac{3P}{M} u(t) + \frac{P}{M} u(t)\right\}_{t = i\omega'}.$$

Darauf betrachten wir den Ausdruck:

$$\frac{P}{M} u(t) + \frac{d^2 \log \vartheta(t - i\omega')}{dt^2};$$

derselbe ist eine doppeltperiodische Funktion von den Perioden 2ω und $2i\omega'$, welche an keiner Stelle der t-Ebene unendlich wird. In der That heben sich die bei $t = i\omega'$ und den äquivalenten Punkten gelegenen Unendlichkeitsstellen des ersten und zweiten Termes nach den Gleichungen (24) und (28′) gerade auf. Unser Ausdruck ist also eine Konstante, so dafs wir schreiben können:

$$\frac{P}{M} u(t) = -\frac{d^2 \log \vartheta(t - i\omega')}{dt^2} + c_1.$$

Den Wert von c_1 bestimmen wir auf doppelte Weise, indem wir einmal $t = ia$ und $u = -1$, das andere Mal $t = \omega - ib$ und $u = +1$ setzen. Wir erhalten so

$$c_1 = \left(\frac{d^2 \log \vartheta(t - i\omega')}{dt^2}\right)_{t = ia} - \frac{P}{M}$$

und

$$c_1 = \left(\frac{d^2 \log \vartheta(t - i\omega')}{dt^2}\right)_{t = \omega - ib} + \frac{P}{M}.$$

Entsprechend ergiebt sich für $u(t)$ der doppelte Ausdruck

$$\frac{P}{M} u(t) = -\frac{d^2 \log \vartheta(t - i\omega')}{dt^2} + \left(\frac{d^2 \log \vartheta(t - i\omega')}{dt^2}\right)_{t = ia} - \frac{P}{M}$$

und

$$\frac{P}{M} u(t) = -\frac{d^2 \log \vartheta(t - i\omega')}{dt^2} + \left(\frac{d^2 \log \vartheta(t - i\omega')}{dt^2}\right)_{t = \omega - ib} + \frac{P}{M}$$

Wir schreiben uns insbesondere die hieraus folgenden Entwicklungen an der Stelle $t = i\omega'$ hin, welche wir mit dem konstanten Gliede abbrechen; sie lauten nach (28′):

Hosted by Google

$$\frac{P}{M}u(t) = \frac{1}{(t-i\omega')^2} - \frac{\vartheta'''(0)}{3\vartheta'(0)} + \left(\frac{d^2\log\vartheta(t-i\omega')}{dt^2}\right)_{t=ia} - \frac{P}{M}$$

bez.

$$\frac{P}{M}u(t) = \frac{1}{(t-i\omega')^2} - \frac{\vartheta'''(0)}{3\vartheta'(0)} + \left(\frac{d^2\log\vartheta(t-i\omega')}{dt^2}\right)_{t=\omega-ib} + \frac{P}{M}.$$

Diese Entwickelungen setzen wir rechterhand in Gleichung (31) für das dritte Glied ein. Gleichzeitig ersetzen wir das erste und zweite Glied durch die Entwickelungen (29′) und (24′). Alsdann heben sich, wie es sein mufs, die für $t = i\omega'$ unendlich werdenden Bestandteile heraus und wir bekommen:

$$(32)\qquad c = -\left(\frac{d^2\log\vartheta(t-t_1)}{dt^2}\right)_{t=i\omega'} + \left(\frac{d^2\log\vartheta(t-i\omega')}{dt^2}\right)_{t=ia} - \frac{2h+P}{M}$$

bez.

$$(32')\qquad c = -\left(\frac{d^2\log\vartheta(t-t_1)}{dt^2}\right)_{t=i\omega'} + \left(\frac{d^2\log\vartheta(t-i\omega')}{dt^2}\right)_{t=\omega-ib} - \frac{2h-P}{M}.$$

Somit haben wir für die in Gleichung (30′) eingehende Konstante c zwei verschiedene Darstellungen gewonnen. Wir benutzen sie dazu, um die Gröfse t_1 in solcher Weise zu bestimmen, dafs Gleichung (30′) in die erste oder zweite der Gleichungen (22) übergeht. Dies erreichen wir dadurch, dafs wir einmal

$$(33)\qquad t_1 = ia,$$

das andere Mal

$$(33')\qquad t_1 = \omega - ib$$

setzen, wobei nach (32) und (32′) in der That

$$c = -\frac{2h+P}{M}$$

bez.

$$c = -\frac{2h-P}{M}$$

wird. *Wählen wir also die in unserer elliptischen Funktion $z(t)$ vorkommende, noch disponible Konstante t_1 so, wie in den Gleichungen* (33) *und* (33′) *angegeben, so haben wir in den so entstehenden Funktionen Partikularlösungen der beiden Gleichungen* (22) *vor uns.*

Es erübrigt jetzt nur noch zu zeigen, dafs unsere Parameter α und β diesen Partikularlösungen bis auf einen konstanten Faktor gleich sind.

Zunächst werden wir den Wert von α nach dem Schema der allgemeinen Lösung (25) in der Form anzusetzen haben:

$$(34)\qquad \alpha = c_1 z(t) + c_2 z(-t).$$

Hosted by Google

Der zu α konjugierte Parameter δ lautet dann, da wegen der besonderen Form von $z(t)$ unsere Lösungen $z(t)$ und $z(-t)$ konjugiert-imaginäre Gröſsen sind:

(34′) $$\delta = \bar{c}_2 z(t) + \bar{c}_1 z(-t),$$

unter $\bar{c}_1$ und $\bar{c}_2$ die zu c_1 und c_2 konjugierten Konstanten verstanden.

Wir werden nun sehen, daſs wir entweder c_2 (und also auch $\bar{c}_2$) oder c_1 (und also auch $\bar{c}_1$) gleich Null setzen müssen.

Wir benutzen zu dem Zwecke die aus den Definitionsgleichungen der α, β, γ, δ von pag. 21 folgenden Gleichungen:

(35) $$\alpha\delta = \frac{u+1}{2}, \quad \beta\gamma = \frac{u-1}{2}.$$

Die erste derselben zeigt, daſs die Nullstellen von α und δ mit denen von $u+1$, d. h. mit den Stellen $t = \pm ia + 2m\omega + 2m'i\omega'$ übereinstimmen. Setzen wir also $t = ia$, so muſs entweder α oder δ verschwinden. In den Gleichungen (34) haben wir daher entweder $c_2 = 0$ oder $\bar{c}_1 = 0$ zu nehmen. Setzen wir andrerseits $t = -ia$, so ergiebt sich auf dieselbe Weise, daſs wir entweder $c_1 = 0$ oder $\bar{c}_2 = 0$ nehmen müssen. Wir haben also in der That die beiden oben bezeichneten Möglichkeiten, entweder c_1 oder c_2 gleich Null zu setzen. Ob wir dieses oder jenes thun wollen, macht keinen groſsen Unterschied aus. *In jedem Falle ergiebt sich, daſs unsere Parameter α und δ den partikulären Lösungen $z(t)$ und $z(-t)$ direkt proportional sind.*

Wählen wir z. B. $c_2 = 0$, so bekommen wir, indem wir für $z(t)$ und die darin vorkommenden Konstanten die gefundenen Ausdrücke eintragen:

$$\alpha = c_1 e^{\frac{\vartheta'(ia - i\omega')}{\vartheta(ia - i\omega')}t} \frac{\vartheta(t - ia)}{\vartheta(t - i\omega')},$$

$$\delta = \bar{c}_1 e^{-\frac{\vartheta'(ia - i\omega')}{\vartheta(ia - i\omega')}t} \frac{\vartheta(t + ia)}{\vartheta(t + i\omega')}.$$

(Hätten wir die andere Möglichkeit $c_1 = 0$ gewählt, so würden sich nur die Ausdrücke von α und δ gegenseitig ausgetauscht haben.)

Ganz ebenso findet man aus der zweiten der Gleichungen (35), wenn man das eine Mal $t = \omega - ib$, das andere Mal $t = -\omega + ib$ setzt, daſs auch β und γ direkt den multiplikativen Partikularlösungen unserer zweiten Gleichung (22) bis auf einen Faktor gleich sind. Die Ausdrücke von β und γ werden auf solche Weise:

$$\beta = c_2 e^{\frac{\vartheta'(\omega - ib - i\omega')}{\vartheta(\omega - ib - i\omega)}t} \frac{\vartheta(t - \omega + ib)}{\vartheta(t - i\omega')},$$

$$\gamma = \bar{c}_2 e^{-\frac{\vartheta'(\omega - ib - i\omega')}{\vartheta(\omega - ib - i\omega')}} \frac{\vartheta(t + \omega - ib)}{\vartheta(t + i\omega')}.$$

Hosted by Google

Somit haben wir unsere früheren Werte der $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ (vergl. pag. 420 und 428) auf kürzestem und direktestem Wege wiedergewonnen. Es bleibt nur noch die Bestimmung der multiplizierenden Konstanten c_1 und c_2 übrig, welche sich genau auf die pag. 425 und 426 angegebene Weise bewerkstelligen läfst. Wir brauchen hierauf nicht nochmals einzugehen.

Die Differentialgleichungen für die A, B, C, D, welche ebenfalls Laméсche Gleichungen und von denen für die $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ überhaupt nicht verschieden sind, lassen sich natürlich genau ebenso integrieren. Die Vereinfachung, welche die $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ gegenüber den A, B, C, D mit sich bringen, kommt erst in den Endresultaten zur Geltung, wo sich zeigt, dafs die $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ den multiplikativen Partikularlösungen unserer Laméschen Gleichungen direkt proportional sind, während sich die A, B, C, D aus ihnen linear zusammensetzen. —

Der Hauptzweck, den wir mit diesem Nachtrag verfolgten: zu zeigen, dafs unsere Parameter $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ nicht nur für die Formulierung der Schlufsresultate, sondern auch für die direkte Integration des Kreiselproblems von Nutzen sind, ist hiermit erreicht.

Wir bemerken noch, dafs das hier gegebene Integrationsverfahren genau den Intentionen Hermite's entspricht, welche dieser Autor in seinen berühmten Untersuchungen über die Anwendungen der elliptischen Funktionen (den pag. 151 citierten Applications des fonctions elliptiques) niedergelegt hat. Während aber Hermite von dem Problem des schweren Kreisels nur den Spezialfall des gewöhnlichen sphärischen Pendels behandelt, gelang es uns, dank der Einführung der $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ seine Methode auf die Behandlung des schweren Kugelkreisels (unseres vierdimensionalen sphärischen Pendels) auszudehnen, von welchem der Übergang zu einem beliebigen symmetrischen Kreisel jederzeit nach den früheren Regeln möglich ist. Und während Hermite für die rechtwinkligen Koordinaten x, y, z des gewöhnlichen sphärischen Pendels bez. für deren komplexe Verbindungen $x + iy$, $x - iy$, z elliptische Funktionen zweiter Art zweiten Grades findet, ergeben sich für die rechtwinkligen Koordinaten A, B, C, D unseres vierdimensionalen sphärischen Pendels oder vielmehr für deren komplexe Verbindungen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ elliptische Funktionen ersten Grades, so dafs also die Hermiteschen Resultate selbst durch das Vorstehende eine Vereinfachung erfahren. Um die vollständige Parallelität der Hermiteschen und der hier gegebenen Entwickelungen zu würdigen, vergleiche man insbesondere pag. 109 u. ff. des genannten Werkes.

Gleichzeitig werden wir durch die vorstehenden Betrachtungen noch einem anderen in der Litteratur bereits vorliegenden Ansatze gerecht.

Hosted by Google

Herr Tait stellt sich nämlich in der pag. 142 citierten Arbeit die Aufgabe, allgemein die Rotationsprobleme auf Grund der Quaternionentheorie zu behandeln. Besonders elegant sind seine Resultate im kinematischen Teile; aber auch im kinetischen Teile finden sich bemerkenswerte Ansätze, welche enge mit unsern letzten Betrachtungen zusammenhängen. Dabei faſst Tait unsere vier Quaternionenparameter A, B, C, D, wie es in der Quaternionentheorie üblich ist, in die eine komplexe Gröſse

$$q = iA + jB + kC + D$$

zusammen und bildet die Differentialgleichung zweiter Ordnung, welcher diese Gröſse genügt (vgl. insbesondere Art. 30 der genannten Arbeit), und zwar sogleich für den allgemeinsten Fall einer beliebigen unsymmetrischen Massenverteilung und eines beliebigen äuſseren Kraftsystems. Indessen gelingt es ihm nicht, von dieser Differentialgleichung aus zu einer allgemeinen Integration vorzudringen, vielmehr erklärt er diese Aufgabe, wie es bei der angestrebten Allgemeinheit kaum anders möglich ist, für „unentwirrbar kompliziert“.

Unsere obigen Betrachtungen zeigen nun, daſs in dem allerdings ganz speziellen Fall des schweren Kugelkreisels die Differentialgleichung für die Quaternion q oder, was auf dasselbe hinauskommt, die vier Differentialgleichungen für die Quaternionenkomponenten A, B, C, D eine äuſserst einfache Gestalt annehmen und ein sehr elegantes Integrationsverfahren zulassen. Gleichzeitig erkennen wir aber, daſs es für die analytische Durchführung der Integration praktisch ist, von den Quaternionengröſsen A, B, C, D wieder zu unseren Parametern α, β, γ, δ überzugehen, welche in analytischer Hinsicht von unübertrefflicher Einfachheit sind. Jedenfalls werden wir hiernach unser vorliegendes Integrationsverfahren als spezielle Durchführung des den Vertretern der Quaternionentheorie in Sachen der Rotationsprobleme vorschwebenden Ideales ansehen dürfen.

Was die Beziehung der Kreiselbewegung zur Punktmechanik betrifft, so bemerken wir, daſs die obigen Auseinandersetzungen als ein spezielles Beispiel für eine allgemeine mathematische Methode anzusehen sind, nach welcher man jedes noch so komplizierte mechanische Problem in gewissem Sinne als ein Problem der Punktmechanik auffassen kann. Man ordnet nämlich dem mechanischen System, wie oben geschehen, einen einzelnen Massenpunkt, einen „Repräsentanten“ zu, indem man die Lagenkoordinaten des Systems als Koordinaten des Repräsentanten deutet. Dabei wird man entsprechend der Anzahl der benutzten Lagenkoordinaten in einen Raum von eventuell höherer Dimensionenzahl geführt. In diesem Raume legt man ferner im Anschluſs an

Hosted by Google

den Ausdruck der lebendigen Kraft eine geeignete Bestimmung über die Messung der Entfernungen zu Grunde; man berechnet nämlich die Entfernung zweier unendlich benachbarter Punkte oder, wie man sich kürzer ausdrückt, das Linienelement des betreffenden Raumes durch die Gleichung

$$ds^2 = 2T\,dt^2,$$

wo die rechte Seite ersichtlich eine definite quadratische Form der unendlich kleinen Koordinatendifferenzen der beiden Punkte wird, und definiert im Übrigen die Bewegung des Massenpunktes wieder durch das Bestehen der Lagrangeschen Gleichungen.

Dann entsprechen sämtliche Lagen, welche der Repräsentant bei der so definierten Bewegung einnimmt, sämtlichen Lagen, welche das ursprüngliche mechanische System nacheinander durchläuft. Die Bewegung des Repräsentanten wird ein genaues Abbild von der Bewegung des Systems.

Es ist klar, daſs die hier skizzierte mehrdimensionale Punkt-Auffassung der mechanischen Probleme im Grunde nur eine Umdeutung der ursprünglichen Fragestellung ist. Sie vermittelt keine eigentlich neue Erkenntnis, sondern gestattet nur eine in vielen Fällen bequeme Formulierung desselben Sachverhaltes.

Wie nützlich diese punktmechanische Auffassung immerhin werden kann, zeigt gerade am deutlichsten unser Beispiel des Kugelkreisels. Hier führte uns die Analogie mit dem auf einer vierdimensionalen Einheitskugel beweglichen Massenpunkte zu einer wesentlichen Vereinfachung des Integrationsverfahrens und gestattete uns, die von früher her bekannten Integralsätze der Kreiselbewegung in neuer und sehr anschaulicher Weise aufzufassen und auszusprechen.

So einfach wie im vorliegenden Falle wird die punktmechanische Deutung im Allgemeinen allerdings nicht ausfallen. Man muſs nämlich, wie bereits angegeben, in dem Raume, in welchem die Bewegung des Repräsentanten verfolgt werden soll, allgemein zu reden, eine von der gewöhnlichen abweichende Bestimmung über das Maſs der Entfernungen zu Grunde legen und muſs dementsprechend eine kompliziertere und willkürliche Art von Geometrie und Mechanik postulieren. Demgegenüber besteht das Bemerkenswerte an unseren obigen Ausführungen gerade darin, daſs wir hier mit der elementaren Euklidischen Geometrie auskommen, indem wir alle Eigenschaften des realen dreidimensionalen Raumes direkt auf den vierdimensionalen Raum unseres Repräsentanten übertragen.

Den Mathematikern ist die in Rede stehende mehrdimensionale Auffassung der mechanischen Probleme seit den wichtigen Arbeiten

von Beltrami*) aus dem Jahre 1869 und von Lipschitz**) aus dem Jahre 1872 geläufig. In weiteren Kreisen dürfte sie aber erst durch das schöne Werk von Hertz über die Prinzipien der Mechanik vom Jahre 1894 Eingang gefunden haben, welches ganz und gar auf diesen mehrdimensionalen, punktmechanischen Vorstellungen beruht. —

Wir beschliefsen dieses Kapitel, indem wir die historischen Notizen von pag. 429 und 430 durch einige neue und sehr interessante Angaben vervollständigen.

Als der Druck dieses Heftes in der Hauptsache bereits beendet war, wurden wir von Herrn O. Bolza-Chicago darauf aufmerksam gemacht, dafs Weierstrass bereits im Jahre 1879 bei Gelegenheit einer Vorlesung *über die Anwendungen der elliptischen Funktionen* unsere $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ zur Darstellung der Bewegung des schweren symmetrischen Kreisels verwertet hat. Eine Ausarbeitung dieser Vorlesung ist uns von Herrn J. Hänlein-Berlin in liebenswürdigster Weise zur Verfügung gestellt. Beiden Herren möchten wir an dieser Stelle unsern besten Dank aussprechen.

Weierstrass betont in jener Vorlesung zunächst, dafs die Betrachtung der neun Richtungscosinusse bei dem Problem des schweren symmetrischen Kreisels rechnerische Komplikationen mit sich bringt, welche man vermeidet, wenn man zur Festlegung der einzelnen Drehung die drei in der Anmerkung von pag. 60 genannten Eulerschen symmetrischen Drehungsparameter λ, μ, ν benutzt. Von diesen geht er mittels der Proportion $\lambda : \mu : \nu : 1 = A : B : C : D$ zu unseren vier Quaternionengröfsen über, welche durch Hinzufügung der Bedingungsgleichung $A^2 + B^2 + C^2 + D^2 = 1$ bis auf einen gemeinsamen Vorzeichenwechsel festgelegt werden. Die geometrische Bedeutung der A, B, C, D wird in dem Sinne der Gleichungen (14) von pag. 38 mit Hülfe von Drehungsaxe und Drehungswinkel erläutert. Endlich bildet Weierstrass die komplexen Verbindungen $A + iB$, $C + iD$, d. h. im Wesentlichen zwei von unsern vier Parametern $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ und bestimmt diese als elliptische Funktionen zweiter Art ersten Grades mittels gewisser Formeln, welche sich, auf den Fall des Kugelkreisels spezialisiert, genau mit unserer Darstellung von pag. 420 und 428 decken. (Ein rein äufserlicher Unterschied besteht darin, dafs Weierstrass die σ-Funktion statt der ϑ-Function verwendet und übrigens $\lambda, \mu, \nu, \varrho$ statt A, B, C, D schreibt.)

*) Mem. dell' Istituto di Bologna, ser. II, t. VIII, Teorica generale dei parametri differenziali.

**) Crelles Journal Bd. 74, Untersuchung eines Problems der Variationsrechnung, in welchem das Problem der Mechanik enthalten ist.

Hosted by Google

Dagegen fehlt bei Weierstrass (abgesehen von den Ausführungen des letzten Paragraphen) die Beziehung der Parameter $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ zu der komplexen Variabeln, welche wir uns auf der Riemannschen Kugelfläche ausgebreitet dachten, und die Gleichung für die lineare Transformation dieser Variabeln bei Ausführung der Drehung $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$:

$$\lambda = \frac{\alpha \Lambda + \beta}{\gamma \Lambda + \delta}.$$

Was nun speziell diesen letzteren Punkt betrifft, so sind wir inzwischen in der Lage, einen noch viel älteren und noch viel interessanteren historischen Nachweis beizubringen. Bei der kürzlich erfolgten Durchsicht des Gaufsischen Nachlasses hat sich nämlich gezeigt, dafs diese ganze Vorstellungsweise bereits Gaufs vollständig geläufig war, und ferner, dafs die Grundlagen der Quaternionentheorie explicite in den gelegentlichen Aufzeichnungen von Gaufs enthalten sind. Wir citieren zu diesem überraschenden Ergebnis einige Sätze aus einer vorläufigen Mitteilung „Über den Stand der Herausgabe von Gaufs' Werken", Nachr. der Kgl. Ges. der Wiss. zu Göttingen, Heft 1, 1898:

"Gaufs hat bereits genau so, wie später Riemann, eine komplexe Variable $z = x + iy$ auf der Kugel gedeutet und hat gewufst, dafs sich die Drehungen der Kugel um ihren Mittelpunkt durch lineare Substitutionen dieses z von bestimmter einfacher Bauart darstellen! Und, was noch überraschender scheinen kann, er hat die „Mutationen des Raumes" (wie er sagt), d. h. die Drehungen des Raumes um den Koordinatenanfangspunkt, verbunden mit einer beliebigen von letzterem auslaufenden Ähnlichkeitstransformation, bereits 1819 durch dieselben vier Parameter dargestellt, welche die spätere Quaternionentheorie benutzt; er bezeichnet den Inbegriff dieser vier Parameter als „Mutationsskala" und giebt die expliciten Formeln für die Zusammensetzung zweier Skalen (also die Multiplikation zweier Quaternionen), wobei er die symbolische Schreibweise $(a\,b\,c\,d) \cdot (\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta) = (A\,B\,C\,D)$ benutzt und ausdrücklich bemerkt, dafs es sich dabei um einen nicht kommutativen Prozefs handelt!"

Um noch einmal auf die oben genannte Weierstrassische Vorlesung zurückzukommen, so bemerken wir, dafs Weierstrass bei der Behandlung des kräftefreien Kreisels die $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ nicht verwendet. Vielmehr geht er hier auf die Jacobischen Richtungscosinus aus, die er nach vorheriger Integration der Eulerschen Gleichungen ziemlich direkt als elliptische Funktionen ersten Grades hinzuschreiben vermag. Ein kurzer Bericht über diese Methode findet sich in dem Mathematischen Wörterbuch von Hoffmann-Natani, Bd. VI, pag. 273, unter „Rotation".

Hosted by Google

F. KLEIN UND A. SOMMERFELD,

ÜBER DIE

THEORIE DES KREISELS.

HEFT III.

DIE STÖRENDEN EINFLÜSSE.
ASTRONOMISCHE UND GEOPHYSIKALISCHE ANWENDUNGEN.

BG

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1903.

Hosted by Google

Anzeige von Heft III der Kreiseltheorie.

Nach längerer Pause, welche durch meinen Übergang in ein neues Lehramt bedingt wurde, folgt auf das zweite Heft der Theorie des Kreisels (erschienen 1898) nunmehr ein drittes Heft. Dasselbe bildet nicht, wie es beabsichtigt war, den Schluß des Werkes; es zeigte sich nämlich, daß sich der Stoff außerordentlich dehnte, sobald das allgemeine mathematische Schema der Theorie, gemäß dem ursprünglichen Plane des Werkes, auf die besonderen Bedingungen des Versuches oder auf die mannigfachen Fragestellungen der verschiedenen an der Kreiseltheorie interessierten Spezialwissenschaften angewandt wurde. Deshalb sind in diesem Hefte von den Anwendungen der Kreiseltheorie nur diejenigen auf Astronomie und Geophysik zur Darstellung gekommen; die technischen und physikalischen Anwendungen verbleiben für ein viertes (letztes) Heft.

Während sich der Beginn der vorliegenden Lieferung inhaltlich an die vorangehenden Kapitel anlehnt und in einem Nachtrag zu Kap. VI den auf der Horizontalebene spielenden Kreisel behandelt (durch Näherungsrechnungen mit strenger Fehlerabschätzung), geht der Inhalt des Kapitels VII wesentlich über den Kreis derjenigen Probleme hinaus, welche in der analytischen Mechanik idealer Mechanismen behandelt zu werden pflegen. Hier werden die allgemeinen Erfahrungen über die Wirkung der Reibungseinflüsse dargestellt und im Anschlusse daran die Reibung im Stützpunkte des Kreisels und deren Wirkung, das Aufrichten der Kreiselaxe, ausführlich diskutiert. Da einerseits die erfahrungsmäßigen Grundlagen für den Ansatz der Reibungsprobleme nicht sehr sicher sind, da andrerseits die mathematischen Schwierigkeiten bei der strengen Durchführung des Ansatzes sehr groß sein würden, so wird die Behandlung zum Teil auf graphischem Wege, mit Zuhilfenahme von Vernachlässigungen und Näherungsmethoden durchgeführt, wie solche bereits an früheren Stellen der Kreiseltheorie wiederholt empfohlen wurden. Die Schärfe dieser Methoden reicht völlig aus, sofern man als eigentliches Ziel im Auge behält: von den in der Wirklichkeit zu beobachtenden Erscheinungen ein klares qualitatives und ein innerhalb der Fehlergrenze der Beobachtungen genaues quantitatives Bild zu entwerfen. Neben der Reibung im Stützpunkte werden als

Hosted by Google

weitere, die ideale Kreiselbewegung entstellende Ursachen der Luftwiderstand, die Elastizität des Kreiselmaterials und der Unterlage berücksichtigt. Hierbei waren zum Teil bereits die Rücksichten auf spätere Anwendungen maßgebend, zum Teil sollten diese Untersuchungen als ein Beispiel zur Mechanik der wirklichen Erscheinungen oder, wie es hier gelegentlich ausgedrückt wird, zur irdischen Mechanik dienen (im Gegensatz zur himmlischen Mechanik, in welcher die hier behandelten Einflüsse meist nicht in Betracht kommen, oder zur reinen analytischen Mechanik, in welcher solche Einflüsse zu Gunsten der Eleganz der mathematischen Entwickelung gewöhnlich vernachlässigt werden). In einem Nachtrag zu diesem Kapitel wird sodann, unter Hinzuziehung von Beobachtungsmaterial, die Behandlung des auf der Ebene spielenden Kreisels mit Rücksicht auf die Reibung ergänzt.

Kapitel VIII behandelt in einem ersten Abschnitt die astronomischen Anwendungen der Kreiseltheorie, in einem zweiten die geophysikalischen.

In den klassischen Problemen der Präcession und der durch die Mondbewegung erzwungenen Nutation konnten füglich neue Ergebnisse nicht beigebracht werden. Der Gegenstand ist von altersher so erschöpfend behandelt worden, daß die vorliegende Darstellung lediglich darauf hinzuzielen hatte, die für den Nichtfachmann nicht immer durchsichtige Darstellungsweise der Astronomen durch ein anschaulicheres Verfahren zu ersetzen. Das Mittel hierzu bot eine Methode von Gauß zur Störungsrechnung, welche hier nach verschiedenen Richtungen ausgebaut wird.

Im Gegensatz hierzu sind die in dem geophysikalischen Abschnitt untersuchten Probleme zum Teil jüngsten Datums. Es handelt sich hier namentlich um die freien Nutationen der Erdaxe, deren Periode von Chandler festgestellt wurde, und weiter um die Erscheinung der Polschwankungen überhaupt. Sowohl in der Darstellung des objektiven Sachverhaltes wie in der Erklärung desselben dürfte die hier gebotene Behandlung entschiedene Fortschritte aufweisen. Wegen der grundlegenden Wichtigkeit der Frage wurden bei der Erklärung der vierzehnmonatlichen Chandlerschen Periode auch die erforderlichen Hilfssätze aus der Hydrodynamik und der Elastizitätstheorie aufgenommen und auf vereinfachtem Wege bewiesen. Ferner wurde zur Erklärung der jährlichen Periode der Polschwankungen die Theorie der meteorologischen Massentransporte entwickelt, wobei sich abermals die in den früheren Heften betonte Impulstheorie und die freiere, begriffliche Auffassung der dynamischen Differentialgleichungen als besonders fruchtbar erwies. Den Schluß des geophysikalischen Abschnittes bildet die

Hosted by Google

Besprechung der berühmten Foucaultschen Kreiselversuche zum Nachweis der Erdrotation. Hier kam es einerseits darauf an, unnötige mathematische Schwierigkeiten auszuschalten, welche in den älteren Darstellungen der Foucaultschen Versuche einen breiten Raum einnehmen, andererseits die störenden Einflüsse hervorzukehren und ihrer Größenordnung nach abzuschätzen.

Auf Wunsch meines hochverehrten Lehrers F. Klein habe ich schließlich darauf hinzuweisen, daß ich bei der Abfassung dieses Heftes noch in weit höherem Grade wie bei den vorangehenden Heften über den Inhalt der ursprünglichen, von Herrn Klein gehaltenen Universitätsvorlesung hinausgegangen bin. Die in Kapitel VII gegebenen Ausführungen zur Mechanik der störenden Einflüsse waren in jener Vorlesung nur in allgemeinen Umrissen postuliert worden; die hierzu erforderlichen Integrations- und Näherungsmethoden (auch in dem Nachtrag zu Kap. VI) sowie alle Einzelresultate rühren von mir allein her. Was die astronomischen Anwendungen betrifft, so erkannte Herr Klein die Vorzüge des Gaußischen Verfahrens, nach welchem er in jener Vorlesung insbesondere das Präcessionsproblem behandelte; die Anwendung desselben Verfahrens auf das Problem der Nutationen sowie alles Zahlenmäßige habe ich dagegen von mir aus hinzugefügt. Von dem Problem der Polschwankungen war in jener Vorlesung überhaupt nicht die Rede, sodaß die hier gebotenen etwaigen Fortschritte (Kap. VIII § 6—8) als mein Eigentum zu betrachten sind. Für die Auffassung der Foucaultschen Versuche waren die Grundlinien bereits von Herrn Klein vorgezeichnet.

Im übrigen betone ich gern, daß mir das fortgesetzte Interesse, welches Herr Klein an der Weiterführung des Werkes genommen hat, sowie die mancherlei Anregungen, die er mir bei Vorbesprechungen und bei der Korrektur zukommen ließ, meine eigene Arbeit wesentlich erleichtert haben. Ferner habe ich den Herren Schwarzschild und Wiechert zu danken für viele wertvolle Nachweise und Berichtigungen zu den astronomischen und geophysikalischen Gegenständen.

Möge das vorliegende Heft nicht nur dem Mathematiker und Physiker von Nutzen sein, der die Mechanik um ihrer selbst willen treibt und an der Hand des hier so eingehend ausgeführten Beispiels zu einem tieferen und lebendigeren Verständnis der Wissenschaft vordringen will, sondern möge dieses sowie das folgende Heft auch von den Vertretern der Astronomie, der Geophysik und der Technik gern zu Rate gezogen werden, so oft dieselben auf ihrem besonderen Gebiete mit der Theorie der Kreiselwirkungen in Berührung kommen!

Aachen, im Juli 1903. **A. Sommerfeld.**


Hosted by Google

Anhang zu Kapitel VI.

§ 10. Der auf der Horizontalebene spielende Kreisel.

Als Gegenstück zur Theorie des Kreisels mit festem Stützpunkte soll die Bewegung des Kreisels mit horizontal beweglichem Stützpunkte anhangsweise behandelt werden, also diejenige Bewegung, an welche Erwachsene und Kinder in erster Linie bei dem Worte „Kreiselbewegung“ denken. Wir beabsichtigen hierbei in analytischer Hinsicht lange nicht so weit zu gehen, wie bei dem vorigen Probleme, sondern werden zufrieden sein, wenn wir ein klares Bild von dem qualitativen Charakter der Bewegung entwerfen können. Dies gelingt, mit Umgehung aller analytischen Schwierigkeiten, welche sonst auftreten würden, wenn wir *mit begrenzter Genauigkeit* rechnen, wie solches im Kap. IV, § 9 empfohlen wurde. Wollen wir die Bewegung nur mit derjenigen Schärfe feststellen, wie sie etwa die mit bloßem Auge angestellte Beobachtung eines gewöhnlichen Kreisel-Spielzeugs, ohne besondere Verfeinerung der Beobachtungsmittel und ohne sorgsame Ausschaltung von Störungsursachen liefert, so können wir uns sogar mit einer recht geringen Genauigkeit begnügen. Vom mathematischen Standpunkte ist offenbar auch eine grobe Näherung logisch befriedigend, *sofern wir den bei unserer Rechnung zugelassenen Fehler abschätzen können.* Auf diesen Punkt werden wir im Folgenden besonderen Wert legen. Dagegen würde es uns, bei Zugrundelegung des soeben genannten Maßstabes für die anzustrebende Genauigkeit, wertlos scheinen, durch Heranziehung höherer analytischer Hülfsmittel den Genauigkeitsgrad der Rechnung weiter zu verfeinern.

Von der den Kreisel tragenden Ebene werden wir voraussetzen, daß sie *vollkommen glatt*, also reibungslos sei, da wir auf die Wirkung der Reibung im nächsten Kapitel zurückkommen. Der Gegendruck der Ebene, die Reaktion R derselben gegen den Kreisel, ist dann senkrecht gegen die Ebene, also vertikal gerichtet. Da der Stützpunkt O nicht mehr so sehr wie bei dem früheren Problem ein geometrisch ausgezeichneter Punkt ist, werden wir nicht diesen, sondern den mechanisch ausgezeichneten Schwerpunkt S zum Bezugspunkte im

Hosted by Google

Sinne von Kap. II, § 2 wählen. Die Verbindungslinie OS heifst wie früher die Figurenaxe, ihr Winkel gegen die Vertikale ϑ. Die Entfernung OS werde mit E, die Gesamtmasse des Kreisels mit M bezeichnet. Es werde abkürzend $P = MgE$ gesetzt, so dafs P wie früher das Moment der Schwere um die zur Figurenaxe senkrechte horizontale Axe durch O bei horizontaler Lage der Figurenaxe bedeutet. Wir nehmen, worin keine wesentliche Spezialisierung liegt, der Kürze wegen an, dafs das für den Schwerpunkt konstruierte Trägheitsellipsoid eine *Kugel* sei; der allen Axen durch S gemeinsame Wert des Trägheitsmomentes heifse A.

Als äufsere Kräfte kommen, da wir die Reibung vernachlässigen, nur die Schwere Mg und der Gegendruck R in Betracht, dessen Gröfse sich aus dem Folgenden ergeben wird. Das Potential der Schwere ist (bis auf eine willkürliche Konstante)

$$V = Mgz = P\cos\vartheta, \tag{1}$$

wo $z = E\cos\vartheta$ die vertikale Koordinate des Schwerpunktes in dem in Figur 68 angedeuteten festen Koordinatensystem ist. Dagegen liefert der Gegendruck R zur potentiellen Energie keinen Beitrag, da er keine Arbeit leistet, sondern senkrecht gegen die Bewegung seines Angriffspunktes gerichtet ist. Andrerseits liefert die Schwere in unserem Bezugspunkte S kein Drehmoment, während der Gegendruck zu einem Drehmomente Anlafs giebt, welches die „Knotenlinie“ zur Axe hat, also diejenige Linie, welche sowohl auf der Vertikalen wie auf der Figurenaxe senkrecht steht.

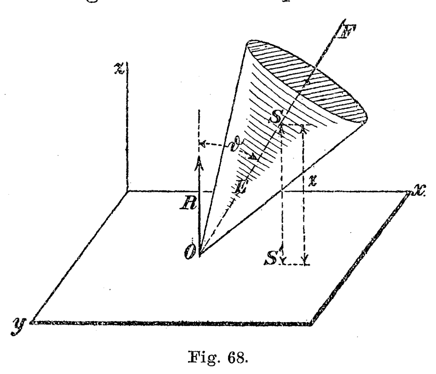


Fig. 68.

Wir fassen wie üblich die äufseren Kräfte zu einer *Einzelkraft* und einer *Drehkraft* (Kräftepaar) hinsichtlich des Bezugspunktes S zusammen. Nach dem eben Gesagten *ist die Einzelkraft beständig vertikal gerichtet und gleich* $R - Mg$. *Die Axe der Drehkraft liegt dauernd horizontal und senkrecht zur Figurenaxe; der Gröfse nach ist sie gleich dem Momente von* R *um* S.

Die wichtigsten Aufschlüsse über den Verlauf der Bewegung liefert uns hier wie überall unser Impulssatz aus Kap. II, § 5, welcher uns in anschaulicher Weise die Schwerpunkts- und Flächensätze zusammenfafst. Der Impuls zerlegt sich hier ebenfalls in zwei Bestandteile, den *Einzelimpuls* (oder Schiebestofs) und den *Drehimpuls* (oder Drehstofs).

Hosted by Google

Die Komponenten des ersteren nach den im Raume festen Koordinatenaxen x, y, z werden wie früher mit $[X], [Y], [Z]$, die Komponenten des letzteren mit l, m, n bezeichnet. Wir werden auch die Komponenten L, M, N des Drehimpulses nach einem im Kreisel festen Koordinatensystem nötig haben, dessen Anfangspunkt der Schwerpunkt und dessen Z-Axe die Figurenaxe ist.

Nach dem angezogenen Impulssatze ist nun die Änderungsgeschwindigkeit jeder Komponente des Einzelimpulses und des Drehimpulses gleich dem augenblicklichen Werte der entsprechenden Komponente der Einzelkraft und Drehkraft. Aus dem, was wir über Richtung und Axe dieser letzteren bemerkten, folgt aber, *daſs die Horizontalkomponenten des Einzelimpulses und die Vertikalkomponente des Drehimpulses während der Bewegung konstant bleiben; die äuſseren Kräfte beeinflussen nur die Vertikalkomponente des Schiebestoſses und die Horizontalkomponenten des Drehstoſses.*

In Zeichen heiſst dieses

$$[X] = \text{const.}, \quad [Y] = \text{const.}, \quad n = \text{const.} \tag{2}$$

Da nach pag. 102 $[X]$, $[Y]$ und $[Z]$ den betreffenden Schwerpunktsgeschwindigkeiten proportional sind ($[X] = Mx'$ etc.), so sagen die beiden ersten Gleichungen (2) aus, daſs die Horizontalprojektion des Schwerpunktes eine gerade Linie mit konstanter Geschwindigkeit durchläuft. Natürlich steht und fällt dieses Resultat mit der Annahme, daſs im Stützpunkt keine Reibung auftrete.

Nehmen wir den Impulssatz für die dritte Komponente des Schiebestoſses (bez. den entsprechenden Schwerpunktssatz) hinzu, so erhalten wir:

$$\frac{d[Z]}{dt} = R - Mg.$$

Diese Gleichung können wir als *Bestimmungsgleichung der Reaktionskraft* auffassen; indem wir für $[Z]$ den Wert Mz' eintragen, ergiebt sich

$$R = Mz'' + Mg. \tag{3}$$

Auſser der Gleichung $n = \text{const.}$ besteht auch hier die Gleichung

$$N = \text{const.}, \tag{4}$$

wie wir aus dem „modifizierten Impulssatze" IIb von pag. 145 schlieſsen. Nach diesem Satze ist nämlich die Änderungsgeschwindigkeit des Drehstoſses *relativ zum Körper* nach Axe und Gröſse gleich dem Drehmoment der äuſseren Kräfte vermehrt um die resultierende centrifugale Drehkraft (vgl. pag. 144). Letztere verschwindet beim Kugelkreisel schlechtweg, die Axe des ersteren steht nicht nur auf der Vertikalen,

sondern auch auf der Figurenaxe senkrecht. Infolgedessen ist die Änderungsgeschwindigkeit der Drehstoſskomponente N nach der Figurenaxe gleich Null und diese Komponente selbst konstant.

Endlich nehmen wir noch den Satz der lebendigen Kraft $T + V = h$ hinzu. T setzt sich hier aus zwei Teilen zusammen, aus der lebendigen Kraft der Drehbewegung T_1 und aus der der fortschreitenden Bewegung T_2. Die letztere drückt sich durch die Schwerpunktsgeschwindigkeiten aus und ist

$$T_2 = \frac{M}{2}(x'^2 + y'^2 + z'^2).$$

Wir führen, wie beim Kreisel mit festem Punkte, die Abkürzung

$$\cos\vartheta = u \tag{5}$$

ein und haben nach Figur 68

$$z = Eu, \quad z' = Eu'.$$

Bedenken wir noch, daſs die Geschwindigkeitskomponenten x' und y' Konstante sind, so können wir die beiden ersten Glieder von T_2 mit der Konstanten h vereinigt denken und diese Glieder unterdrücken. Wir schreiben daher einfacher

$$T_2 = \frac{ME^2}{2} u'^2.$$

Die lebendige Kraft der Drehbewegung T_1 unterscheidet sich in nichts von der lebendigen Kraft des Kreisels mit festem Stützpunkte. Der Ausdruck derselben durch die Gröſse $u = \cos\vartheta$ wurde bereits pag. 222 entwickelt. Er lautet, für den Kugelkreisel spezialisiert:

$$T_1 = \frac{A}{2}\left\{\frac{u'^2}{1-u^2} + \frac{(Nu-n)^2}{A^2(1-u^2)} + \frac{N^2}{A^2}\right\}.$$

Indem wir noch für V den Ausdruck (1) $V = Pu$ benutzen, schreiben wir die Gleichung der lebendigen Kraft folgendermaſsen:

$$\frac{A}{2}\left\{\frac{u'^2}{1-u^2} + \frac{(Nu-n)^2}{A^2(1-u^2)} + \frac{N^2}{A^2}\right\} + \frac{M}{2}E^2u'^2 + Pu = h. \tag{6}$$

Da nach (2) und (4) n und N Konstante sind, liefert uns die vorstehende Gleichung eine Beziehung zwischen u und u' bez. zwischen u und t, aus welcher die wechselnden Neigungen der Figurenaxe gegen die Vertikale als Funktion der Zeit entnommen werden können. Wir rechnen, indem wir auf gleichen Nenner bringen, zunächst u'^2 aus und erhalten $u'^2 = U$, mit Einführung der Abkürzung U

$$U = \frac{2Ah(1-u^2) - 2APu(1-u^2) + 2nNu - N^2 - n^2}{A^2 + Aa(1-u^2)}; \tag{7}$$

$a = ME^2$ bedeutet dabei das Trägheitsmoment der im Schwerpunkte



konzentriert gedachten Gesamtmasse M um eine zur Figurenaxe senkrechte Gerade durch O. Es folgt nun:

$$(8)\qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dt} = \sqrt{U} \quad \text{oder} \quad dt = \dfrac{du}{\sqrt{U}}, \\ t = \displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{U}}. \end{cases}$$

Wir wollen sogleich eine entsprechende Darstellung für den Winkel ψ geben, den die Knotenlinie des Kreisels mit einer beliebigen festen horizontalen Geraden bildet. (Den dritten Eulerschen Winkel φ werden wir im Folgenden nicht explizit nötig haben.) ψ bestimmt sich nach pag. 222 Gleichung (4) aus:

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{n - N\cos\vartheta}{A\sin^2\vartheta},$$

also wenn wir wie vorher $\cos\vartheta = u$ setzen, aus

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{n - Nu}{A(1 - u^2)}.$$

Wir integrieren, indem wir dt nach Gl. (8) durch du ausdrücken und erhalten:

$$(8')\qquad \psi = \int \frac{n - Nu}{A(1 - u^2)} \frac{du}{\sqrt{U}}.$$

Die in den Gleichungen (8) und (8′) gegebene Integraldarstellung der Bewegung, die schon von Poisson*) herrührt, vergleichen wir zunächst mit der entsprechenden Darstellung, die früher (pag. 223) für den Kreisel mit festem Punkte entwickelt wurde. Es zeigt sich dabei einerseits eine grofse Analogie der Formeln, wir bemerken aber andrerseits, dafs der Ausdruck von U jetzt etwas komplizierter ist wie früher.

Während der frühere Ausdruck U drei Nullstellen und eine Unendlichkeitsstelle besafs, hat unser jetziges U drei Nullstellen (diejenigen Werte von u, für die der Zähler verschwindet) und drei Unendlichkeitsstellen (nämlich den Wert $u = \infty$ und die Werte, für die der Nenner verschwindet).

Aus der Analogie der jetzigen und der früheren Formeln folgt unmittelbar, dafs ein Teil unserer früheren Resultate ungeändert bestehen bleibt. So können wir z. B. den Beweis für die „Periodizitätseigenschaften der Bewegung", von denen früher die Rede war, auf den vorliegenden Fall unmittelbar übertragen, indem wir die Schlüsse von Kap. IV, § 4 wörtlich wiederholen. Es ändert sich also t und ψ je um einen bestimmten Zuwachs, nämlich um eine sog. „Periode", wäh-

*) Vgl. Poisson, Traité de Mécanique II, Nr. 434 ff.

Hosted by Google

rend die Integrationsvariable u zwischen denjenigen beiden Wurzelwerten e_0 und e_1 von U hin- und hergeführt wird, die im Intervalle -1 und $+1$ liegen.

Diese Periodizität tritt besonders deutlich in der Bahnkurve hervor, die der Stützpunkt auf der tragenden Horizontalebene beschreibt und die jetzt passend an die Stelle der in Kap. IV betrachteten Bahnkurven tritt. Wir können ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit annehmen, daſs die Projektion S' des Schwerpunktes S auf die Horizontalebene festliegt, daſs also die horizontale konstante Schwerpunktsgeschwindigkeit im besonderen den Wert Null hat. (Im anderen Falle brauchten wir in der Horizontalebene nur statt eines festen ein mit der horizontalen Schwerpunktsgeschwindigkeit gleichförmig fortschreitendes Axenkreuz zu Grunde zu legen; die im folgenden zu zeichnende Figur würde dabei in Richtung dieser Geschwindigkeit in leicht ersichtlicher Weise auseinandergezogen werden.) Unter dieser Annahme wandert der Schwerpunkt auf der festen im Punkte S' errichteten Vertikalen auf und ab und die Bahnkurve zieht sich zwischen zwei konzentrischen, um den Punkt S' beschriebenen Kreisen hin und her, die den beiden Neigungen $\cos\vartheta = e_0$ und $\cos\vartheta = e_1$ der Figurenaxe entsprechen. Aus den genannten Periodizitätseigenschaften folgt dann, daſs die aufeinander folgenden Bögen der Bahnkurve zwischen den beiden Kreisen e_0 und e_1 wechselweise symmetrisch und kongruent verlaufen. Zur qualitativen Veranschaulichung der Bahnkurve können direkt die früheren Figuren aus Kap. IV, § 1 und 2 in sinngemäſser Modifikation dienen; für einen besonderen und besonders wichtigen Fall werden wir die Bahnkurve im Folgenden genauer berechnen und die soeben angedeuteten Überlegungen im Einzelnen durchführen.

Andererseits würde die verschiedene Bauart unseres U im jetzigen und früheren Falle auch manche Unterschiede in der weiteren analytischen Behandlung mit sich bringen. Man bezeichnet die Integrale in (8) und (8′), da sie um einen Grad komplizierter sind wie die früheren elliptischen Integrale, als *hyperelliptische.* Der Unterschied beider zeigt sich besonders im komplexen Gebiete, wenn wir versuchen wollten, unsere Gröſsen u und ψ als Funktionen der Zeit für alle (auch die komplexen) Werte von t darzustellen*). Es ist aber nicht unsere Absicht, auf die hierbei auftretenden Schwierigkeiten irgendwie

*) u und ψ sind im Komplexen nicht mehr eindeutige Funktionen von t, wohl aber lassen sich, wie man in der Theorie der sog. automorphen Funktionen zeigt, u, ψ und t für den ganzen komplexen Wertebereich durch eine Hülfsvariable eindeutig darstellen. Vgl. hierzu F. Klein: The mathematical theory of the Top. Princeton Lectures. New York 1897, insbes. den letzten Abschnitt.

Hosted by Google

einzugehen. Für die numerische Beherrschung der Kreiselbewegung im Reellen, die doch allein unser Zweck sein kann, würde bei dem gegenwärtigen Stande der Theorie auf diesem Wege nichts gewonnen werden. Eher würde sich hierfür ein Verfahren empfehlen, welches Weierstrafs*) in allgemeinen Zügen für alle ähnlichen Probleme entworfen hat und welches darauf abzielt, u als Funktion von t durch eine trigonometrische Reihe mit beliebiger Genauigkeit zu berechnen. Indessen können wir auch von den hierdurch bedingten, immerhin ziemlich umständlichen Rechnungen absehen, da wir uns, wie oben begründet wurde, mit einer geringen Genauigkeit begnügen werden.

Speziell werden wir uns für das Analogon der früher behandelten *pseudoregulären Präcession* interessieren, weil diese durch die gewöhnlichen Antriebsvorrichtungen in der Regel realisiert wird. Wir wollen also voraussetzen, dafs der Eigenimpuls N „sehr grofs sei". Dies soll (vgl. pag. 293) bedeuten, dafs das Quadrat von N grofs sei gegenüber der gleichbenannten Gröfse AP. Z. B. können wir voraussetzen:

$$N^2 > 100\,AP.$$

Ferner wollen wir etwa annehmen, dafs der Kreisel zu Beginn der Bewegung ($t = t_0$) keinen seitlichen Anstofs bekommen hatte, dafs also seine Anfangsbewegung aus einer reinen Rotation um die Figurenaxe bestand. Dann liegt der anfängliche Drehimpuls in Richtung der Figurenaxe und ist mit N zu bezeichnen. Ist die anfängliche Neigung der Figurenaxe gegen die Vertikale ϑ_0 und setzt man $\cos\vartheta_0 = e_0$, so wird die Projektion des Drehimpulses auf die Vertikale

$$n = Ne_0. \tag{9}$$

Ueberdies erkennt man, dafs für $t = t_0$ notwendig $u' = 0$ sein mufs. Denn die Figurenaxe ist nach Voraussetzung zu Beginn Rotationsaxe, kann also ihre Lage im Raume momentan nicht ändern. Aus $u' = 0$ folgt nach Gl. (8) $U = 0$, d. h.

$$2Ah(1 - e_0^2) - 2APe_0(1 - e_0^2) + 2nNe_0 - N^2 - n^2 = 0.$$

Hieraus entnehmen wir den für unsere Bewegung gültigen Wert von h, indem wir n nach (9) durch N ausdrücken, nämlich

$$2Ah = 2APe_0 + N^2. \tag{10}$$

Wir wollen zunächst U in seine Linearfaktoren spalten. Im Zähler von U mufs sich der Faktor $e_0 - u$ herausziehen lassen, da ja U für

*) Über eine Gattung reell periodischer Funktionen. Monatsberichte der Berliner Akademie 1866, pag. 97.


Hosted by Google

$u = e_0$ verschwindet. In der That ergiebt sich aus (7) mit Rücksicht auf (9) und (10):

$$(11) \qquad U = \frac{(e_0 - u)\,(2AP(1-u^2) - N^2(e_0 - u))}{A^2 + Aa(1-u^2)}.$$

Die weiteren Verschwindungsstellen des Zählers und Nenners mögen e_1, e_2 bez. $\pm e$ heifsen. Indem man den Nenner gleich Null setzt, findet man:

$$(12) \qquad e^2 = 1 + \frac{A}{a};$$

ferner ergiebt sich durch Nullsetzen des Zählers und Auflösung einer quadratischen Gleichung:

$$(13) \qquad \begin{cases} e_1 = \dfrac{N^2}{4AP}\left(1 - \sqrt{1 - \dfrac{8APe_0}{N^2} + \dfrac{16A^2P^2}{N^4}}\right), \\ e_2 = \dfrac{N^2}{4AP}\left(1 + \sqrt{1 - \dfrac{8APe_0}{N^2} + \dfrac{16A^2P^2}{N^4}}\right). \end{cases}$$

$|e_0|$ ist der geometrischen Bedeutung nach < 1, $|e|$ nach Gl. (12) > 1. Da wir $AP : N^2$ als kleine Zahl voraussetzen, können wir, um die Gröfsenordnung von e_1 und e_2 festzustellen, die Quadratwurzel in (13) nach dieser Gröfse entwickeln und erhalten:

$$(14) \qquad \begin{cases} e_1 = e_0 - \dfrac{2AP}{N^2}(1 - e_0{}^2) + \cdots \\ e_2 = \dfrac{N^2}{2AP} + \cdots \end{cases}$$

Es ist also e_1 wenig kleiner wie e_0, e_2 sehr grofs. Die gegenseitige Lage der fünf Stellen e_0, e_1, e_2, $\pm e$ wird durch Fig. 69 veranschaulicht.

Fig. 69.

Durch seine Linearfaktoren dargestellt, nimmt daher U die Form an:

$$(15) \qquad U = \frac{2P}{a}\,\frac{(e_0 - u)\,(u - e_1)\,(e_2 - u)}{(e^2 - u^2)};$$

der Faktor $\frac{2P}{a}$ berechnet sich daraus, dafs sich U nach der früheren Darstellung (11) für $u = \infty$ wie $-\frac{2P}{a}u$ verhalten mufs.

Betrachten wir nun das Integral (8). In diesem mufs u notwendig zwischen den Grenzen -1 und $+1$ liegen und dt reell und positiv sein. Beginnen wir also die Integration mit dem Anfangswerte $u = e_0$, so mufs u zunächst abnehmen bis e_1, dann zunehmen bis e_0 u. s. f., da einer Unterschreitung von e_1 oder einer Überschreitung

Hosted by Google

von e_0 ein imaginärer Wert von dt entsprechen würde. (Damit dt positiv ausfällt, ist es nur nötig, das unbestimmte Vorzeichen von $\sqrt{U}$ bei jeder Umkehr der Integrationsrichtung ebenfalls umzukehren.) Die Integrationsvariable u ist also auf das enge Gebiet zwischen e_0 und e_1 eingeschränkt. Wir schliefsen daraus, dafs sich der Faktor $e_2 - u$ während der Integration nur sehr wenig ändert, da sein Maximum $e_2 - e_1$ und sein Minimum $e_2 - e_0$ sowohl wegen der Gröfse von e_2 wie wegen der Kleinheit von $e_0 - e_1$ nahe zusammenfallen. Wir könnten ihn hiernach annähernd konstant setzen, etwa gleich

$$e_2 - u_0, \quad \text{wo} \quad u_0 = \frac{e_0 + e_1}{2}.$$

Nach (8) und (15) ist nun die *genaue* Zeit gegeben durch:

$$t - t_0 = \sqrt{\frac{a}{2P}} \int_{e_0}^{u} \sqrt{\frac{e^2 - u^2}{(e_0 - u)(u - e_1)(e_2 - u)}}\, du,$$

wenn t_0 den der Anfangslage $u = e_0$ entsprechenden Zeitpunkt bezeichnet. Wir führen daneben eine *angenäherte* Zeitbestimmung ein, indem wir $e_2 - u$ durch den angegebenen Näherungswert $e_2 - u_0$ ersetzen, schreiben also:

$$(16) \qquad t' - t_0 = \sqrt{\frac{a}{2P(e_2 - u_0)}} \int_{e_0}^{u} \sqrt{\frac{e^2 - u^2}{(e_0 - u)(u - e_1)}}\, du.$$

Diese beiden Zeiten stehen, wie man leicht einsieht, in der Beziehung zu einander, dafs stets

$$(17) \qquad (t' - t_0)\sqrt{\frac{e_2 - u_0}{e_2 - e_1}} < t - t_0 < (t' - t_0)\sqrt{\frac{e_2 - u_0}{e_2 - e_0}}.$$

Haben wir also den angenäherten Wert der Zeit bestimmt, so ist damit der wahre Wert innerhalb sehr enger Grenzen bekannt. Um diese Grenzen noch näher festzusetzen, schreiben wir nach (14):

$$\sqrt{\frac{e_2 - u_0}{e_2 - e_1}} = \left(1 - \frac{1}{2}\frac{u_0}{e_2} + \cdots\right)\left(1 + \frac{1}{2}\frac{e_1}{e_2} + \cdots\right) = 1 - \frac{u_0 - e_1}{2e_2} + \cdots$$
$$= 1 - \frac{e_0 - e_1}{4e_2} + \cdots = 1 - \frac{A^2P^2}{N^4}(1 - e_0^2),$$

$$\sqrt{\frac{e_2 - u_0}{e_2 - e_0}} = \left(1 - \frac{1}{2}\frac{u_0}{e_2} + \cdots\right)\left(1 + \frac{1}{2}\frac{e_0}{e_2} + \cdots\right) = 1 - \frac{u_0 - e_0}{2e_2} + \cdots$$
$$= 1 + \frac{e_0 - e_1}{4e_2} + \cdots = 1 + \frac{A^2P^2}{N^4}(1 - e_0^2).$$

Wenn z. B., wie wir pag. 519 voraussetzten, $N^2 > 100\,AP$ ist, so weichen diese Gröfsen von der Einheit um weniger als 10^{-4} nach der einen oder anderen Seite hin ab und unsere angenäherte Zeitbestimmung

Hosted by Google

unterscheidet sich von der wahren um weniger als $\frac{1}{100}\%$. Für praktische Zwecke dürfte diese Abweichung überhaupt nicht in Betracht kommen.

Durch die Einführung unserer angenäherten Zeit ist aber das Problem aus dem Gebiete der hyperelliptischen in das der elliptischen Integrale verlegt. Wir könnten auf das Integral (16) die früheren Methoden unmittelbar anwenden und *u als elliptische Funktion der angenäherten Zeit t' darstellen.* Die erforderliche Fehlerabschätzung läſst sich alsdann aus der Ungleichung (17) entnehmen. Wir wollen aber noch einen Schritt weiter gehen und die Berechnung auf elementare Funktionen zurückführen. Bemerken wir zu dem Zweck, daſs sich auch der Faktor e^2-u^2 wegen der Kleinheit des Integrationsintervalles e_0-e_1 nur wenig ändert und näherungsweise gleich

$$e^2 - u_0^2$$

gesetzt werden kann. Dementsprechend führen wir eine zweite genäherte Zeitbestimmung ein, indem wir schreiben:

$$(18) \qquad t'' - t_0 = \sqrt{\frac{a\,(e^2 - u_0^2)}{2P\,(e_2 - u_0)}} \int_{e_0}^{u} \frac{du}{\sqrt{(e_0 - u)\,(u - e_1)}}.$$

Zwischen t und t'' besteht dann die Ungleichung:

$$(19) \quad (t'' - t_0) \sqrt{\frac{e_2 - u_0}{e_2 - e_1}\,\frac{e^2 - e_0^2}{e^2 - u_0^2}} < t - t_0 < (t'' - t_0) \sqrt{\frac{e_2 - u_0}{e_2 - e_0}\,\frac{e^2 - e_1^2}{e^2 - u_0^2}}.$$

Die Grenzen, die hiernach dem wahren Zeitwerte gezogen sind, sind nicht mehr so enge wie vorher. Man berechnet nämlich nach (14):

$$\sqrt{\frac{e^2 - e_0^2}{e^2 - u_0^2}} = \left(1 - \frac{1}{2}\frac{e_0^2}{e^2} + \cdots\right)\left(1 + \frac{1}{2}\frac{u_0^2}{e^2} + \cdots\right) = 1 - \frac{e_0^2 - u_0^2}{2e^2} + \cdots$$
$$= 1 - \frac{(e_0 - e_1)\,e_0}{2e^2} + \cdots = 1 - \frac{AP}{N^2}\frac{e_0\,(1 - e_0^2)}{e^2} + \cdots$$

$$\sqrt{\frac{e^2 - e_1^2}{e^2 - u_0^2}} = \left(1 - \frac{1}{2}\frac{e_1^2}{e^2} + \cdots\right)\left(1 + \frac{1}{2}\frac{u_0^2}{e^2} + \cdots\right) = 1 + \frac{u_0^2 - e_1^2}{2e^2} + \cdots$$
$$= 1 + \frac{(e_0 - e_1)\,e_0}{2e^2} + \cdots = 1 + \frac{AP}{N^2}\frac{e_0\,(1 - e_0^2)}{e^2} + \cdots.$$

Diese Faktoren weichen also immer noch um weniger als $\frac{AP}{N^2} = 10^{-2}$ von der Einheit ab; da die in (19) auſserdem noch hinzutretenden Faktoren $\sqrt{\frac{e_2 - u_0}{e_2 - e_1}}$ und $\sqrt{\frac{e_2 - u_0}{e_2 - e_0}}$ von höherer Ordnung gleich 1 waren, so ist damit auch die Abweichung der wahren Zeit t von der angenäherten Zeit t'' festgestellt. Diese Abweichung beträgt weniger als 1% der



wahren Zeit, ist also nicht mehr so klein, wie vorher, aber für unsere Zwecke klein genug.

Das Integral (18) führt auf cyklometrische Funktionen. Der Bequemlichkeit wegen führen wir die Abkürzungen ε, v, ω ein, indem wir setzen:

$$(20)\qquad \left\{\begin{aligned} &\varepsilon = \frac{e_0 - e_1}{2} = \frac{AP}{N^2}(1 - e_0^{\,2}) + \cdots, \quad v = u - u_0, \\ &\omega = \pi \sqrt{\frac{a}{2P}\frac{e^2 - u_0^{\,2}}{e_2 - u_0}}; \end{aligned}\right.$$

dann wird

$$\int\limits_{e_0}^{u} \frac{du}{\sqrt{(e_0 - u)(u - e_1)}} = \int\limits_{\varepsilon}^{v} \frac{dv}{\sqrt{\varepsilon^2 - v^2}} = \arcsin\frac{v}{\varepsilon} - \frac{\pi}{2},$$

also

$$(21)\qquad t'' - t_0 = \frac{\omega}{\pi}\left(\arcsin\frac{v}{\varepsilon} - \frac{\pi}{2}\right).$$

ω bedeutet dabei die näherungsweise berechnete Zeit, während welcher u das Integrationsintervall von e_0 bis e_1 oder v das entsprechende Gebiet von $+\varepsilon$ bis $-\varepsilon$ einmal durchläuft. Wir nennen ω die „halbe Periode der Kreiselbewegung“. Sie ist gleich derjenigen Zeit, während welcher die Figurenaxe aus der einen äufsersten Neigung e_0 in die andere äufserste Neigung e_1 oder aus der mittleren Neigung u_0 in eben diese Neigung auf kürzestem Wege zurückkehrt. Nach der Zeit 2ω wiederholen sich die Neigungen der Figurenaxe periodisch. Der noch unbestimmt gelassene Zeitpunkt t_0 möge der Bequemlichkeit halber gleich $\frac{\omega}{2}$ genommen werden, der Nullpunkt der Zeit t'' also mit der mittleren Neigung der Figurenaxe ($v = 0$ oder $u = u_0$) zusammenfallen. Gleichung (21) geht dann über in:

$$(22)\qquad t'' = \frac{\omega}{\pi}\arcsin\frac{v}{\varepsilon}.$$

Es liegt auf der Hand, dafs wir diese Beziehung lieber „umkehren“ und in der folgenden Form schreiben werden:

$$(23)\qquad v = \varepsilon \sin\frac{\pi t''}{\omega} \quad \text{oder} \quad u = u_0 + \varepsilon \sin\frac{\pi t''}{\omega}.$$

Damit sind die wechselnden Neigungen der Figurenaxe *in expliziter Weise als Funktion der angenäherten Zeit* t'' beschrieben. Um den bei dieser Berechnung zugelassenen Fehler abzuschätzen, d. h. um den Wert von u, der zu der wahren Zeit t gehört, in Grenzen einzuschliefsen, brauchen wir nur die Ungleichung (19) in gewisser Weise ebenfalls umzukehren. Diese Ungleichung sagt uns, wieweit die wahren und

Hosted by Google

angenäherten Zeiten, die zu gleichem u gehören, höchstens von einander abweichen. Wir können sie auch so schreiben:

$$\sqrt{\frac{e_2-e_0}{e_2-u_0}\frac{e^2-u_0{}^2}{e^2-e_1{}^2}}(t-t_0)<t''-t_0<\sqrt{\frac{e_2-e_1}{e_2-u_0}\frac{e^2-u_0{}^2}{e^2-e_0{}^2}}(t-t_0).$$

Der wahre Wert von u, d. h. der Wert von u zur Zeit t, mufs hiernach gleich einem derjenigen Werte sein, welche sich nach Formel (23) für das vorstehend bezeichnete Intervall der angenäherten Zeit bestimmen. Da (von der Umgebung der Integrationsgrenzen e_0 und e_1 abgesehen) u mit wachsendem t beständig wächst oder beständig abnimmt, so können wir auch sagen: *Der wahre Wert von u ist zwischen denjenigen Werten enthalten, welche sich für die angenäherten Zeitpunkte*

$$(24)\qquad \begin{cases} t''-t_0=\sqrt{\dfrac{e_2-e_0}{e_2-u_0}\dfrac{e^2-u_0{}^2}{e^2-e_1{}^2}}(t-t_0) \quad \text{und} \\ t''-t_0=\sqrt{\dfrac{e_2-e_1}{e_2-u_0}\dfrac{e^2-u_0{}^2}{e^2-e_0{}^2}}(t-t_0) \end{cases}$$

nach Gleichung (23) *berechnen.* Die gewünschte Fehlerabschätzung ist damit geleistet.

In entsprechender Weise verfahren wir mit dem Winkel ψ in Gl. (8'). Setzen wir für n und U die Werte aus (9) und (15) ein, so ergiebt sich zunächst

$$(25)\qquad \psi=\frac{N}{A}\sqrt{\frac{a}{2P}}\int\frac{e_0-u}{1-u^2}\sqrt{\frac{e^2-u^2}{(e_0-u)(u-e_1)(e_2-u)}}\,du.$$

Wir könnten auch hier wieder ein angenähertes Azimuth ψ' einführen, welches sich durch ein elliptisches Integral berechnen läfst, indem wir den Faktor e_2-u ersetzen durch e_2-u_0. Indessen gehen wir lieber gleich einen Schritt weiter und schreiben:

$$(26)\qquad \psi''=\frac{N}{A}\frac{1}{1-u_0{}^2}\sqrt{\frac{a}{2P}\frac{e^2-u_0{}^2}{e_2-u_0}}\int\frac{(e_0-u)\,du}{\sqrt{(e_0-u)(u-e_1)}},$$

sodafs sich die weitere Rechnung im trigonometrischen Gebiete abspielt. Wir substituieren als Integrationsvariable die angenäherte Zeit t''; nach Gl. (18) und (23) haben wir

$$dt''=\sqrt{\frac{a}{2P}\frac{e^2-u_0{}^2}{e_2-u_0}}\frac{du}{\sqrt{(e_0-u)(u-e_1)}},$$

$$u=u_0+\varepsilon\sin\frac{\pi t''}{\omega},\quad e_0-u=\varepsilon\left(1-\sin\frac{\pi t''}{\omega}\right)$$

und daher

$$(27)\qquad \begin{aligned}\psi''&=\frac{N}{A}\frac{\varepsilon}{1-u_0{}^2}\int\left(1-\sin\frac{\pi t''}{\omega}\right)dt''\\ &=\frac{N}{A}\frac{\varepsilon}{1-u_0{}^2}\frac{\omega}{\pi}\left(\frac{\pi}{\omega}(t''-t_0)+\cos\frac{\pi t''}{\omega}\right).\end{aligned}$$


Hosted by Google

Die Integrationskonstante wurde hierbei so gewählt, daſs ψ'' verschwindet für $t'' = t_0 = \omega/2$. *Wiederum ist der angenäherte Wert von* ψ *als explizite Funktion der angenäherten Zeit* t'' *dargestellt.*

Zwischen dem wahren Azimuth ψ und dem genäherten ψ'' besteht, wie der Vergleich von (26) und (25) ergiebt, die Beziehung

$$(28) \qquad \frac{1 - u_0^2}{1 - e_1^2} \sqrt{\frac{e^2 - e_0^2}{e^2 - u_0^2} \frac{e_2 - u_0}{e_2 - e_1}}\, \psi'' < \psi < \frac{1 - u_0^2}{1 - e_0^2} \sqrt{\frac{e^2 - e_1^2}{e^2 - u_0^2} \frac{e_2 - u_0}{e_2 - e_0}}\, \psi''.$$

Da beide Faktoren, mit denen ψ'' multipliziert ist, wenig von 1 verschieden sind, ist hierdurch der wahre Wert von ψ mit Hülfe des angenäherten in enge Grenzen eingeschlossen.

Durch ψ und u lassen sich die übrigen auf die Kreiselbewegung bezüglichen Gröſsen darstellen. Besonders werden wir uns für die *Bahnkurve des Stützpunktes* in der tragenden Horizontalebene interessieren, weil diese bei der Bewegung in erster Linie ins Auge fällt und sich auch experimentell bequem aufzeichnen läſst (vgl. das folg. Kap. § 10). In der Horizontalebene breiten wir uns eine komplexe Variable ξ aus, sodaſs der Nullpunkt derselben mit dem Punkt S' zusammenfällt. Den wechselnden Lagen des Stützpunktes O entspricht dann eine Folge von ξ-Werten und die Bahnkurve sowie das Zeitmaſs, in dem sie von dem Stützpunkt durchlaufen wird, sind vollständig bekannt, wenn wir diese ξ-Werte als Funktion der Zeit in der Form $\xi = f(t)$ dargestellt haben.

Zunächst ist der absolute Betrag von ξ nach Fig. 68 leicht anzugeben; es ist nämlich

$$(29) \qquad |\xi| = OS' = E \sin \vartheta = E\sqrt{1 - u^2}.$$

Sodann ist der Winkel des Strahles OS' (der Projektion der Figurenaxe auf die Horizontalebene) gegen einen beliebigen festen Strahl dieser Ebene bis auf eine Konstante gleich dem Winkel ψ, den die Knotenlinie gegen eine beliebige feste horizontale Gerade bildet.

Die Gleichung der Bahnkurve schreibt sich daher in der folgenden Form:

$$(30) \qquad \xi = E\sqrt{1 - u^2}\, e^{i\psi},$$

wobei die Berechnung von u und ψ nach Gl. (23) und (27), die Fehlerbestimmung nach Ungleichung (24) und (28) zu erfolgen hat.

Wir werden den Gang der Rechnung sogleich an einem Zahlenbeispiel erläutern. Vorher wird es gut sein, um den Charakter der Bahnkurve zu veranschaulichen, weniger genau zu verfahren. Wir wollen einmal den Unterschied zwischen wahrer und genäherter Zeitbestimmung vernachlässigen und auch sonst einige Vereinfachungen eintreten lassen, die sich durch Entwicklung nach der als klein vorausgesetzten Gröſse

Hosted by Google

$$\varepsilon = \frac{AP}{N^2}(1 - e_0^2) + \cdots = \frac{AP}{N^2}(1 - u_0^2) + \cdots$$

ergeben. Wir schreiben in dem Sinne:

$$u = u_0 + \varepsilon \sin\frac{\pi t}{\omega}, \ \sqrt{1-u^2} = \sqrt{1-u_0^2}\left(1 - \frac{\varepsilon u_0}{1-u_0^2}\sin\frac{\pi t}{\omega}\right)$$
$$= \sqrt{1-u_0^2}\left(1 - \frac{APu_0}{N^2}\sin\frac{\pi t}{\omega}\right), \ \psi = \frac{P}{N}\left(t - t_0 + \frac{\omega}{\pi}\cos\frac{\pi t}{\omega}\right).$$

Hiernach wird die vereinfachte Gleichung der Bahnkurve

$$(31) \qquad \xi = E\sqrt{1-u_0^2}\left(1 - \frac{APu_0}{N^2}\sin\frac{\pi t}{\omega}\right)e^{\frac{iP}{N}\left(t - t_0 + \frac{\omega}{\pi}\cos\frac{\pi t}{\omega}\right)}.$$

Dieselbe legt folgende Deutung nahe: Im Mittel bewegt sich der Stützpunkt um den festen Punkt S' auf einem Kreise vom Radius $E\sqrt{1-u_0^2}$ mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit $\frac{P}{N}$ herum. Dieser Teil der Bewegung wird als eine reguläre *Präzession* der Figurenaxe zu bezeichnen sein. Ihr überlagert sich eine Schwankung oder *Nutation* der Figurenaxe von der Periode 2ω, vermöge deren sowohl Gröfse als Richtung des Fahrstrahls $S'O$ periodisch abgeändert wird. Zeitdauer und Betrag der Nutation sind gering, desgl. im allgemeinen die Winkelgeschwindigkeit der Präzession. *Die Bahnkurve des Stützpunktes besteht daher aus einem Kreise mit zahlreichen auf ihm aufsitzenden Zacken; sowohl wegen ihrer Kleinheit wie wegen der Schnelligkeit, mit der sie durchlaufen werden, entziehen sich die Nutationen der groben Beobachtung und die Bewegung erscheint in erster Linie als eine reguläre Präzession.* Sie hat ganz denselben Charakter wie die frühere pseudoreguläre Präzession des Kreisels mit festem Stützpunkte und stimmt mit dieser auch in der Gröfse der Präzessionsgeschwindigkeit $\frac{P}{N}$ überein.

Wir kommen nun zur genauen Durchführung eines Zahlenbeispiels. Unser Kreisel sei ein homogener Rotationskegel von der Höhe $h = 8$ cm, sein Schwerpunkt S liegt in der Entfernung $E = \frac{3}{4}h = 6$ cm von seiner Spitze O. Soll das für den Schwerpunkt konstruierte Trägheitsellipsoid eine Kugel sein, so mufs der Radius des Grundkreises r gleich der halben Höhe sein. Man findet nämlich unschwer für die Trägheitsmomente C, A_1, A um die Figurenaxe, bezw. um eine zur Figurenaxe senkrechte Axe durch O, bezw. um eine ebensolche Axe durch S:

$$C = \frac{3}{10}Mr^2, \ A_1 = \frac{3}{20}M(r^2 + 4h^2), \quad A = \frac{3}{20}M\left(r^2 + \frac{1}{4}h^2\right),$$



wo M die gesamte Masse des Kreisels ist. Durch Gleichsetzen der Werte von A und C ergiebt sich in der That

$$r = \frac{1}{2} h = 4 \text{ cm}.$$

Mithin wird

$$A = C = \frac{48}{10} M, \quad a = ME^2 = 36 M$$

und

$$\frac{A}{a} = \frac{4}{30}, \quad e^2 = 1 + \frac{A}{a} = 1{,}133.$$

Die anfängliche Rotation, welche um die Figurenaxe erfolgen sollte, möge die Umdrehungszahl 20 pro Sekunde besitzen, sodafs die Winkelgeschwindigkeit $2\pi \cdot 20$ beträgt. Es ist dann

$$N^2 = 4\pi^2 \cdot 400 \cdot A^2$$

und

$$\frac{N^2}{AP} = \frac{4\pi^2 \cdot 40 \cdot 48 M}{MgE} = \frac{4\pi^2 \cdot 40 \cdot 48}{981{,}0 \cdot 6} = 12{,}878.$$

Wir haben also dieses Verhältnis erheblich kleiner gewählt, als es vorher vorausgesetzt wurde, weil sonst die zu zeichnende Figur gar zu wenig charakteristisch ausfallen würde und die Bahnkurve von einem Kreise kaum zu unterscheiden wäre. Der Grad der Annäherung, der sich ja wesentlich durch die Gröfse dieses Verhältnisses bestimmt, wird dementsprechend im folgenden etwas weniger günstig ausfallen, wie bei der allgemeinen Betrachtung. Dies schadet indessen nichts, da uns an dieser Stelle nicht die Kleinheit des Fehlers sondern seine Abschätzung in erster Linie interessiert. In der Anfangslage (zur Zeit t_0) möge die Figurenaxe den Winkel 45^0 gegen die Vertikale bilden. Es ist dann

$$e_0 = \sqrt{\frac{1}{2}} = 0{,}707.$$

Die Gröfsen e_1 und e_2 ergeben sich durch Nullsetzen des Zählers von U, also nach (11) durch Auflösen der quadratischen Gleichung:

$$2AP(1-u^2) = N^2(e_0 - u).$$

Setzt man die angegebenen Zahlenwerte für $\frac{N^2}{AP}$ und e_0 ein, so erhält man

$$u^2 - 6{,}439\, u = -3{,}552, \quad e_1 = 0{,}609, \quad e_2 = 5{,}830.$$

Es wird daher

$$\varepsilon = \frac{e_0 - e_1}{2} = 0{,}049, \quad u_0 = \frac{e_0 + e_1}{2} = 0{,}658, \quad u_0{}^2 = 0{,}433,$$

$$\omega = \sqrt{\frac{a(e^2 - u_0{}^2)}{2P(e_2 - u_0)}}\, \pi = 6{,}38 \cdot 10^{-2} \text{ sec.}$$

Hosted by Google

und

$$\frac{N}{A}\frac{\varepsilon}{1-u_0{}^2}\frac{\omega}{\pi} = 0{,}220.$$

Wir berechnen noch die folgenden Faktoren, welche nach (24) und (28) für die Fehlerabschätzung wesentlich sind:

$$\sqrt{\frac{e_2-e_0}{e_2-u_0}\frac{e^2-u_0{}^2}{e^2-e_1{}^2}} = 1-4{,}6\cdot 10^{-2}, \quad \sqrt{\frac{e_2-e_1}{e_2-u_0}\frac{e^2-u_0{}^2}{e^2-e_0{}^2}} = 1+5{,}7\cdot 10^{-2},$$

$$\frac{1-u_0{}^2}{1-e_1{}^2}\sqrt{\frac{e^2-e_0{}^2}{e^2-u_0{}^2}\frac{e_2-u_0}{e_2-e_1}} = 1-1{,}6\cdot 10^{-1},$$

$$\frac{1-u_0{}^2}{1-e_0{}^2}\sqrt{\frac{e^2-e_1{}^2}{e^2-u_0{}^2}\frac{e_2-u_0}{e_2-e_0}} = 1+1{,}9\cdot 10^{-1}.$$

Nun bestimmen wir die Bahnkurve und zwar beispielsweise dasjenige Stück derselben, welches von der Anfangszeit $t = t_0 = \frac{\omega}{2}$ bis zur Zeit $t = t_6 = \frac{3\omega}{2}$ durchlaufen wird. Zwischen diese beiden Zeitpunkte schalten wir noch fünf äquidistante Zeiten t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 ein. Die Länge eines zwischen ihnen enthaltenen Zeitintervalles beträgt dann $\frac{\omega}{6}\cdot$ Diesen „wahren“ Zeitpunkten ordnen wir nach Gl. (24) je zwei „angenäherte“ Zeitpunkte zu.

Z. B. gehören zu t_1 die beiden Werte

$$t''-t_0 = (1-4{,}6\cdot 10^{-2})\frac{\omega}{6} \text{ und } t''-t_0 = (1+5{,}7\cdot 10^{-2})\frac{\omega}{6}\cdot$$

Bilden wir lieber das Produkt $\frac{\pi t''}{\omega}$, welches in unsern Formeln als Argument der trigonometrischen Funktionen vorkommt, und drücken dieses in Gradmafs aus, so ergiebt sich

$$\frac{\pi t''}{\omega} = \frac{\pi}{2} + (1-4{,}6\cdot 10^{-2})\frac{\pi}{6} = 90^0 + 28^0\,37'$$

bezw.

$$\frac{\pi t''}{\omega} = \frac{\pi}{2} + (1+5{,}7\cdot 10^{-2})\frac{\pi}{6} = 90^0 + 31^0\,43'.$$

Nach Gl. (23) gehören zu diesen beiden genäherten Zeiten die folgenden beiden u-Werte:

$$u = 0{,}658 + 0{,}049\cos(28^0\,37') = 0{,}701$$

bezw.

$$u = 0{,}658 + 0{,}049\cos(31^0\,43') = 0{,}699.$$

Mithin kann der wahre Wert von u zur Zeit t_1 gleichgesetzt werden

$$u = 0{,}700 \pm \vartheta\cdot 0{,}001,$$

Hosted by Google

unter ϑ (ebenso wie unten unter ϑ', ϑ'' ...) einen unbekannten echten Bruch verstanden.

Aus den Grenzen für u ergeben sich entsprechende Grenzen für die Länge des Vektors $S'O = E\sqrt{1-u^2}$. Drücken wir letztere in mm aus, so finden wir dafür die beiden äufsersten Werte 42,78 und 42,90 mm. Wir schreiben daher für $t = t_1$: $E\sqrt{1-u^2} = 42{,}84 \pm \vartheta' \cdot 0{,}06$ mm.

Es handelt sich sodann um die Richtung des Vektors $S'O$ zur Zeit t_1, also um den Winkel ψ. Wir berechnen zunächst die Näherungswerte ψ'', welche nach Gl. (27) zu den oben angegebenen Grenzwerten von t'' gehören, nämlich für

$$\frac{\pi t''}{\omega} = 90^0 + 28^0\,37', \quad \psi'' = 0{,}220\left(28^0\,37' - \frac{180^0}{\pi}\sin 28^0\,37'\right) = 15'$$

$$\frac{\pi t''}{\omega} = 90^0 + 31^0\,43', \quad \psi'' = 0{,}220\left(31^0\,43' - \frac{180^0}{\pi}\sin 31^0\,43'\right) = 21'.$$

Der erste dieser Werte entspricht der Neigung $u = 0{,}701$ der Figurenaxe; die Unsicherheit desselben folgt aus der Ungl. (28), welche besagt, dafs für den wahren Wert von ψ bei eben jener Neigung gilt:

$$(1 - 1{,}6 \cdot 10^{-1})\, 15' < \psi < (1 + 1{,}9 \cdot 10^{-1})\, 15'$$

oder

$$13' < \psi < 18'.$$

Ebenso ergiebt sich für den wahren Wert von ψ bei der Neigung $u = 0{,}699$ der Figurenaxe aus (28):

$$(1 - 1{,}6 \cdot 10^{-1})\, 21' < \psi < (1 + 1{,}9 \cdot 10^{-1})\, 21'$$

d. h.

$$18' < \psi < 25'.$$

Da zur Zeit $t = t_1$, wie wir sahen, die Gröfse u jedenfalls zwischen $u = 0{,}701$ und $0{,}609$ liegt, mufs der Winkel ψ jedenfalls zwischen 13′ und 25′ enthalten sein. Wir schreiben daher für $t = t_1$:

$$\psi = 19' \pm \vartheta'' \cdot 6'.$$

In derselben Weise sind die Gröfsen u, $E\sqrt{1-u^2}$, ψ für die Zeitpunkte $t = t_2, t_3, \ldots$ zu bestimmen. (Für den Anfangswert $t = t_0$ ergiebt sich offenbar und zwar genau $u = e_0 = 0{,}707$, $E\sqrt{1-u^2} = 42{,}43$ mm, $\psi = 0$.) Das Resultat der Rechnung enthält die Tabelle von pag. 530:

Hosted by Google

	t_0	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6
u	0,707	0,700 ± 0,001	0,682 ± 0,002	0,658 ± 0,004	0,632 ± 0,005	0,616 ± 0,003	0,609 ± 0,000
$E\sqrt{1-u^2}$	42,4	42,8 ± 0,1	44,0 ± 0,1	45,2 ± 0,2	46,4 ± 0,3	47,2 ± 0,2	47,6 ± 0,0
ψ	0	19′ ± 6′	2° 26′ ± 46′	7° 38′ ± 2° 20′	16° 21′ ± 4° 50′	28° 3′ ± 7° 58′	41° 21′ ± 11° 8′

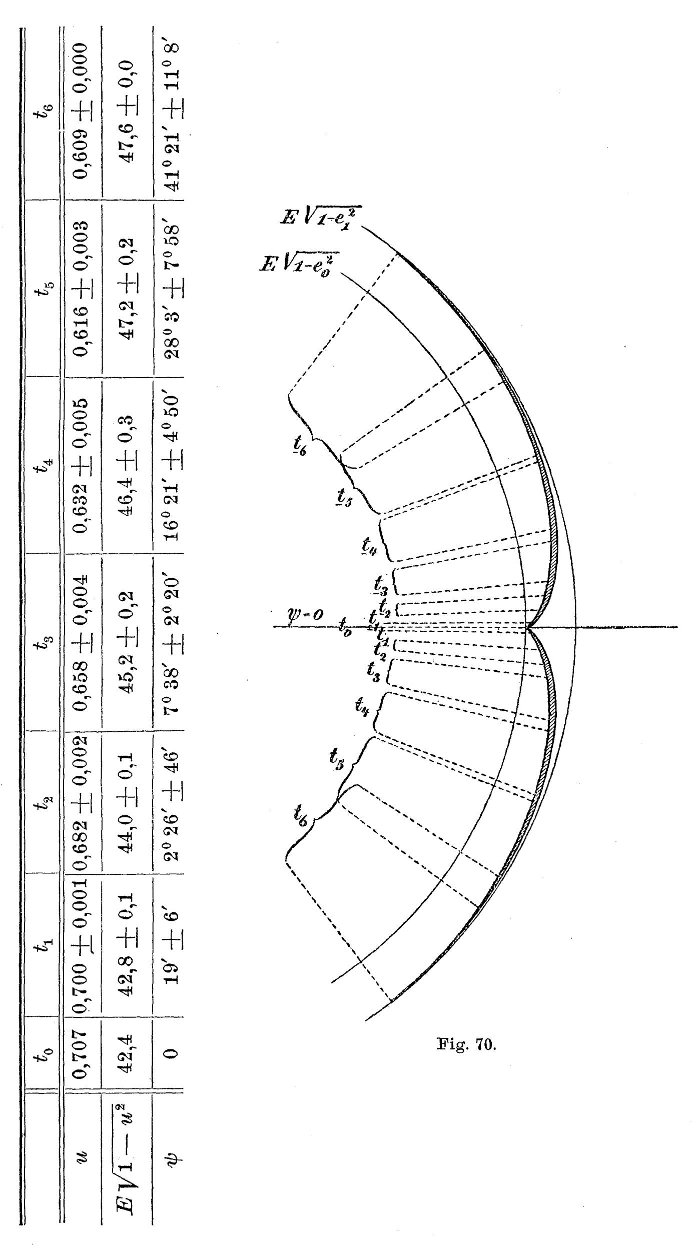


Fig. 70.

Auf Grund dieser Zahlen ist Fig. 70 gezeichnet. Sie zeigt, wie sich die Bahnkurve zwischen den beiden Begrenzungskreisen vom Radius $E\sqrt{1-e_0^2} = 42,4$ mm und $E\sqrt{1-e_1^2} = 47,6$ mm hin- und herzieht. Den gröſseren der beiden Kreise tangiert sie, auf dem kleineren sitzt sie mit Spitzen auf. Daſs wir mit begrenzter Genauigkeit rechneten,

kommt darin zum Ausdruck, dafs die Bahnkurve nicht als mathematische Linie sondern als Streifen von wechselnder Breite erscheint, ferner darin, dafs den Zeitpunkten t_i kein bestimmter Punkt der Linie, sondern ein gewisser Bereich des Streifens entspricht, der in der Figur kenntlich gemacht ist. Dieser Bereich wird um so gröfser, die Sicherheit unserer Rechnung also um so geringer, je weiter wir uns von der Anfangszeit $t = t_0$ entfernen. Die Zeitpunkte $t_{-1}, t_{-2}, \ldots$ gehen der Anfangszeit t_0 in demselben Abstande vorher, wie die Zeitpunkte $t_1, t_2, \ldots$ ihr folgen. Die Bahnkurve für $t < t_0$ ergiebt sich aus der für $t > t_0$ einfach durch Spiegelung an dem Strahle $\psi = 0$.

Man wird beim Anblick unserer Figur zugeben, dafs unsere angenäherte Berechnung hinsichtlich der *Gestalt* der Bahnkurve allen Ansprüchen genügt, die man vom naturwissenschaftlichen Standpunkte aus an die Lösung der vorliegenden Aufgabe stellen kann; hinsichtlich des *Zeitmafses*, in dem unsere Bahnkurve durchlaufen wird, kann man zweifelhaft sein, ob unsere Annäherung befriedigt, da z. B. für $t = t_{\pm 5}$ der Bereich, innerhalb dessen die Lage des Stützpunktes unsicher ist, etwas grofs wird. Indessen können wir geltend machen, dafs in dieser Hinsicht die Genauigkeit unserer Rechnung etwa parallel derjenigen Genauigkeit gehen mag, mit der sich der Ort des Stützpunktes zu einer gegebenen Zeit durch eine nicht besonders verfeinerte Beobachtungsmethode feststellen läfst.

Vor allem aber müssen wir bedenken, dafs der wirkliche Bewegungsverlauf durch die Reibung an der Unterlage, von der wir in diesem Paragraphen abgesehen haben, in hohem Grade entstellt wird. Wollten wir daher die vorangehenden Rechnungen verschärfen, ohne dabei auf die Reibung Rücksicht zu nehmen, so hiefse dieses, sich mit Kleinigkeiten aufhalten und die Hauptsache verfehlen.

Hosted by Google

Kapitel VII.

Theorie und Wirklichkeit. Einflufs der Reibung, des Luftwiderstandes, der Elastizität von Material und Unterlage auf die Kreiselbewegung.

§ 1. Der Gegensatz zwischen rationeller und physikalischer oder zwischen himmlischer und irdischer Mechanik.

Man bezeichnet seit altersher die abstrakte Mechanik, welche die Fülle der Bewegungserscheinungen durch mathematische Deduktion aus wenigen Grundsätzen abzuleiten bestrebt ist, als *rationelle* (= deduktive) Mechanik. Daneben tritt diejenige Behandlung der mechanischen Probleme, welche die Wirklichkeit in ausgiebigerer Weise mit Hinzuziehung von Erfahrungsthatsachen und Experimenten berücksichtigt, fast etwas schüchtern als *physikalische* (= induktive) Mechanik auf. Angesichts der weitgehenden Abweichungen aber zwischen den Resultaten der abstrakten Theorie und den Thatsachen der Wirklichkeit möchte man die Frage aufwerfen, ob nicht für die Mehrzahl der Anwendungsgebiete die physikalische Mechanik in Wahrheit die rationelle und die sog. rationelle in Wahrheit höchst unphysikalisch und irrationell ist.

Der Grund für die uns ständig entgegentretenden Differenzen zwischen Theorie und Wirklichkeit liegt, wie allbekannt, in dem Auftreten von Energie verzehrenden oder Energie zerstreuenden Kräften. Die abstrakte Theorie stellt sich gerne so, als ob diese Kräfte nur sekundäre Bedeutung hätten, als ob es sich dabei um Erscheinungen zweiter Ordnung handelte, welche das Gesamtbild zwar trüben aber nicht völlig entstellen können. Ein etwas krass gewähltes Beispiel möge uns lehren, wie weit diese Annahme zutrifft.

Das deutsche Infanteriegewehr Modell 88 erteilt dem Geschosse eine Anfangsgeschwindigkeit von ca. $620 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$. (Die Beobachtung dieser Geschwindigkeit geschieht etwa 25 m vor der Mündung.) Sofern wir den Luftwiderstand und die Luftreibung ignorieren wollen, die hier als Energie verzehrende Momente ins Spiel kommen, ist die Flugbahn die bekannte Parabel und die gröfste Schufsweite wird erzielt

Hosted by Google

bei einem Abgangswinkel (Elevationswinkel) von 45° gegen die Horizontale. Nach den elementaren Gesetzen der Wurfbewegung berechnet sich, wenn man mit v den gemeinsamen Wert der vertikalen und der horizontalen Anfangsgeschwindigkeit

$$v = \frac{620}{\sqrt{2}} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}$$

bezeichnet, die bei dem genannten Schusse vorkommende gröfste Erhebung H des Geschosses über den Erdboden und die Schufsweite W aus den Formeln:

$$H = \frac{v^2}{2g} = \text{ca. } 10 \text{ km}, \qquad W = \frac{2v^2}{g} = \text{ca. } 40 \text{ km}.$$

Schlägt man aber die Schiefsvorschrift für die Infanterie auf, welche das auf diesem Gebiete vorliegende reiche Beobachtungsmaterial zusammenfafst, so findet man auf Seite 17, dafs die gröfste beobachtete Schufsweite ungefähr 4 km beträgt und dafs sie einem Abgangswinkel von 32° entspricht. Die höchste Erhebung des Geschosses wird bei dieser Bahn rund $^1/_2$ km und liegt nicht, wie bei der abstrakten Wurfbewegung, in der Mitte, sondern etwas dahinter in der Entfernung 2,2 km von der Mündung.

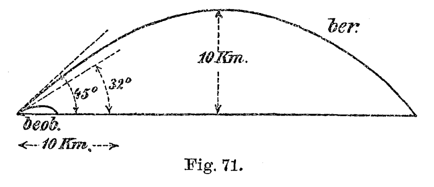


Fig. 71.

Deutlicher noch wie die angegebenen Zahlen redet die nebenstehende Figur. Sie zeigt, dafs die unter Vernachlässigung des Luftwiderstandes berechnete Bahn („ber.") auch nicht eine entfernte Annäherung an die beobachtete Bahn („beob.") giebt.

Allerdings denkt niemand daran, in den ballistischen Problemen den Luftwiderstand zu vernachlässigen. Auch kann zugegeben werden, dafs sein Einflufs bei geringeren Geschwindigkeiten nicht so stark ins Gewicht fallen wird, wie bei den gewaltigen Geschwindigkeiten der modernen Schufswaffen. Denn es ist theoretisch verständlich und durch die Beobachtung bestätigt, dafs mit wachsender Geschwindigkeit und ganz besonders in der Nähe der Schallgeschwindigkeit der Luftwiderstand rapide zunehmen mufs. Trotzdem dürfte unser Beispiel geeignet sein, uns vor einer Überschätzung der Ergebnisse der rationellen Mechanik und vor einer Unterschätzung von sog. „Nebenumständen" wie Reibung etc. zu warnen, die gegebenenfalls leicht zur Hauptsache werden können.

Die Abneigung der mathematischen Schriftsteller vor der Inangriffnahme der Reibungsprobleme macht sich schon bei dem grofsen Be-


Hosted by Google

gründer der analytischen Mechanik, bei Lagrange, geltend. Er erwähnt an keiner Stelle seines Werkes die Reibung der festen Körper auf einander. Diesem nicht nachahmenswerten Beispiele folgt auch Kirchhoff in seinen Vorlesungen über Mechanik. Und doch ist die Reibung, nächst der Schwere, wohl die wichtigste Kraft in unserem Dasein. Gewöhnlich wird sie als etwas Schädliches und Unerwünschtes angesehen. In der That rühren die Energieverluste und daher die Betriebskosten bei all unseren Maschinen, Fahrzeugen etc. zum gröſsten Teil von irgend einer Art Reibung her. Es hieſse jedoch ungerecht sein, wenn man die wohlthätigen Seiten der Reibung verkennen wollte. Nur die Reibung ermöglicht es uns, daſs wir uns auf unserer Erde nach Belieben vorwärts bewegen können, sei es durch die Kraft unserer Glieder, sei es mit Hülfe irgend eines Gefährtes. Man erinnere sich z. B., daſs im Betriebe der Straſsenbahnen, wenn durch Eisbildung der wohlthätige Einfluſs der Reibung zwischen Rad und Schiene geschwächt ist, der Wagen nicht von der Stelle kommt. Weiter aber: Die Reibung ermöglicht es mir, den Federhalter zwischen den Fingern zu halten, falls ich nur — entsprechend dem unten zu besprechenden Reibungsgesetze — die Finger mit einem genügenden Druck gegen den Halter presse. Die Reibung verhindert die Bücher, die auf meinem (doch gewiſs nicht genau horizontalen) Schreibtische liegen, der Schwere folgend zur Erde hinab zu gleiten; sie verhütet, daſs der Berg, der vor meinem Fenster liegt, zu Thale kommt und die Stadt verschüttet.

Woher rührt es nun, werden wir uns fragen, daſs trotz ihrer maſsgebenden Wichtigkeit für alle irdischen Verhältnisse die Reibung in der theoretischen Mechanik so wenig Beachtung findet? Ein Grund hierfür ist historischer Natur.

Das älteste Anwendungsgebiet der mechanischen Lehren und der älteste Zweig der mathematischen Naturwissenschaft überhaupt ist die *Astronomie.* Die Begründer und Hauptförderer der Mechanik, Galilei, Newton, Lagrange, Laplace haben wesentlich astronomische Fragen bei ihren Untersuchungen im Auge gehabt. Dadurch ist es gekommen, daſs die theoretische Mechanik ein Gewand bekommen hat, das wesentlich für astronomische Zwecke zugeschnitten erscheint. Die Himmelskörper nun bewegen sich merklich reibungslos im luftleeren Raume und können für die meisten Zwecke als einzelne Massenpunkte angesehen werden. In der Mechanik des Himmels also — aber auch nur hier — treten die Reibungserscheinungen zurück. Hier steht das Problem der n frei im Raum beweglichen Massenpunkte, die mit konservativen Kräften auf einander wirken, im Mittelpunkte des Interesses, ein Problem, welches vielfach den Hauptgegenstand der Vorlesungen und Lehrbücher

Hosted by Google

über theoretische Mechanik ausmacht, welches aber in den irdischen Geschehnissen niemals realisiert wird.

Man bezeichnet den Sachverhalt deutlicher, wenn man statt von rationeller und physikalischer Mechanik von *himmlischer* und *irdischer Mechanik* spricht. Die uns überkommene Form der theoretischen Mechanik hat ihren Ursprung und ihr eigentliches Anwendungsgebiet in der Mechanik des Himmels. Um den vielfach verworrenen und komplizierten Verhältnissen auf der Erde gerecht zu werden, muſs sie durch Erfahrungsmaterial wesentlich ergänzt werden.

Ein anderer Grund für die geringe Beachtung, welche die Reibungsprobleme bei den Theoretikern finden, ist die geringe Zuverlässigkeit der physikalischen Grundlagen der Reibungstheorie. Wir sind uns von vornherein bewuſst, daſs die üblichen Gesetze z. B. über die gleitende Reibung fester Körper auf einander, über den Luftwiderstand, über die Reibung im Innern der Flüssigkeiten oder über die innere Reibung der festen Körper nur grobe Annäherungen sind, daſs die physikalischen Umstände bei diesen Vorgängen äuſserst kompliziert sind und vielleicht überhaupt nicht in allgemeingültige Formeln gefaſst werden können. Eine naturgemäſse Berücksichtigung des Luftwiderstandes z. B. müſste von der Mitbewegung der umgebenden Luft ausgehen. Die Energieverluste, die der Luftwiderstand erzeugt, wären einerseits aus der inneren Reibung der Luft, andererseits aus der Abgabe von Bewegungsenergie an weiter entfernte Luftschichten zu berechnen. Bei sehr schnellen Bewegungen, die mit merklichen Luft-Verdichtungen und -Verdünnungen verbunden sein werden, erfolgt die Energieabgabe mit Schallgeschwindigkeit; hierbei müſste auſser der Trägheit auch die Elastizität und die Thermodynamik der Luft in Rechnung gesetzt werden. Einen Blick in die Mannigfaltigkeit der hier vorliegenden Verhältnisse gestatten uns die bekannten schönen Momentaufnahmen der durch die Geschosse erzeugten Luftwellen. Ihnen gegenüber muſs eine Formel, die den Luftwiderstand durch irgend eine Potenz der Geschwindigkeit ausdrücken will, geradezu ärmlich erscheinen. Ebenso aussichtslos wird es sein, den Schiffswiderstand angesichts des komplizierten Spieles der Wellen in der Nähe eines Dampfers in eine einfache Formel hineinzwängen zu wollen. Jedenfalls werden hier nur ausgedehnte, mit den gröſsten Mitteln durchgeführte Versuche einigen Aufschluſs liefern. Theorie und Rechnung können auf diesen Gebieten eher als Anleitung zur vernünftigen Anstellung von Experimenten wie zur Voraussage der Erscheinungen dienen. In manchen Fällen hat die Theorie Regeln (sog. Ähnlichkeitsgesetze) liefern können, um die durch Modellversuche, also durch Versuche in verkleinertem Maſsstabe ge-

Hosted by Google

fundenen Resultate auf die gröſseren Verhältnisse der wirklichen Probleme zu übertragen. Die Leistung der Theorie ist in solchen Fällen sehr wertvoll, aber doch viel bescheidener, wie z. B. bei den Problemen der Himmelsmechanik.

Die Gröſse des Widerstandes wird in den vorgenannten Beispielen auſserdem von der besonderen Form des Geschosses oder des Schiffes abhängen. Es kann durchaus sein, daſs eine kleine Abänderung der Form eine erhebliche Änderung des Widerstandsgesetzes bewirkt. Ähnliches gilt von der gleitenden Reibung. Hier kommt es auf scheinbar geringfügige Umstände weit mehr an, als man erwarten und wünschen möchte. Eine durch Abnutzung veränderte Oberfläche verhält sich anders wie eine frisch bearbeitete. Teilchen des abgeriebenen Materials oder Staubkörnchen, welche sich zwischen den Reibungsflächen befinden, können die Gröſse der Reibung beträchtlich beeinflussen; ein Feuchtigkeitsniederschlag aus der umgebenden Luft kann wie ein Schmiermittel wirken und die Reibungsgesetze nicht nur quantitativ sondern auch qualitativ gründlich verändern. Hier gilt also der für den Naturforscher höchst unbequeme und störende Satz: Kleine Ursachen, groſse Wirkungen. Vor der kritiklosen Benutzung von Reibungsziffern muſs aus diesem Grunde gewarnt werden. Ziffern, die für gewisse Versuchsumstände gefunden sind, brauchen deshalb noch nicht für andere Umstände zu gelten. Diese Ziffern auf zwei oder drei Dezimalen anzugeben, wie es in den technischen Kalendern ebensowohl wie in vielen Lehrbüchern der Experimentalphysik geschieht, hat jedenfalls keinen Wert.

Man begreift es hiernach, daſs der Laboratoriums-Physiker, der in der angenehmen Lage ist, seine Probleme frei, zum Teil nach ästhetischen Gesichtspunkten zu wählen, an den Reibungsfragen gerne vorbeigeht, weil er sich aus ihrem Studium keine reinen und allgemeinen Gesetze verspricht. Anders steht der Techniker zu den Reibungsgesetzen, die für ihn Lebensfragen sind. Deshalb rühren die neueren Beiträge zur Kenntnis der Reibungsgesetze, die wir im folgenden Paragraphen zu nennen haben werden, wesentlich von technischer Seite her.

Aus dieser Sachlage folgt aber weiter, daſs die mathematische Behandlung der Reibungsprobleme unter anderen Gesichtspunkten zu erfolgen hat, wie die der Probleme der rationellen Mechanik. Der Mathematiker strebt seiner Erziehung und Gewohnheit nach dahin, die ihm vorgelegten Probleme mit völliger Schärfe zu lösen, so daſs eine Berechnung auf beliebig viele Dezimalen theoretisch möglich wird. Diese Methode ist bei den Aufgaben der Himmelsmechanik mit Rück-

Hosted by Google

sicht auf die grofse Schärfe der astronomischen Beobachtungen in der That zweckmäfsig; bei allen Aufgaben aber, bei denen Reibungseinflüsse etc. wesentlich sind, d. h. bei allen Aufgaben der irdischen Mechanik, würde eine solche Genauigkeit der Rechnung in unschönem Mifsverhältnis stehen zu der Genauigkeit der physikalischen Grundlagen. Hier ist es vielmehr angezeigt, nicht nach quantitativer Durchrechnung, sondern nach qualitativem Verständnis der Erscheinungen zu streben, und wo man quantitativ vorgeht, von vornherein nicht mit beliebiger sondern mit begrenzter Genauigkeit zu rechnen. Und dies um so mehr, als die mit Reibungsgliedern behafteten Differentialgleichungen z. B. in der Kreiseltheorie reichlich kompliziert werden und, wie man gewöhnlich sagen würde, „sich nicht integrieren lassen“. Dem gegenüber betonen wir den Grundsatz: man *soll* solche Gleichungen nicht integrieren; man soll sie interpretieren und konstruieren, wie wir dies im Folgenden versuchen werden.

In den vorstehenden Erörterungen ist begründet, weshalb und in welchem Sinne wir die Reibungsprobleme beim Kreisel zu ausführlicherer Behandlung bringen werden, als man es bisher gethan hat. Allerdings bleiben wir hinter dem Ziel, welches man erreichen möchte, zurück, weil wir uns bei dem Fehlen ausreichender experimenteller Grundlagen auf eine schematische Behandlung der Probleme beschränken müssen.

§ 2. **Bericht über die Reibungsgesetze.**

Unsere Kenntnis der Reibungsgesetze ist bekanntlich von Coulomb begründet. Wir gehen hier etwas näher darauf ein, weil die einschlägigen Fragen in den Kreisen der Theoretiker meist wenig bekannt sind*).

Coulomb fand, dafs an der Grenze zweier auf einander gleitender fester Körper eine Kraft auftritt, welche für jeden der beiden Körper seiner Bewegung relativ gegen den anderen entgegengerichtet und proportional ist dem gesamten Normaldruck, mit dem die Körper gegeneinander geprefst werden. Der Proportionalitätsfaktor heifst *Reibungskoeffizient* (oder, genauer gesagt, Reibungskoeffizient der Bewegung). Dieser wird als Materialkonstante oder richtiger als eine

*) Zur weiteren Orientierung verweisen wir auf das gerade in Reibungsfragen sehr reichhaltige Lehrbuch von J. Perry, Applied Mechanics, New York 1898, hin, das wir für diesen und den vorigen Paragraph mehrfach benutzt haben. Einen lehrreichen Bericht über die Gesamtliteratur der Reibung verdankt man F. Masi: Le nuove vedute nelle ricerche theoriche ed experimentali sull' attrito. Bologna bei Zanichelli 1897.

Hosted by Google

sowohl für das Material wie für die Oberflächenbeschaffenheit der beiden Körper charakteristische Konstante angesehen. Von der Geschwindigkeit des Gleitens soll also die Reibung und der Reibungskoeffizient unabhängig sein, desgl. von der Gröſse der Berührungsfläche oder, was bei gleichem Gesamtdruck auf dasselbe herauskommt, von der Gröſse des spezifischen Druckes, des Druckes auf die Flächeneinheit der Berührungsfläche. In Formeln heiſst das Coulombsche Reibungsgesetz, wenn man mit μ den Reibungskoeffizienten, mit N den gesamten Normaldruck, mit W die Gröſse des Reibungswiderstandes bezeichnet:

$$W = \mu N.$$

Wir wollen diese Aussage zunächst dahin beschränken, daſs sie nur für die *trockene Reibung*, nicht für die Reibung bei Anwesenheit eines Schmiermittels gelte. Ferner haben wir an den bekannten Unterschied zwischen der Reibung der Bewegung und der der Ruhe (dynamische und statische Reibung) zu erinnern. Wir erläutern die Reibung der Ruhe folgendermaſsen:

Wenn die treibende Kraft, welche die Bewegung des Versuchskörpers gegen die Unterlage, oder die relative Bewegung beider bewirken soll, nicht ausreicht um die Reibung zu überwinden, werden wir der Reibung nur die Gröſse der treibenden Kraft selbst, der sie das Gleichgewicht hält, zuschreiben. Dies gilt solange, bis die treibende Kraft einen Grenzwert überschreitet, bei dem Bewegung eintritt und der sich wieder proportional dem Normaldrucke N erweist. Der Proportionalitätsfaktor möge mit μ_0 bezeichnet werden und heiſst *Reibungskoeffizient der Ruhe.* Das Reibungsgesetz für die Ruhe kann man daher in der Gleichung ausdrücken;

$$W \leqq \mu_0 N.$$

Der Reibungskoeffizient der Ruhe ist meist beträchtlich gröſser als der der Bewegung. Diesen Umstand sowie das Reibungsgesetz überhaupt veranschaulicht ein schönes Experiment, welches G. Herrmann*) angegeben hat und welches jeder ohne weiteres wiederholen kann.

Man lege einen Stock auf seine beiden, in gleicher Höhe ausgestreckten Zeigefinger. Darauf nähere man die Finger einander. Auf welchem Finger wird der Stock zu gleiten beginnen? Auf demjenigen, der weiter von dem Schwerpunkt des Stockes absteht; denn die Normaldrücke N_1, N_2, mit denen der Stock auf beiden Fingern aufliegt, sind nach dem Hebelgesetze für jeden Finger proportional dem Abstand des

*) Der Reibungswinkel, Festschrift zum Jubiläum der Univ. Würzburg, 1882.



Schwerpunktes von dem anderen Finger; bei dem weiter abstehenden Finger ist also der Normaldruck der kleinere; nach dem Reibungsgesetz ist hier auch die Reibung, welche dem Gleiten entgegenwirkt, kleiner wie bei dem anderen Finger; hier mufs also die Gleitung beginnen.

Der Stock gleitet nun auf diesem Finger, nicht nur bis der Abstand dieses Fingers vom Schwerpunkt des Stockes gleich dem des anderen Fingers geworden ist, sondern noch etwas länger, wegen $\mu_0 > \mu$. Erst wenn sich die Schwerpunktsabstände der beiden Finger verhalten wie $\mu : \mu_0$ tritt ein Wechsel der Bewegung ein; der Stock ruht jetzt auf demjenigen Finger, auf dem er vorher glitt und beginnt auf dem anderen zu gleiten. Denn die Normaldrücke N auf beiden Fingern verhalten sich umgekehrt wie die Schwerpunktsabstände, also in dem genannten Augenblicke wie $\mu_0 : \mu$; die Reibung der Bewegung an dem einen Finger wird dann gleich der Reibung der Ruhe an dem anderen und, wenn das Gleiten in dem bisherigen Sinne andauern würde, sogar gröfser als diese, was offenbar widersinnig ist. Dieses Spiel wird sich fortgesetzt wiederholen, wobei der Schwerpunktsabstand desjenigen Fingers, auf dem der Stock gleitet, sich jedesmal bis zum $\frac{\mu}{\mu_0}$ten Teile des Schwerpunktsabstandes des anderen Fingers vermindert. Das Resultat ist, dafs die Schwerpunktsabstände beider Finger sich wechselweise verkleinern und dafs, wenn die Finger zusammengebracht sind, der Stock von ihnen in seinem Schwerpunkte unterstützt wird, also frei schwebt!

Aufser der Veranschaulichung der Reibungsgesetze gestattet das Experiment eine Messung des Verhältnisses $\mu_0 : \mu$. Es genügt hierzu, einige Umkehrpunkte der Bewegung auf dem Stocke zu markieren und ihre Abstände von dem Schwerpunkt zu messen. Das Verhältnis der Abstände zweier auf einander folgender Umkehrpunkte liefert das gesuchte Verhältnis der Reibungskoeffizienten. Die Gesamtheit der Umkehrpunkte bildet auf beiden Seiten die Punktfolge einer geometrischen Reihe. Wenn der Stock nicht zu kurz ist, wird die Messung verhältnismäfsig genau.

Die Verschiedenheit der Werte von μ_0 und μ legt die Vermutung nahe, dafs ein stetiger Übergang zwischen dem zur Gleitgeschwindigkeit Null gehörigen Werte μ_0 und dem zu merklich gröfseren Geschwindigkeiten gehörigen Werte μ stattfinden möge. Diese Vermutung wird durch Versuche von Jenkin und Ewing*) bestätigt. Bei Materialien

*) London Philos. Transactions Bd. 167 (1877), S. 509.

mit erheblich verschiedenen Reibungskoeffizienten μ_0 und μ konnte der stetige Übergang in der That nachgewiesen werden.

Wenn wir also mit Coulomb die Unabhängigkeit des Reibungskoeffizienten von der Geschwindigkeit behaupten wollen, müssen wir hierbei zunächst das Gebiet sehr geringer Geschwindigkeiten ausschlieſsen. Wie bewährt sich nun diese Unabhängigkeit bei gröſseren Geschwindigkeiten?

Die alten Versuche des General Morin, die in den Jahren 1831—1833 in Metz angestellt wurden und die ein Geschwindigkeitsintervall bis $4 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ umfassen, schienen die Unabhängigkeit zu bestätigen. Die Morinschen Versuchsergebnisse bilden noch heute den eisernen Bestand der Zahlenangaben über Reibungskoeffizienten in den technischen Handbüchern und den Lehrbüchern der Experimentalphysik. Eine groſse Zuverlässigkeit wird ihnen aber kaum zugeschrieben werden können, schon deshalb nicht, weil nach dem im vorigen Paragraph Gesagten solche Zahlenangaben in hohem Maſse von den Nebenumständen des Experimentes abhängen.

Das Verhalten des Reibungskoeffizienten bei höherer Gleitgeschwindigkeit blieb jedenfalls eine offene Frage, die erst durch die Entwickelung des Eisenbahnwesens und der Bremsvorrichtungen aktuell wurde. Zwischen Bremsklotz und Radreifen haben wir eine richtige gleitende Reibung ohne Schmiermittel, während die Reibung zwischen Rad und Schiene, wenigstens beabsichtigtermaſsen und in der Regel, rollende Reibung ist und nur in dem Ausnahmefalle gleitende Reibung wird, wo die Räder auf den Schienen schleifen. Über die Reibung zwischen Bremsklotz und Rad liegen vor allem Versuche von *Douglas Galton**) vor, welche im gröſsten Maſsstabe mit Unterstützung der Firma Westinghouse auf verschiedenen englischen Linien ausgeführt wurden. Ein Versuchswagen von Galton enthielt eine ganze Reihe von Tachometern und Dynamometern. Die Tachometer lieferten die Umfangsgeschwindigkeit der Räder und die Fortbewegungsgeschwindigkeit des Wagens. Die Gleitgeschwindigkeit zwischen Rad und Bremsklotz ist gleich der ersten dieser Geschwindigkeit, die eventuelle Gleitgeschwindigkeit zwischen Rad und Schiene gleich der Differenz beider. Die Dynamometer maſsen 1) den Bremsdruck, mit dem der Bremsklotz an das Rad gepreſst wird, also diejenige Kraft, die für die Reibung zwischen Bremse und Rad als Normaldruck N wirkt; 2) den Reibungswiderstand W

*) Institution of Mechanical Engineers Proceedings 1878, 1879, s. insbes. 1879, S. 172 oder Engineering 1879, S. 371 oder Reports of the British Association (Dublin) 1878.

zwischen Bremse und Rad; 3) den Widerstand gegen die Vorwärtsbewegung des Zuges pro Achse, der sich aus Luftwiderstand, rollender Reibung an den Schienen u. s. w. zusammensetzt, der aber, wenn ein Gleiten auf den Schienen Platz greift, im wesentlichen den Reibungswiderstand W' dieses Gleitens darstellt. Alle diese Tacho- und Dynamometer arbeiteten selbstregistrierend und lieferten somit die fraglichen Geschwindigkeiten und Kräfte in ihrer zeitlichen Veränderlichkeit. Auf die sehr interessanten Diagramme dieser Gröfsen, die so erhalten wurden, kann hier nur hingewiesen werden. Wir müssen uns auf die aus ihnen zu ziehenden Folgerungen betr. die Veränderlichkeit des Reibungskoeffizienten beschränken. Der Koeffizient der Reibung zwischen Bremsklotz und Rad ergiebt sich durch Division aus den gemessenen Kräften W und N, während der Koeffizient der Reibung zwischen Rad und Schiene aus der ebenfalls gemessenen Reibung W' und dem auf das einzelne Rad entfallenden Teil des Wagengewichtes G folgt.

Natürlich zeigten die zu gleichen Gleitgeschwindigkeiten bei verschiedenen Versuchen gehörenden Reibungskoeffizienten unter sich keine sehr weitgehende Übereinstimmung; ihre Gröfse hing sowohl vom Wetter und der dadurch bedingten Feuchtigkeit der gleitenden Oberflächen, wie von deren Reinheit, wie auch namentlich von der Bremsdauer ab, durch welche offenbar eine Steigerung der Temperatur und damit eine Änderung der Oberflächenbeschaffenheit bewirkt wird. Z. B. kam es vor, dafs nachdem der Bremsdruck 20 Sekunden gewirkt hatte, der Reibungskoeffizient auf die Hälfte seines ursprünglichen Wertes zurückgegangen war. Trotzdem zeigt das Mittel der erhaltenen Reibungskoeffizienten aus sehr vielen (bis 100) Versuchen eine deutliche Gesetzmäfsigkeit, nämlich *eine beständige Abnahme des Reibungskoeffizienten mit wachsender Geschwindigkeit.* Fig. 72 giebt den Koeffizienten der Reibung zwischen Bremsklotz und Rad (Bremsklotz aus Gufseisen, Radreifen aus Stahl), und zwar in der ausgezogenen Linie den Mittelwert der Beobachtungen, in den punktierten die bei jeder Geschwindigkeit beobachteten Gröfst- und Kleinstwerte. Der ganze Streifen zwischen diesen Grenzlinien ist mit Beobachtungspunkten erfüllt zu denken, die sich nach der mittleren Linie hin verdichten. Man erkennt zunächst wieder den Unterschied zwischen dem Reibungskoeffizienten der Ruhe und dem bei beträchtlicher Bewegung. Weiter aber zeigt die Figur, dafs der Reibungskoeffizient bei der Geschwindigkeit 60 km/Stunde

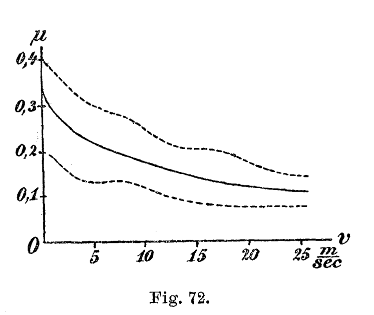


Fig. 72.

= 16,7 m/sec. = mittlerer Schnellzugsgeschwindigkeit weniger als die Hälfte, bei 90 km/Stunde = 25 m/sec. = höchster zur Zeit in Deutschland zulässiger Fahrgeschwindigkeit nurmehr etwa ein Drittel des Reibungskoeffizienten der Ruhe (0,33) beträgt. Natürlich lieſse sich die Abhängigkeit zwischen μ und v unschwer auch durch eine oder die andere Formel ausdrücken. Wir sehen hiervon sowie von der Angabe von Zahlenwerten ab, weil die Figur alles wiedergiebt, was ihrem Genauigkeitsgrade nach aus den Beobachtungen zu schlieſsen ist und weil jede zur Darstellung der Beobachtungen benützte Formel in hohem Maſse willkürlich wäre. — Über den Koeffizienten der gleitenden Reibung zwischen Rad und Schiene geben die Galtonschen Versuche einen minder sicheren Aufschluſs; soviel ist jedoch aus ihnen zweifellos zu erkennen, daſs auch dieser Koeffizient mit wachsender Geschwindigkeit von seinem Gröſstwerte bei kleiner Geschwindigkeit kontinuierlich abnimmt.

Ältere französische sowie neuere in Deutschland angestellte Versuche*) lieferten im wesentlichen das gleiche Ergebnis.

Übrigens aber ist zu beachten, daſs die Galton'schen Versuche sich auf ein sehr ausgedehntes Geschwindigkeitsintervall beziehen. Bei mäſsig veränderlicher Geschwindigkeit ist auch die Veränderlichkeit des Reibungskoeffizienten nur gering; man hat z. B. für $v = 2$ bis 6 m/sec. nach der Kurve der Galtonschen Mittelwerte etwa $\mu = 0{,}27$ bis 0,23. Diese Unterschiede sind angesichts der allgemeinen Unsicherheit der Reibungsziffern unbedenklich zu vernachlässigen. Die Coulombsche Annahme eines von der Geschwindigkeit unabhängigen Reibungskoeffizienten wird hierdurch für ein *mäſsiges* Geschwindigkeitsintervall in erster Annäherung bestätigt. Bei unserer Anwendung auf den Kreisel, bei dem Geschwindigkeiten von der Ordnung der Schnellzugsgeschwindigkeiten nicht in Betracht kommen, werden wir hiernach den Reibungskoeffizienten mit Coulomb konstant setzen dürfen.

Auch die in dem Coulombschen Gesetz ausgesprochene Unabhängigkeit des Reibungskoeffizienten von der Gröſse der Berührungsfläche bedarf der experimentellen Nachprüfung. Hiernach müſste bei der Bewegung eines Prismas von 10 cm² Grundfläche und 4 cm Höhe auf einer ebenen Unterlage dieselbe Reibung zu überwinden sein, wie bei der Bewegung eines Prismas von 20 cm² Grundfläche und 2 cm Höhe, weil, gleiches Material vorausgesetzt, der Gesamtnormaldruck gegen die Unterlage, nämlich das Gewicht des Prismas, beidemal gleich

*) Vgl. Organ der Fortschr. des Eisenbahnwesens 1889, S. 114. Der Bremsklotz bestand hierbei aus Stahlguſs. Die Versuche wurden nicht auf der Strecke, sondern in einer Werkstatt angestellt.

Hosted by Google

ist, während sich die Normaldrücke pro Flächeneinheit in beiden Fällen wie 2 : 1 verhalten. Es scheint*), daſs sich diese Folgerung in der Erfahrung gut bestätigt, sofern nicht durch sehr starke spezifische Pressungen merkliche Deformationen der Unterlage hervorgerufen werden. —

Bekanntlich ist auch der Vorgang des Abrollens zweier Oberflächen aufeinander, der sich (scheinbar) ohne Gleitung vollzieht, wenn auch in geringerem Grade mit Energieverlusten verbunden. Das Gesetz der *rollenden Reibung*, welches man üblicher Weise bei der Berechnung dieser Energieverluste zu Grunde legt, wurde ebenfalls von *Coulomb* aufgestellt. Hierbei ist es zweckmäſsig, nicht von einer *reibenden Einzelkraft*, wie bei der Gleitung zu sprechen, sondern von einem Reibungsmomente, welches von dem zur Abrollung aufgewandten Drehmoment in jedem Augenblicke zu überwinden ist. Bezeichnet wiederum N den gesamten Normaldruck an der Berührungsstelle zwischen der Unterlage und der „Rolle“, M das Reibungsmoment, so setzt man

$$M = \nu N.$$

ν heiſst dabei *Koeffizient der rollenden Reibung;* wie die Gleichung zeigt, ist er keine reine Zahl wie der Koeffizient der gleitenden Reibung, sondern von der Dimension einer Länge. Auch dieser Koeffizient wird als Material- bezw. als Oberflächenkonstante angesehen. Will man M durch eine in der Oberfläche thätige reibende Einzelkraft W ersetzen, so hat man die letztere gleich M/r zu setzen, wenn r den Radius der Rolle oder bei nicht kreisförmigem Umriſs derselben den Krümmungsradius an der betr. Stelle der Umriſslinie bedeutet; diese Einzelkraft W ist also dem Normaldruck direkt und dem Radius umgekehrt proportional.

Über den Mechanismus der rollenden Reibung giebt eine schöne Arbeit von O. Reynolds**) einigen Aufschluſs. Reynolds weist nach, daſs mit der Abrollung infolge elastischer Deformationen stets eine gewisse Gleitung verbunden ist.

Nimmt man zur Vereinfachung der Anschauung an, daſs die Unterlage wesentlich weicher ist, wie die Rolle (Unterlage aus Kautschuck, Rolle aus Eisen), so kann man von der Deformation der Rolle absehen und hat nur die der Unterlage zu betrachten. Letztere wird aus einer muldenförmigen Einsenkung bestehen, so zwar daſs in der Mitte der Einsenkung die Unterlage gedehnt, nach den Seiten hin aufgestaucht

*) Perry l. c. pag. 67.

**) On rolling Friction, London Philos. Transactions Vol. 166, Part I (1876) und Ges. Werke Bd. I, S. 110.

Hosted by Google

und zusammengepreſst ist. Die Berührung findet alsdann nicht mehr in einem geometrischen Punkt statt, sondern in der Oberfläche der Mulde, deren Mittelpunkt wir als mittleren Berührungspunkt (P) bezeichnen. In der beistehenden Figur sind eine Anzahl von Punkten auf Rolle und Unterlage markiert. Die Punkte auf der Rolle sind äquidistant, die auf der Unterlage waren es vor der Deformation, sie zeigen also in ihren wechselnden Abständen schematisch den Sinn der eingetretenen Formänderung an. Die mit gleichen Ziffern versehenen Punkte sind bei fortschreitendem Abrollungsprozeſs bestimmt, als mittlere Berührungspunkte der Reihe nach mit einander zusammenzufallen, was durch die mit dem Fortschreiten der Rolle verbundene Dehnung der Unterlage an der mittleren Berührungsstelle ermöglicht wird. In dem augenblicklichen Stadium fallen diese Punkte aber nicht zusammen. Es muſs daher beispielsweise der Punkt 4 von dem augenblicklichen Stadium bis zu demjenigen, wo er zum mittleren Berührungspunkte geworden ist, um dasjenige Stückchen auf dem Rollenumfange entlang gleiten, um welches die beiden Punkte 4 in der Figur abstehen. Das gleiche gilt für jeden Punkt der Berührungsfläche. In dieser findet also in der That eine gewisse gleitende Reibung statt.

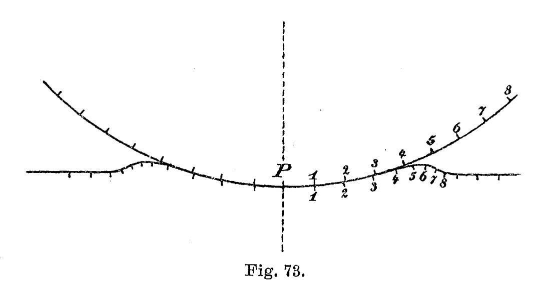


Fig. 73.

Der gesamte Energieverlust der rollenden Reibung wird sich zum Teil aus dem mit dieser gleitenden Reibung verbundenen Energieverlust, zum Teil aus der zur elastischen Deformation erforderlichen Arbeit zusammensetzen, insoweit nämlich die letztere in nicht umkehrbarer Form auftritt.

Daſs die in Fig. 73 dargelegte Vorstellung zutreffend ist, konnte Reynolds folgendermaſsen experimentell nachweisen. Man bemerkt, daſs unter den oben vorausgesetzten Verhältnissen die Rolle ihren Umfang nicht auf der natürlichen Oberfläche der Unterlage, sondern auf der bei P gedehnten abwickelt. Miſst man den Weg, den die Rolle nach einer Umdrehung zurückgelegt hat, auf der in ihre natürlichen Längenverhältnisse zurückgekehrten Unterlage, so wird sich derselbe etwas kürzer ergeben müssen als der Umfang der Rolle. Dies hat Reynolds in der That experimentell nachgewiesen für den Fall, daſs die Rolle härter ist wie die Unterlage. Das umgekehrte muſs stattfinden und findet nach Reynolds statt, wenn die Unterlage erheblich härter ist

Hosted by Google

als die Rolle. Sind beide aus gleichem Material, so ist der auf der Unterlage gemessene Weg wieder etwas kürzer wie der Umfang der Rolle, wovon die obige Überlegung bei näherem Eingehen ebenfalls Rechenschaft ablegen würde.

Bis zur genauen Messung der Gröfse des Reibungswiderstandes und zur Nachprüfung des Coulombschen Ansatzes ist die Reynolds'sche Untersuchung nicht durchgeführt. Dafs dieser einfache Ansatz der Wirklichkeit sehr genau entspricht, ist bei der komplizierten Natur des Vorganges nicht gerade wahrscheinlich. —

Neben der gleitenden und rollenden Reibung spricht man drittens noch von der *bohrenden Reibung*, und zwar da, wo sich auf einem Körper ein anderer um die Normale im Berührungspunkte beider dreht. Da in diesem Falle die Berührung als punktförmig und der Berührungspunkt als Punkt der Drehaxe vorausgesetzt wird, findet theoretisch ein Gleiten beider Körper gegeneinander nicht statt. Dieser Umstand hat zur Einführung der besonderen Bezeichnung „bohrende Reibung“ Veranlassung gegeben. Indessen führt sich der Vorgang sofort auf den der gleitenden Reibung zurück, wenn man nur eine etwas ausgedehnte Berührung der Körper annimmt. Man kann dann von einem mittleren Radius a der Berührungsfläche sprechen und wird die rings um die Drehaxe verteilten Kräfte der gleitenden Reibung auf diesen mittleren Abstand a reduzieren dürfen. Sie setzen sich offenbar zu einem Drehmoment um die Normale zur Berührungsfläche zusammen, dessen Gröfse sich aus dem Gesetz der gleitenden Reibung berechnet zu

$$M = \mu' N, \quad \mu' = \mu a.$$

Der Proportionalitätsfaktor μ' kann als *Koeffizient der bohrenden Reibung* bezeichnet werden, er hat die Dimension einer Länge und hängt aufser von dem Material und der Oberflächenbeschaffenheit auch von der Ausdehnung der Berührungsfläche ab. Natürlich soll durch die Gleichung $\mu' = \mu a$ nicht behauptet werden, dafs sich der Koeffizient der bohrenden Reibung aus dem der gleitenden Reibung vorausbestimmen liefse, wenn man die Gröfse der Berührungsfläche messen könnte. Vielmehr soll diese Gleichung nur einen Anhalt für die Bedeutung des Koeffizienten μ' und für das ungefähre Gröfsenverhältnis der bohrenden und gleitenden Reibung liefern, einen Anhalt, der uns im nächsten Paragraph von Nutzen sein wird.

Ausdrücklich haben wir uns in diesem Bericht auf die *trockene Reibung* beschränkt, trotzdem ja die Reibung unter Anwendung von *Schmiermitteln* für die Praxis das weit überwiegende Interesse hat. Man ist heutzutage zu der Einsicht gekommen, dafs die letztere ganz anderen Gesetzen gehorcht, dafs sie nämlich auf den Gesetzen der inneren

Hosted by Google

Reibung zäher Flüssigkeiten beruht, während die ältere technische Litteratur sie nach dem Coulombschen Schema der trockenen Reibung behandelt. Wir können heute (mit Petroff und Reynolds) von einer *hydrodynamischen Theorie der Schmierung* sprechen, einer Theorie, die durch rationell angestellte Versuche soweit bestätigt wird, als man es nach der Schwierigkeit des Gegenstandes erwarten kann*). Das wirkliche physikalische Verständnis der Schmiermittelreibung ist auf diesem Wege wesentlich gefördert. Wird es möglich sein, so möchten wir zum Schluſs fragen, auch die trockene Reibung unserem physikalischen Verständnis näher zu bringen, indem wir die zwischen den reibenden Oberflächen verbleibende Luftschicht als eine Art Schmiermittel auffassen und auf sie die Reibungsgesetze der kinetischen Gastheorie anwenden? und ferner: Wieweit ist mit Reibung stets auch Abreibung der Oberflächen verbunden?

§ 3. Qualitatives über die gleitende und bohrende Reibung beim Kreisel.

Um den Einfluſs der Reibung beim Kreisel mit festem Stützpunkte zu studieren, haben wir zunächst zuzusehen, unter welchen Umständen hier die Reibung zustande kommt. Das Bild, welches wir uns von diesen Umständen machen werden, ist freilich ein sehr schematisches und idealisiertes und dürfte von Fall zu Fall je nach den besonderen Verhältnissen der jedesmaligen Vorrichtung erheblich von der Wirklichkeit abweichen.

Betrachten wir z. B. die beiden Apparate, welche pag. 1 und 2 abgebildet sind. Wenn wir von der Reibung ganz absehen dürften, würde die Bewegung beider Apparate, sofern wir bei Nr. 2 die Masse der Ringe gegenüber der Masse des inneren Schwungkörpers vernachlässigen, nach genau denselben Gesetzen erfolgen. In Hinsicht auf die Reibung aber verhalten sie sich ganz verschieden.

Bei dem Apparat von pag. 2 treten Reibungskräfte in den Punkten der drei Lager auf, welche die Axe des äuſseren, des inneren Ringes und des Schwungrades tragen. Wir haben es hier im Sinne des vorigen Paragraphen mit Flüssigkeitsreibung zu thun, wenn die Lager hinreichend geschmiert sind. Jedenfalls wird die Reibungswirkung in einem Drehmomente bestehen, welches um jede der drei Axen der augenblicklichen Rotation entgegenarbeitet. Da die Bewegung um jene drei Axen gerade

*) Vgl. hierzu den oben zit. Bericht von Masi. Wir verweisen ferner auf die durch Berücksichtigung aller einschlägigen technischen Gesichtspunkte ausgezeichneten Versuche von R. Stribeck: Die wesentlichen Eigenschaften der Gleit- und Rollenlager. Ztschr. des Vereins deutscher Ingenieure 1902, Nr. 36, 38 und 39.

Hosted by Google

durch die Eulerschen Winkel ψ, ϑ, φ gegeben wird, so würde in den Lagrangeschen Gleichungen für diese Winkel je ein Zusatzglied auftreten, welches das Reibungsmoment für die fragliche Axe bedeutet.

Wir gedenken darauf nicht weiter einzugehen, sondern beschränken uns auf das Modell von pag. 1. Hier müssen wir zunächst die Gestalt des unteren Endes der Figurenaxe und die Gestalt der Pfanne, welche jene trägt, ins Auge fassen. Wir wollen annehmen, die Figurenaxe sei unten *kugelförmig* abgerundet und die Pfannenoberfläche sei ein *Kreiskegel;* die Oberflächen seien trocken und nicht elastisch nachgiebig.

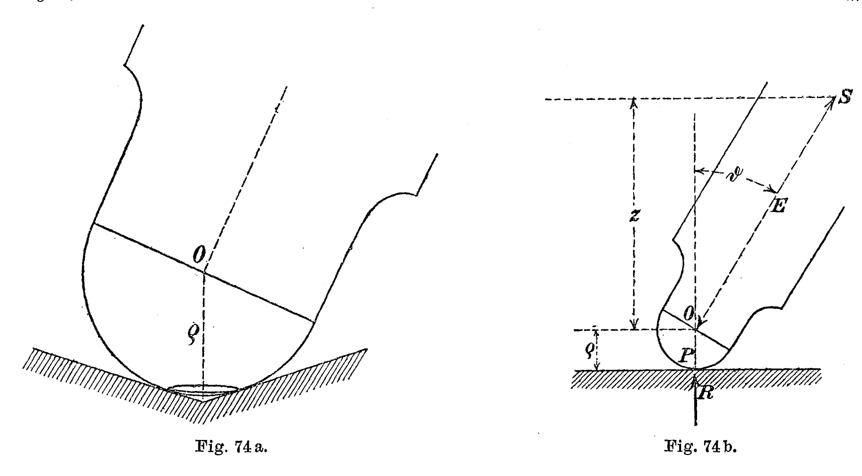


Fig. 74 a. Fig. 74 b.

Die Berührung zwischen Kugel und Kegel findet dann allemal in einem festen horizontalen Kreise statt. Die Kugel verschiebt sich bei allen Bewegungen der Figurenaxe in sich. Ihr Mittelpunkt bleibt also im Raume genau fest. *In diesem Mittelpunkte haben wir den als ruhend vorausgesetzten Punkt O des Kreisels vor uns.*

In dem Modell von pag. 1 ist der Kegel, der die Pfanne begrenzt, sehr flach; für die theoretische Berechnung der Reibung wird es bequem ja sogar unumgänglich sein, ihn als absolut flach vorauszusetzen, also den Kegel in eine Ebene ausarten zu lassen. Der kleine Kreis, in dem die Kugel den flachen Kegel berühren würde, schrumpft dann in einen *Punkt* zusammen, der stets genau senkrecht unter dem Kugelmittelpunkt liegt. Der Begriff „Stützpunkt“ zerlegt sich so in zwei Begriffe: *Fester Punkt O = Mittelpunkt der Kugel* und *Berührungspunkt P = Grenze des eben genannten kleinen Berührungskreises.*

Freilich dürfen wir uns nicht verhehlen, daſs wir uns auf diese Weise von den wirklichen Bedingungen unseres Problemes entscheidend entfernen, daſs wir *nach* dem Grenzübergange nicht mehr den Kreisel mit festem Punkte sondern genau genommen den auf der Unterlage

Hosted by Google

frei beweglichen Kreisel vor uns haben und daſs die Befestigung des Punktes O in dem Maſse in Fortfall kommt, als wir den Kegel flacher werden lassen. Es geht hier wie so oft in den Anwendungen, daſs ein Grenzübergang mathematisch bequem aber physikalisch widersinnig ist (man denke an den Übergang von molekularen zu unendlich kleinen Dimensionen in der gesamten theoretischen Physik) und daſs man nach den Bedingungen der Aufgabe nur *bis in die Nähe der Grenze*, nicht *bis zur Grenze selbst* gehen dürfte. In allen solchen Fällen wird die stillschweigende Voraussetzung gemacht, daſs die mathematische Behandlung des Grenzfalles nicht wesentlich von dem Falle der Wirklichkeit abweicht, eine Voraussetzung, die durch die Resultate der Behandlung in der Regel bestätigt wird. Die entsprechende Voraussetzung wollen wir hier ausdrücklich hervorheben: Wir nehmen an, daſs seitliche Bewegungen des Punktes O durch geeignete mechanische Vorrichtungen an der Unterlage ausgeschlossen werden, daſs wir aber im Übrigen die Reibungswirkung ohne erheblichen Fehler so berechnen dürfen, als ob die Unterlage eine Ebene wäre.

Der Übergang von dem ursprünglichen Berührungs*kreise* zu dem nunmehrigen Berührungs*punkte* ist deshalb geboten, weil wir sonst in endlose Weiterungen betr. die elastischen Deformationen an der Berührungsstelle verfallen würden. Wollten wir nämlich mit dem Berührungs*kreise* operieren, so müſsten wir, um die Reibung bestimmen zu können, zunächst feststellen, wie sich der Gegendruck der Pfanne auf den Kreisel über den Umfang des Berührungskreises verteilt. Dies ist aber eine der vielen und wichtigen Fragen, die vom Standpunkte der Mechanik starrer Körper unbestimmt bleiben und zu deren Beantwortung die Elastizitätstheorie herangezogen werden müſste. Allgemein lassen sich bekanntlich, wo es sich um die Lagerung eines Körpers handelt, nur sechs Auflagerunbekannte aus den sechs Gleichgewichtsbedingungen der gewöhnlichen Statik im Raume bestimmen. Kommen deren mehr vor, so bleiben die übrigen *statisch unbestimmt.* Bei unserem Berührungskreise haben wir aber unendlich viele Auflagerunbekannte, weil der Auflagerdruck in jedem Elemente unseres Berührungskreises nach Gröſse und Richtung unbekannt ist. Die Frage gehört also in das Gebiet der Elastizität. Müssen wir aber erst einmal die elastischen Deformationen in Rechnung setzen, so müssen wir auch berücksichtigen, daſs der Berührungs*kreis* wegen der elastischen Abplattung der Oberflächen thatsächlich in eine Berührungs*fläche* übergehen wird. Die Gröſse dieser Fläche und die Formänderungen unserer Kegel- und Kugeloberfläche müſsten auf elastischem Wege ermittelt werden. Erst, wenn dies geschehen, könnten wir die Verteilung des

Hosted by Google

Gegendruckes und die Gröfse der Reibung angeben. Die aufserordentlichen Schwierigkeiten, welche sich hieraus ergeben, umgehen wir eben durch unsere Annahme einer absolut flachen Pfanne und einer punktförmigen Berührung.

Unter dieser Annahme ergiebt sich der Gegendruck der Pfanne oder die Reaktion R derselben in vertikaler, d. h. zur Pfanne normalen Richtung durch die einfache Betrachtung, die wir pag. 515 für den auf der Horizontalebene beweglichen Kreisel anstellten. Aus dem Impulssatze folgt nämlich hier wie dort

(1) $$R = M(g + z''),$$

unter z die vertikale Koordinate des Schwerpunktes in dem vom Bezugspunkte O auslaufenden festen xyz-Koordinatensystem verstanden (vgl. Fig. 74b).

Bezüglich des Vorzeichens von R ist Folgendes zu beachten: Die Pfanne kann vermöge ihrer Festigkeit zwar, wenn es nötig ist, einen aufserordentlich hohen *positiven* Gegendruck hergeben, (unter positiv die Richtung von unten nach oben verstanden), aber nicht den geringsten *negativen*. Sobald sich ein solcher im Verlauf einer bestimmten Bewegung aus (1) berechnet, würde die Pfanne nicht ausreichen, um die Ruhe des Punktes O zu sichern: der Kreisel würde bei verschwindendem R die Pfanne verlassen und sein unteres Ende in die Höhe schnellen. Von nun ab bewegt er sich nicht mehr wie der Kreisel mit festem Stützpunkt, sondern beschreibt eine Poinsotbewegung im freien Raume um seinen Schwerpunkt, während sich der Schwerpunkt selbst den Fallgesetzen gemäfs bewegt. Wir wollen solche Bewegungen von der Betrachtung ausschliefsen, also annehmen, dafs dauernd

$$g + z'' > 0$$

ist. Es steht mit dieser Annahme im Einklang, wenn wir späterhin sogar voraussetzen werden, dafs die Schwerpunktsbeschleunigung z'' dauernd sehr klein ist gegen die Fallbeschleunigung g, so dafs wir den Gegendruck R auf seinen „statischen" Bestandteil

(2) $$R = Mg = \text{dem Kreiselgewichte}$$

reduzieren und von dem „dynamischen Bestandteil" Mz'' absehen können. Dies ist eine Vernachlässigung (**Vernachlässigung I**), die wir im Interesse der Durchführbarkeit des Reibungsproblemes machen; die Gültigkeit unserer Resultate wird dadurch auf eine Klasse von Bewegungen beschränkt, die wir als „Präcessions-ähnliche" bezeichnen können. (Bei der regulären Präcession ist ja $z = \text{const.}$, also $z'' = 0$; Präcessionsähnlich kann daher eine Bewegung genannt werden, wenn z'' niemals von Null sehr verschiedene Werte annimmt.)


Hosted by Google

Zugleich mit R ist auch die Reibung im Berührungspunkte P bekannt. Wir unterscheiden dabei zunächst gleitende und bohrende Reibung, bemerken aber, daſs die gesonderte Berechnung beider zu Bedenken Anlaſs giebt, die im § 6 besprochen werden sollen. Für das Folgende kommen diese Bedenken nicht in Betracht, da, wie wir sehen werden, bei einigermaſsen beträchtlicher Neigung der Figurenaxe die bohrende Reibung gegenüber der gleitenden Reibung vernachlässigt werden kann.

Die gleitende Reibung ist eine im Berührungspunkte P angreifende Einzelkraft von der Gröſse

(3) $$W = \mu R,$$

deren Richtung horizontal ist und, ebenso wie die Bewegungsrichtung von P, auf der augenblicklichen Rotationsaxe OR senkrecht steht (vgl. Fig. 75). Für den Bezugspunkt O ergiebt sich hieraus eine Drehkraft von der Gröſse

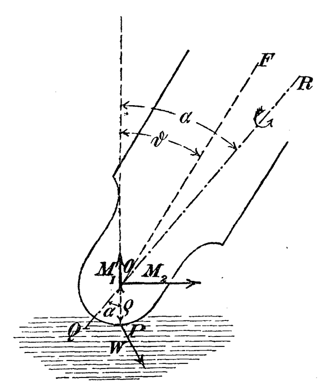


Fig. 75.

(4) $$M_1 = \varrho \mu R,$$

wo ϱ den Hebelarm von W in Bezug auf O, d. i. den Radius OP der begrenzenden Kugel bedeutet. Die Axe dieser Drehkraft stimmt mit der Richtung der Horizontalkomponente des Drehungsvektors überein.

Die bohrende Reibung berechnen wir durch ihr Moment M_2, welches die Vertikale OP zur Axe hat und dem Sinne nach der Vertikalkomponente des Drehungsvektors entgegengesetzt ist. Der Gröſse nach ist (vgl. den vorigen Paragraph)

(5) $$M_2 = \mu' R = \mu a R.$$

Wir wünschen uns ein Urteil darüber zu bilden, wann der eine und wann der andere Reibungseinfluſs überwiegen wird. Zu dem Zwecke berechnen wir die zugehörigen Arbeitsverluste $d\mathfrak{A}_1$ und $d\mathfrak{A}_2$ während eines Zeitintervalles dt. Bedeutet Ω die Gröſse der augenblicklichen Rotationsgeschwindigkeit, α den Winkel zwischen der Vertikalen und dem Rotationsvektor OR, also $\Omega \sin\alpha$ die Horizontal-, $\Omega \cos\alpha$ die Vertikalkomponente des Drehungsvektors, so wird

(6) $$d\mathfrak{A}_1 = -M_1 \Omega \sin\alpha\, dt, \quad d\mathfrak{A}_2 = -M_2 \Omega \cos\alpha\, dt$$

und

$$d\mathfrak{A}_1 : d\mathfrak{A}_2 = \varrho \sin\alpha : a \cos\alpha = \varrho \operatorname{tg}\alpha : a.$$

Hosted by Google

Die Gröſse a, welche im vorigen Paragraph als mittlerer Radius der Berührungsfläche gedeutet wurde, können wir entsprechend der Entstehungsweise unseres Berührungspunktes P aus dem ursprünglichen Berührungskreise als Radius dieses letzteren ansprechen. Die Gröſse $\varrho \operatorname{tg} \alpha$ andrerseits bedeutet (vgl. Fig. 75) den Abstand des Berührungspunktes P von dem Durchstoſsungspunkte Q der augenblicklichen Rotationsaxe mit der horizontalen Pfannenoberfläche. Unsere vorstehende Proportion besagt daher, daſs die Arbeit der gleitenden Reibung kleiner oder gröſser wie die der bohrenden Reibung ist, je nachdem die augenblickliche Rotationsaxe den Berührungskreis durchsetzt oder nicht. Lassen wir den Berührungskreis nahezu in einen Punkt zusammenschrumpfen, so folgt, daſs nur bei nahezu vertikaler Lage der Rotationsaxe die bohrende Reibung neben der gleitenden in Betracht kommt, daſs dagegen bei merklich nicht vertikaler Rotationsaxe die gleitende Reibung erheblich mehr Arbeit absorbiert und daher erheblich gröſseren Einfluſs auf den Bewegungsverlauf hat. Hieraus leiten wir die Berechtigung ab, im Folgenden *die bohrende Reibung im Allgemeinen gegenüber der gleitenden Reibung zu vernachlässigen* (**Vernachlässigung II**). Da bei den zu betrachtenden Bewegungen die Figurenaxe nahezu der Rotationsaxe folgt, so wird die genannte Vernachlässigung solange zulässig sein, *als die Figurenaxe nicht merklich vertikal steht.*

Wir wollen die Arbeit der gleitenden Reibung sogleich noch auf eine zweite Weise ausdrücken, nämlich durch die Euler'schen Winkel φ, ψ, ϑ. Wir lösen zu dem Ende den Rotationsvektor Ω in seine drei Komponenten $\varphi', \psi', \vartheta'$ nach der Figurenaxe, der Vertikalen und der Knotenlinie auf. Projizieren wir alsdann den aus den drei Seiten $\varphi', \psi', \vartheta'$ gebildeten Linienzug auf die Horizontalebene durch O, so ergiebt sich die Horizontalkomponente des Rotationsvektors. Dieselbe wird nach Fig. 76:

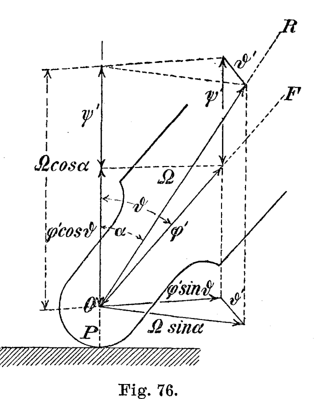


Fig. 76.

$$\Omega \sin \alpha = \sqrt{\vartheta'^2 + \varphi'^2 \sin^2 \vartheta}.$$

Nach (4) und (6) ergiebt sich daher

$$(7) \quad d\mathfrak{A}_1 = - \varrho \mu R \sqrt{\vartheta'^2 + \varphi'^2 \sin^2 \vartheta}\, dt.$$

Durch eine kleine formale Umänderung können wir diesen Ausdruck als lineare Funktion der Koordinatenänderungen $d\vartheta, d\varphi, d\psi$ schreiben, wie wir ihn zum Ansatz der Lagrange'schen Gleichungen brauchen werden. Wir setzen nämlich (7) so um:

Hosted by Google

$$(8) \qquad d\mathfrak{A}_1 = -\varrho\mu R\left(\frac{\vartheta' \, d\vartheta}{\sqrt{\vartheta'^2 + \varphi'^2 \sin^2\vartheta}} + \frac{\varphi' \sin^2\vartheta \, d\varphi}{\sqrt{\vartheta'^2 + \varphi'^2 \sin^2\vartheta}}\right).$$

Die Koeffizienten von $d\vartheta$, $d\varphi$, $d\psi$ in diesem Ausdruck nennen wir (vgl. z. B. pag. 78) die „Komponenten der gleitenden Reibung im Sinne der Koordinaten ϑ, φ, ψ" und schreiben:

$$(9) \quad \Theta_1 = -\varrho\mu R \frac{\vartheta'}{\sqrt{\vartheta'^2 + \varphi'^2 \sin^2\vartheta}}, \quad \Phi_1 = -\varrho\mu R \frac{\varphi' \sin^2\vartheta}{\sqrt{\vartheta'^2 + \varphi'^2 \sin^2\vartheta}}, \quad \Psi_1 = 0.$$

Bezüglich der Gröſse dieser Reibungskomponenten werden wir uns ebenfalls eine Ungenauigkeit zu Schulden kommen lassen **(Vernachlässigung III)**. Bei den wichtigsten Kreiselbewegungen fällt der Rotationsvektor immer nahezu mit der Figurenaxe zusammen. Es wird also die Komponente φ' des Rotationsvektors nach der Figurenaxe erheblich gröſser wie die Komponente ϑ' nach der Knotenlinie. Bei der regulären Präcession wird sogar unter Absehung von der Reibung ϑ' genau gleich Null. Indem wir also festsetzen, *daſs in den Ausdrücken der Reibungsarbeit und der Reibungskräfte ϑ' gegen φ' gestrichen werden soll*, beschränken wir unsere Betrachtung abermals auf die „Präcessions-ähnlichen Bewegungen".

In diesem Sinne schreiben wir (7) und (9)

$$(10) \qquad \begin{cases} d\mathfrak{A}_1 = \mp \varrho\mu R \varphi' \sin\vartheta \, dt, \\ \Phi_1 = \mp \varrho\mu R \sin\vartheta, \quad \Psi_1 = \Theta_1 = 0. \end{cases}$$

Einer Erläuterung bedarf hierbei noch das doppelte Vorzeichen in (10). Es ist klar, daſs die Quadratwurzel in Gl. (7) stets mit dem positiven Zeichen zu rechnen ist, da die Reibungsarbeit stets negativ ist. Dasselbe gilt von den Quadratwurzeln in Gl. (8) und (9). Entwickeln wir diese Wurzeln nach ϑ'/φ', so haben wir sie in erster Näherung gleich $|\varphi' \sin\vartheta|$, d. h. gleich $\pm\varphi' \sin\vartheta$ zu setzen, je nachdem φ' selbst positiv oder negativ ist. Dies gilt insbesondere auch für den Wert von Φ_1, in dem wir den Nenner $|\varphi' \sin\vartheta|$ gegen Faktoren des Zählers $\varphi' \sin^2\vartheta$ gehoben haben. Das obere Vorzeichen in den Gl. (10) ist also in denjenigen Fällen zu wählen, wo der Kreisel um die Figurenaxe im Sinne des Uhrzeigers rotiert ($\varphi' > 0$, Fig. 77a), das untere im entgegengesetzten Falle ($\varphi' < 0$, Fig. 77b).

Wir haben jetzt alle Vorbereitungen zur angenäherten Lösung des Reibungsproblemes getroffen, die uns im nächsten Paragraphen beschäftigen soll. Namentlich werden wir uns dabei von der aus der Beobachtung wohlbekannten Thatsache Rechenschaft zu geben haben, daſs die Figurenaxe des Kreisels durch die gleitende Reibung im Mittel langsam aufgerichtet wird.

Hosted by Google

Es wird aber gut sein, eben diese Thatsache schon vorher auf einem wenn auch sehr ungenauen Wege plausibel zu machen, der uns die Wirkung der Reibung rein anschaulich zu verfolgen erlaubt.

Wir nehmen an, der Kreisel befinde sich in schneller Rotation und die Rotationsaxe falle nahezu mit der Figurenaxe zusammen. Ein gleiches gilt dann auch von der Impulsaxe, deren Lage sich ja aus der Lage von Figurenaxe und Rotationsaxe bestimmt. Wir haben also zur Versinnlichung des Impulses von O aus einen sehr langen Vektor OJ abzutragen, und zwar ungefähr in der Richtung der positiven Figurenaxe, d. h. nach oben hin, oder in der ungefähren Richtung der negativen Figurenaxe, d. h. nach unten hin verlaufend, je nachdem die Rotation des Kreisels im Sinne des Uhrzeigers oder im entgegengesetzten Sinne um die positive Figurenaxe erfolgt. Die Rotation selbst wird durch einen Vektor OR dargestellt, welcher annähernd ebenso wie der Impuls gerichtet ist, also das eine Mal nach oben, das andere Mal nach unten. Den ersten Fall stellt Fig. 77a, den zweiten 77b dar. Der Einfluſs der gleitenden Reibung auf die Kreiselbewegung äuſsert sich, wie wir sahen, in dem Auftreten eines Momentes M_1, welches dieselbe Axe wie die Horizontalkomponente des Rotationsvektors und den entgegengesetzten Sinn hat. Tragen wir also die Horizontalkomponente OH des Rotationsvektors in unseren beiden Figuren ein, so ist dadurch der Sinn des Reibungsmomentes bestimmt. Der fragliche Pfeil, welcher M_1 darstellt, muſs in Fig. 77a von rechts nach links, in 77b von links nach rechts verlaufen.

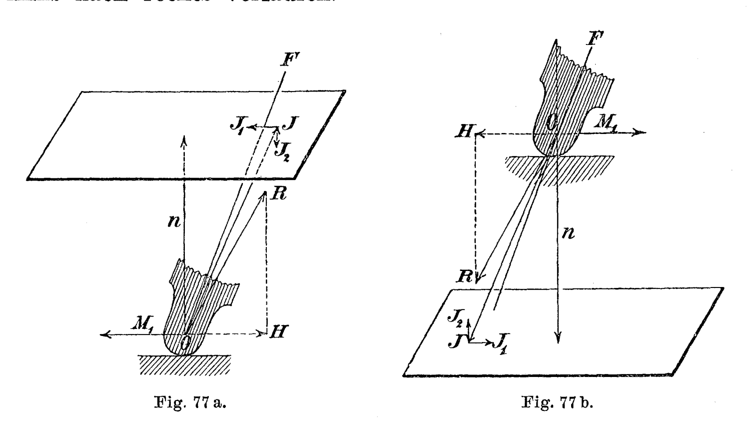


Fig. 77a. Fig. 77b.

Nach den fundamentalen Eigenschaften des Impulsvektors setzt sich nun dieser in jedem Zeitteilchen dt mit dem Zusatzimpuls der äuſseren Kräfte zusammen. Soweit letzterer von der gleitenden Reibung herrührt, ist er gleich $M_1 dt$; das Resultat seiner Zusammensetzung

mit dem Impulsvektor OJ ist in den beiden Figuren angedeutet. In beiden Fällen besteht die Wirkung des Zusatzimpulses darin, daſs die Horizontalkomponente des Gesamtimpulses etwas verkleinert wird, die Vertikalkomponente ungeändert bleibt. *Der Gröſse nach wird also der Impuls etwas geschwächt, der Richtung nach etwas mehr vertikal gestellt. Sein Endpunkt wandert dabei in der durch den Endpunkt des Anfangsimpulses gelegten Horizontalebene von J nach J_1.*

Der Einfluſs der Reibung auf die Richtungsänderung des Impulsvektors wird offenbar um so geringer sein, je gröſser die jeweilige Länge des Impulsvektors ist; denn die Hinzufügung der kleinen Strecke JJ_1, welche nur von der Gröſse des Gegendruckes R, vom Reibungskoeffizienten μ, dem Kugelradius ϱ und dem Zeitelement dt abhängt, macht gegenüber einem langen Vektor OJ weniger aus wie gegenüber einem kürzeren. *Die Umlagerung des Impulsvektors erfolgt also um so langsamer, je stärker der Anfangsimpuls war oder je schneller der Kreisel ursprünglich rotierte.*

Natürlich wird der Impulsvektor OJ gleichzeitig auch durch die Einwirkung der Schwere abgeändert. Aus diesem Grunde verschiebt sich der Endpunkt des Impulses in jedem Augenblicke im Sinne der Axe des Schweremomentes, d. h. im Sinne der Knotenlinie. Da aber die Knotenlinie auf der Figurenaxe genau und auf der Impulsaxe angenähert senkrecht steht, solange unsere Voraussetzung des angenäherten Zusammenfallens von Figuren- und Impulsaxe zutrifft, bringt die Schwerewirkung angenähert keine Änderung in der Gröſse und Neigung des Impulsvektors gegen die Vertikale hervor. Da überdies die Knotenlinie auf der Vertikalen genau senkrecht steht, tritt der Impuls-Endpunkt auch wegen der Schwerewirkung nicht aus der genannten festen Horizontalebene heraus. Unsere obigen Behauptungen bezüglich der Gröſsen- und Lagenänderungen des Impulses bleiben also auch bei Berücksichtigung der Schwerewirkung bestehen. Man bemerke insbesondere, daſs der Sinn des Schweremomentes, welches von der Lage des Schwerpunktes auf der Figurenaxe abhängt, für unsere Überlegung belanglos ist. *Der Impulsvektor wird also je länger je mehr durch die Reibung aufgerichtet, gleichviel ob der Schwerpunkt oberhalb oder unterhalb des Unterstützungspunktes liegt.*

Wir möchten nun aber zeigen — und erst mit diesem Nachweis erreichen wir unsern eigentlichen Zielpunkt —, daſs sich ebenso wie die Impulsaxe auch die Figurenaxe des Kreisels verhält.

Zu dem Ende bemerken wir, daſs zunächst die *Rotationsaxe* bei dem Kugelkreisel genau, bei dem symmetrischen Kreisel angenähert der Lage der Impulsaxe folgen wird. Die Figurenaxe andrerseits wird

Hosted by Google

fortgesetzt um die jeweilige Rotationsaxe auf einem Kegel umgedreht. Und zwar geht bei hinreichend starkem Eigenimpuls diese Umdrehung viel schneller vor sich, wie der Wechsel der Rotationsaxe selbst, derart, dafs während einer vollen Umdrehung der Figurenaxe sich die Rotationsaxe nur wenig verschoben hat. In der That wird die Bewegung der Impulsaxe und daher auch die der Rotationsaxe um so langsamer, je gröfser der dem Kreisel ursprünglich erteilte Impuls war, während die Umdrehung der Figurenaxe um so schneller wird, je gröfser jener Impuls ist. Von einer gewissen Gröfse des Impulses ab wird also die Bewegung der Rotationsaxe als unendlich langsam gegenüber der Bewegung der Figurenaxe gelten können. Alsdann fällt die mittlere Lage der Figurenaxe dauernd mit der Lage der Rotationsaxe zusammen und es gilt von ihr dasselbe, was für die Lage der Rotationsaxe und der Impulsaxe bereits festgestellt wurde: *Im Mittel mufs sich auch die Figurenaxe unter der Einwirkung der Reibung aufrichten, und zwar um so langsamer, je schneller die anfängliche Rotation war.* Dieser mittleren Bewegung werden sich kleine Schwankungen oder Nutationen der Figurenaxe überlagern, die von der fortgesetzten Umdrehung um die Rotationsaxe herrühren und die die Figurenaxe abwechselnd der Vertikalen nähern und von ihr entfernen. —

Dafs die Reibung ein Aufrichten der Figurenaxe auch dann zur Folge hat, wenn der Schwerpunkt oberhalb des Stützpunktes liegt, und daher mit der Hebung der Figurenaxe eine Arbeitsleistung verbunden ist, kann vielleicht auf den ersten Blick überraschen. Denn die Reibung kann doch stets nur Arbeit verzehren und keine Arbeit leisten. In Wirklichkeit liegt natürlich die Sache so, dafs die zur Schwerpunktshebung erforderliche Energie aus der lebendigen Kraft des Kreisels bestritten wird, von der auch die Reibung zehrt. Die Verkürzung des Impulsvektors, welche eine Verminderung der lebendigen Kraft zur Folge hat, bildet daher, falls der Schwerpunkt oberhalb des Stützpunktes liegt, ein notwendiges Korrelat zur Aufrichtung des Impulsvektors und zu der der Figurenaxe.

Das Endergebnis der gleitenden Reibung ist somit die *aufrechte Kreiselbewegung.* Der zu dieser Bewegung verfügbar bleibende Impuls ist durch die anfängliche Vertikalkomponente n des Impulsvektors gegeben, durch welche sich auch die gleichförmige Rotationsgeschwindigkeit bei der aufrechten Bewegung vorausbestimmt. Nachdem einmal Impuls-, Rotations- und Figurenaxe in der senkrechten Lage zusammengefallen sind, ist die gleitende Reibung aufser Thätigkeit gesetzt: der Kreisel könnte unserm bisherigen Ansatz zufolge in dieser Lage ungeschwächt für alle Zeit fortrotieren.

Hosted by Google

Letzteres widerspricht aber offenbar der gemeinen Erfahrung, wonach jede Bewegung durch Reibungseinflüsse schlieſslich definitiv vernichtet wird. In der That ist jenes Ergebnis auch nur eine Folge der willkürlichen Unterscheidung zwischen gleitender und bohrender Reibung und der Vernachlässigung der letzteren. Wir müssen uns daher jetzt noch ein ungefähres Urteil über *die Wirkung der bohrenden Reibung* verschaffen.

Nach dem obigen vorläufigen Ansatz liefert die bohrende Reibung ein Moment, welches der Vertikalkomponente des Rotationsvektors entgegenwirkt. Im Falle von Fig. 77a (Rotation im Sinne des Uhrzeigers um die Figurenaxe) ist der Rotationsvektor nach oben gerichtet, also würde das Drehmoment M_2 der bohrenden Reibung durch einen Pfeil darzustellen sein, der von O aus nach unten läuft. Dieses Drehmoment setzt sich ebenso wie das Drehmoment der gleitenden Reibung in jedem Augenblicke mit dem vorhandenen Impuls OJ zusammen. Hierbei wird, wie man sieht, der Impulsvektor *von der Vertikalen abgelenkt*, indem sein Endpunkt etwa von J nach J_2 verlagert wird.

Das gleiche gilt aber auch im Falle der Fig. 77b, wo der Pfeil des Drehmomentes M_2 nach oben weisen würde und der Impuls bei der Zusammensetzung mit M_2 gehoben wird. Sein Endpunkt wandert dabei etwa von J nach J_2. In beiden Fällen ist die Umlagerung des Impulses zufolge der bohrenden Reibung mit einer *Verkürzung des Impulses* verbunden.

Die bohrende Reibung arbeitet also in einer Hinsicht der gleitenden Reibung entgegen: *sie strebt den Impulsvektor von der Vertikalen zu entfernen.* In anderer Hinsicht wirkt sie in gleichem Sinne wie die gleitende Reibung: *sie schwächt den Impuls dauernd.* Da wir sahen, daſs der Einfluſs der bohrenden Reibung, solange die Rotationsaxe merklich von der Vertikalen verschieden ist, klein gegenüber dem Einfluſs der gleitenden Reibung ist, so wird dieser letztere jedenfalls den Ausschlag geben und es wird trotz der bohrenden Reibung ein Aufrichten der Figurenaxe erfolgen. Höchstens könnte das Zeitmaſs des Aufrichtens durch den Einfluſs der bohrenden Reibung etwas verzögert werden. Andrerseits ist zu beachten, daſs das Aufrichten um so schneller erfolgt, je kürzer der Impulsvektor ist, daſs also die bohrende Reibung, indem sie die Länge des Impulsvektors reduziert, ihrerseits das Aufrichten indirekt beschleunigt. Diese indirekte Wirkung der bohrenden Reibung wird daher ihre direkte Wirkung, den Impulsvektor von der Vertikalen abzulenken, teilweise kompensieren.

Ist aber die aufrechte Lage annähernd erreicht, so tritt die bohrende Reibung als die Hauptsache in ihr Recht, weil alsdann die gleitende

Hosted by Google

Reibung sehr klein geworden ist. Durch die bohrende Reibung wird der nunmehr vertikal gestellte Impuls dauernd weiter geschwächt, ohne dafs der Charakter der aufrechten Bewegung zunächst wesentlich geändert wird. Die Rotationsgeschwindigkeit der aufrechten Bewegung, die vermöge der gleitenden Reibung unverändert fortbestehen könnte, wird also durch die bohrende Reibung mehr und mehr herabgesetzt. Schliefslich mufs der Impuls bis auf diejenige Gröfse reduziert sein, bei welcher die aufrechte Bewegung instabil wird, wenn der Schwerpunkt über dem Unterstützungspunkte liegt. Jede kleinste Störung erzeugt jetzt merkliche Schwankungen der Figurenaxe, die bei weiter abnehmendem Impuls ihrer Amplitude nach zunehmen, bis der Kreisel umfällt und nach einigen scheinbar regellosen letzten Anstrengungen definitiv zur Ruhe kommt.

§ 4. Quantitatives über den Einflufs der gleitenden Reibung auf die Neigung der Figurenaxe. Graphische Integration der zugehörigen Differentialgleichung.

Die geeignetste Grundlage für eine eingehendere Behandlung unseres Reibungsproblems liefern die Gleichungen von Lagrange in den Eulerschen Winkeln φ, ψ, ϑ. Neben den Geschwindigkeitskoordinaten φ', ψ', ϑ' werden wir die Impulskoordinaten $[\Phi] = N$, $[\Psi] = n$, $[\Theta]$ benutzen. Bei Übernahme der Bezeichnung N, die früher als Integrationskonstante eingeführt wurde, ist zu beachten, dafs diese Impulskoordinate jetzt nicht mehr konstant ist, sondern durch die gleitende Reibung stetig abgeändert wird, wie denn bei Berücksichtigung der bohrenden Reibung auch die Impulskoordinate n variabel werden würde. Die auf den Kreisel wirkenden Kräfte bestehen aus der Schwere und der gleitenden Reibung, wenn wir (Vernachlässigung II) von der bohrenden Reibung absehen. Die Schwere giebt nur um die Knotenlinie, die gleitende Reibung auf Grund unserer Vernachlässigung III (s. die Gl. (10) des vorigen §) nur um die Figurenaxe zu einem Momente Anlafs. Die Koordinaten der äufseren Kraft, bezüglich der drei Euler'schen Winkel, werden daher durch die folgende Tabelle gegeben:

	φ	ψ	ϑ
Schwere	0	0	$P \sin \vartheta$
Gl. Reibung	$\mp \varrho \mu\, Mg \sin \vartheta$	0	0

Hierbei ist auch bereits von der Vernachlässigung I Gebrauch gemacht, indem der Gegendruck mit seinem statischen Bestandteil Mg identifiziert wurde.

Die Grundgleichungen, von denen wir auszugehen haben, sind in ganz ähnlicher Form schon pag. 154 und pag. 220 u. ff. entwickelt worden; sie lauten:

a) Der Ausdruck der lebendigen Kraft des symmetrischen Kreisels:

$$T = \frac{A}{2}(\sin^2\vartheta\,\psi'^2 + \vartheta'^2) + \frac{C}{2}(\varphi' + \cos\vartheta\,\psi')^2. \tag{1}$$

b) Der Zusammenhang zwischen Impuls- und Geschwindigkeitskoordinaten:

$$\left\{\begin{aligned} [\Phi] &= N = \frac{\partial T}{\partial \varphi'} = C(\varphi' + \cos\vartheta\,\psi'),\\ [\Psi] &= n = \frac{\partial T}{\partial \psi'} = A\sin^2\vartheta\,\psi' + C\cos\vartheta\,(\varphi' + \cos\vartheta\,\psi'),\\ [\Theta] &= \frac{\partial T}{\partial \vartheta'} = A\vartheta'. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

c) Die Auflösung der beiden ersten der vorstehenden Gleichungen nach den Geschwindigkeitskoordinaten:

$$\psi' = \frac{n - \cos\vartheta\,N}{A\sin^2\vartheta}, \quad \varphi' = \frac{N - \cos\vartheta\,n}{A\sin^2\vartheta} + \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\right)N. \tag{3}$$

d) Der partielle Differentialquotient der lebendigen Kraft nach der Koordinate ϑ:

$$\frac{\partial T}{\partial \vartheta} = A(\cos\vartheta\,\psi' - N)\sin\vartheta\,\psi' = -\frac{(N - \cos\vartheta\,n)(n - \cos\vartheta\,N)}{A\sin^3\vartheta}. \tag{4}$$

e) Das Gesetz für die Impulsänderungen oder die Lagrange'schen Gleichungen im engeren Sinne:

$$\frac{dn}{dt} = 0, \tag{5}$$

$$\frac{dN}{dt} = \mp\,\varrho\mu\,Mg\sin\vartheta, \tag{6}$$

$$A\vartheta'' + \frac{(N - \cos\vartheta\,n)(n - \cos\vartheta\,N)}{A\sin^3\vartheta} = P\sin\vartheta. \tag{7}$$

Statt der Gleichung (7) haben wir beim reibungslosen Kreisel den Satz der lebendigen Kraft benutzt, der sich dadurch empfahl, daſs er die Ausführung einer Integration in sich schloſs. Im vorliegenden Falle geht dieser Vorteil verloren, weil der Reibungswiderstand keine konservative Kraft ist, und wird daher die Gleichung (7) wegen ihrer einfacheren Bauart bequemer als jener Satz.

Wir wollen die Bedeutung der letzten drei Gleichungen der Reihe nach durchgehen.

Gleichung (5) sagt aus, *daſs die Vertikalkomponente des Impulses durch die gleitende Reibung nicht beeinfluſst wird*, wie wir schon im



vorigen Paragraph erkannten. n kann daher nach wie vor als eine durch den Anfangszustand gegebene Integrationskonstante angesehen werden. Übrigens folgt dieses Resultat allein aus unserer Vernachlässigung II der bohrenden Reibung und ist von der Einführung oder Nichteinführung der Vernachlässigungen I und III unabhängig.

Aus Gl. (6) schliefsen wir, *dafs sich der Absolutwert des Eigenimpulses N dauernd im gleichen, nämlich im abnehmenden Sinne ändert.* Wegen der Bedeutung des doppelten Vorzeichens (vgl. pag. 552) berechnet sich nämlich für dN aus Gl. (6) ein negativer oder positiver Wert, je nachdem φ' oder, was auf dasselbe herauskommen wird, je nachdem N positiv oder negativ ist. Die Gröfse von N können wir hiernach als eine Art Zeitmesser benutzen, da wir den Ablauf der Bewegung ebensowohl auf die abnehmenden Werte von $|N|$ wie auf die wachsenden Werte von t beziehen können. Mit anderen Worten: *wir können statt der Zeit t die Gröfse N als unabhängige Variable einführen.* Ist die wechselnde Lage des Kreisels, insbesondere der Winkel ϑ, als Funktion von N bekannt, so läfst sich der zeitliche Verlauf der Bewegung nachträglich feststellen, indem man nach (6) berechnet:

$$t = \mp \frac{1}{Mg\mu\varrho} \int \frac{dN}{\sin\vartheta}. \tag{8}$$

In Gl. (7) kommen zunächst drei Veränderliche vor, nämlich t, N und ϑ. Statt ϑ führen wir wie früher die Hülfsgröfse

$$u = \cos\vartheta \tag{9}$$

ein, überdies eliminieren wir die Variable t mittels der Gl. (6) und benutzen nach der vorstehenden Bemerkung fernerhin N als unabhängige Variable. Zu dem Ende ist es nur nötig, die nach der Zeit genommenen Differentialquotienten von ϑ durch solche nach N zu ersetzen. Wir haben:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d\vartheta}{dt} &= \frac{d\vartheta}{dN}\cdot\frac{dN}{dt} = \mp\varrho\mu\, Mg \sin\vartheta \frac{d\vartheta}{dN} = \pm\varrho\mu\, Mg\frac{du}{dN}, \\ \frac{d^2\vartheta}{dt^2} &= \pm\varrho\mu\, Mg\frac{d^2u}{dN^2}\cdot\frac{dN}{dt} = -(\varrho\mu\, Mg)^2\frac{d^2u}{dN^2}\sin\vartheta. \end{aligned}\right. \tag{10}$$

Gl. (7) läfst sich daher mit Rücksicht auf (9) und (10) in die folgende bemerkenswert einfache Form schreiben:

$$(\varrho\mu\, Mg)^2\frac{d^2u}{dN^2} = \frac{(N-un)(n-uN)}{A^2(1-u^2)^2} - \frac{P}{A}. \tag{11}$$

Das Problem ist somit auf eine einzelne gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung zwischen u und N reduziert.

Wir beabsichtigen nicht, diese Gleichung in geschlossener Form oder durch irgend welche Reihenentwicklung zu integrieren. Vielmehr

Hosted by Google

werden wir versuchen, auch ohne formelmäſsige Integration durch sachgemäſse Diskussion der Differentialgleichung das Wesentliche über den Verlauf der Integralkurve zu erfahren.

Da die Gestalt der Integralkurve wesentlich von ihrer Krümmung und diese von dem zweiten Differentialquotienten abhängt, so werden wir darauf geführt, die rechte Seite von (11) näher zu studieren. Und zwar werden wir zunächst feststellen, wo die rechte Seite einen Vorzeichenwechsel aufweist. Zu dem Zwecke betrachten wir die Gleichung:

$$(n - uN)(N - un) - AP(1 - u^2)^2 = 0. \tag{12}$$

Hier ist es noch bequem, mit dem Quadrat der Impulskonstanten n zu dividieren und die Abkürzungen

$$v = \frac{N}{n}, \quad \pm m^2 = \frac{AP}{n^2} \tag{13}$$

einzuführen. Die Gröſse v ist dann, ebenso wie der Neigungscosinus u, eine reine Zahl. Das Gleiche gilt nach pag. 293 von der Gröſse $\pm m^2$, wobei das positive oder negative Vorzeichen zu wählen sein wird, je nachdem P positiv oder negativ ist, der Schwerpunkt also über oder unter dem Stützpunkte liegt. Unsere Gleichung (12) verwandelt sich so in eine Gleichung zwischen den drei unbenannten Zahlengröſsen u, v und m^2, nämlich in:

$$(1 - uv)(v - u) = \pm m^2 (1 - u^2)^2. \tag{14}$$

Wir deuten u als Ordinate, v als Abscisse in einer u,v-Ebene; die durch (14) dargestellte, in dieser Ebene verlaufende Kurve vierter Ordnung bezeichnen wir als *Leitlinie*, da sie der später zu konstruierenden Integralkurve gewissermaſsen als Führung dienen wird. Die Integralkurve der Gl. (11) muſs sich, wie wir zeigen werden, um unsere Leitlinie in unmittelbarer Umgebung derselben herumschlängeln.

Die Gestalt der Leitlinie ist in Fig. 78 dargestellt; und zwar bezieht sich die ausgezogene Linie auf den Fall $P > 0$, wo in (14) das positive Zeichen gilt, die punktierte Linie auf den Fall $P < 0$, in welchem m^2 mit dem negativen Vorzeichen versehen ist. Wie Gl. (14) zeigt, entsteht die letztere aus der ersteren, wenn man u, v mit $-u, -v$ vertauscht, wenn man also die erstere Linie um den Anfangspunkt der u, v-Ebene durch den Winkel von 180^0 dreht. Hiernach genügt es, den Fall $P > 0$ allein zu betrachten, also in Gl. (14) lediglich das obere Vorzeichen zu berücksichtigen.

Zur Begründung unserer Figur 78 sei folgendes bemerkt: Konstruiert man die gleichseitige Hyperbel $1 = uv$ und die Gerade $v = u$, so teilen diese die Ebene in sechs Gebiete; in dreien derselben hat die linke Seite von (14) positives, in den übrigen negatives Vorzeichen.


Hosted by Google

Nur in den ersteren Gebieten, die in der Figur durch Schraffierung kenntlich gemacht sind, kann unsere Leitlinie verlaufen, da sonst Gl. (14) nicht erfüllbar wäre.

Ferner ist es für die Gestalt der Leitlinie wesentlich, dafs wir m^2 als *kleine Zahl* voraussetzen dürfen. Denn wir betrachten nur Be-

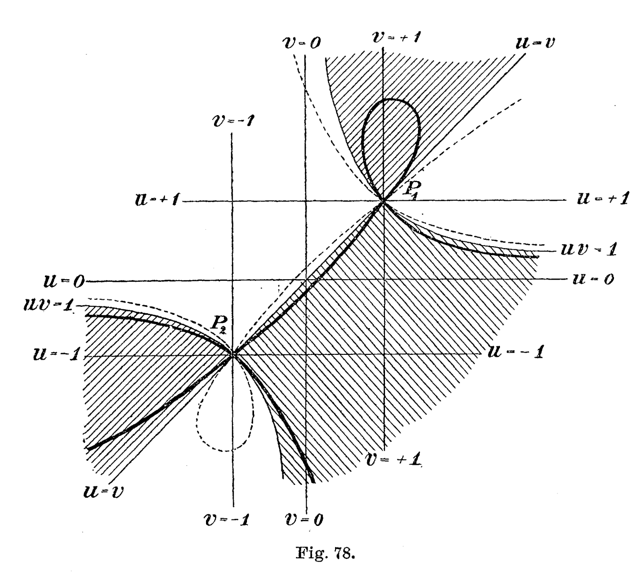


Fig. 78.

wegungen, bei welchen dem Kreisel anfänglich eine schnelle Umdrehung oder ein starker Impuls erteilt wurde. Unter einem starken Impuls verstehen wir aber nach pag. 293 einen solchen, für den N^2 erheblich gröfser als die gleichbenannte Gröfse AP, für den also AP/N^2 ein kleiner echter Bruch $\left(\text{beispielsweise} < \frac{1}{100}\right)$ ist. Da nun die Vertikalkomponente n des Impulses von derselben Gröfsenordnung wie der Anfangswert des Eigenimpulses ist, so wird auch $AP/n^2 = m^2$ ein kleiner echter Bruch. In der Figur haben wir nur $m^2 = 1/9$ gewählt, weil bei noch kleinerem m^2 unsere Zeichnung undeutlich würde, während wir für die Zwecke der späteren Rechnung an der Annahme $m^2 < \frac{1}{100}$ festhalten werden.

Man überzeugt sich sodann nach der üblichen Methode der Potenzentwicklung leicht, dafs die Punkte $P_1\,(u = v = 1)$ und $P_2\,(u = v = -1)$ Doppelpunkte unserer Kurve werden und dafs die beiden Kurventangenten in diesen Punkten mit der positiven bezw. negativen Abscissenaxe einen Winkel α einschliefsen, der sich aus

$$\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{\frac{1}{1-4m^2}} \text{ (Punkt } P_1)$$

bezw. aus


Hosted by Google

$$\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{\frac{1}{1+4m^2}} \text{ (Punkt } P_2)$$

berechnet. Im Punkte P_1 ist der genannte Winkel also ein wenig gröſser, in P_2 ein wenig kleiner wie 45^0.

Aus Gl. (14) folgt ferner leicht, daſs unsere Leitlinie eine und nur eine zur v-Axe parallele Tangente mit dem Berührungspunkte

$$u = \frac{1}{4m^2}, \quad v = \frac{1}{2}\left(4m^2 + \frac{1}{4m^2}\right)$$

besitzt. Hieraus ist zu schlieſsen, daſs die beiden durch P_1 nach oben hin verlaufenden Kurvenäste sich in einer Schlinge vereinigen. Die beiden durch P_2 nach links auslaufenden Äste können sich dagegen nicht zusammenschlieſsen, da der obere von ihnen sich asymptotisch der Abscissenaxe annähert. Das gleiche gilt von dem durch P_1 nach unten rechts verlaufenden Aste.

Durch diese und ähnliche Betrachtungen läſst sich die Gestalt unserer Leitlinie mit hinreichender Sicherheit im Falle $P > 0$ feststellen. Ihre Gestalt im Falle $P < 0$ wird dann durch die schon erwähnte Umdrehung aus jener abgeleitet.

Welchen Nutzen gewährt uns nun die Kenntnis der Leitlinie für die Integration der Gleichung (11)? Wir schreiben uns diese Gleichung zunächst so um, daſs darin lauter unbenannte Gröſsen vorkommen. Zu dem Zwecke dividieren wir sie mit n^2/A^2 und ersetzen

$$\frac{d^2u}{dN^2} \quad \text{durch} \quad \frac{1}{n^2}\frac{d^2u}{dv^2}.$$

Der Faktor von $\frac{d^2u}{dv^2}$ wird auf solche Weise, wenn wir die übliche Abkürzung $P = \pm MgE$ einführen:

$$\frac{A^2}{n^4}(Mg\mu\varrho)^2 = \left(\frac{AP}{n^2}\mu\frac{\varrho}{E}\right)^2 = (m^2\mu\lambda)^2$$

mit der weiteren Abkürzung

$$\lambda = \frac{\varrho}{E}$$

und unsere Gleichung (11) geht über in

$$(15) \qquad (m^2\mu\lambda)^2\frac{d^2u}{dv^2} = \frac{(1-uv)(v-u)}{(1-u^2)^2} - m^2 \cdots (P>0)$$

bez. in

$$(16) \qquad (m^2\mu\lambda)^2\frac{d^2u}{dv^2} = \frac{(1-uv)(v-u)}{(1-u^2)^2} + m^2 \cdots (P<0).$$

Nun verschwindet die rechte Seite jeder dieser Gleichungen nur in den Punkten der zugehörigen Leitlinie und es tritt daher ein Wechsel im Sinne der Krümmung unserer Integralkurve nur ein, wenn diese

Hosted by Google

die Leitlinie überschreitet. Wegen der Bedeutung von $u = \cos\vartheta$ brauchen wir nur denjenigen Streifen der u, v-Ebene zu betrachten, der zwischen den Geraden $u = \pm 1$ enthalten ist; dieser wird von der Leitlinie in vier Gebiete eingeteilt. Das jedem Gebiete zukommende Vorzeichen von d^2u/dv^2 ist in den Figuren 79 und 80 eingetragen; man stellt es am einfachsten dadurch fest, daſs man von dem Punkte $u = v = 0$ ausgeht, in welchem die rechte Seite von (15) gleich $-m^2$, die von (16) gleich $+m^2$ wird. Hierdurch ist das fragliche Vorzeichen für jeden Punkt unseres Streifens bestimmt. *In den mit + bezeichneten Gebieten ist die gesuchte Integralkurve, aus der Richtung der positiven Ordinatenaxe betrachtet, konkav gekrümmt, in den mit — bezeichneten Gebieten konvex; beim Überschreiten der Leitlinie besitzt sie jedesmal einen Wendepunkt.*

Um von hieraus die Integralkurve wirklich konstruieren zu können, müssen wir uns zunächst bestimmte Anfangsbedingungen geben. Wir bezeichnen den anfänglichen Neigungscosinus der Figurenaxe gegen die Vertikale mit u_0 und setzen etwa fest, daſs zu Beginn der Impulsvektor genau in die Richtung der Figurenaxe falle, daſs also der Kreisel zu Beginn keinen seitlichen Anstoſs erhalte. Dann gibt der Anfangswert N_0 des Eigenimpulses zugleich die Gesamtlänge des Impulsvektors und ist die Vertikalkomponente des Impulses $n = N_0 u_0$. Unsere Integralkurve beginnt daher in einem Punkte P_0, dessen Koordinaten u_0, v_0 der Gleichung $1 = u_0 v_0$ genügen, welcher also auf der (in Fig. 79 und 80 gestrichelt eingezeichneten) gleichseitigen Hyperbel liegt. Ferner ist hierdurch zugleich die Anfangstangente der Integralkurve bestimmt; wenn nämlich der Impulsvektor die Richtung der Figurenaxe hat, so fällt auch die augenblickliche Rotationsaxe in die Figurenaxe hinein. Die Figurenaxe steht also momentan im Raume still und es ist

$$\frac{du}{dt} = 0 \quad \text{und daher auch} \quad \frac{du}{dN} = 0 \quad \text{sowie} \quad \frac{du}{dv} = 0.$$

Unsere Integralkurve setzt also im Punkte P_0 mit einer horizontalen Tangente ein.

Von dem weiteren Verlauf der Integralkurve gilt die allgemeine Bemerkung: *daſs sie, auf die Abscissenaxe senkrecht projiziert, diese überall einfach überdecken muſs.* Denn, wie oben festgestellt, nimmt der Absolutwert von N mit wachsendem t beständig ab, desgleichen der (notwendig positive) Wert von $v = \frac{N}{n}\cdot$ Da nun zu jedem Werte von t nur ein Wert von u gehören kann, so kann auch jedem Werte von v nur ein Wert von u entsprechen.

Betrachten wir nun z. B. Fig. 79 ($P > 0$). Der Anfangspunkt P_0 liegt in einem Gebiete negativer Krümmung (d. h. einem Gebiete, wo

$d^2u/dv^2 < 0$); die Integralkurve ist also von oben gesehen konvex Da sie in P_0 eine horizontale Tangente hat, muſs sie nach unten umbiegen und bald zum Schnitt mit der Leitlinie kommen. Hierbei geht sie mit einer Wendung in ein Gebiet positiver Krümmung über, verläuft also von jetzt ab nach oben hin konkav. Die zwei Möglichkeiten,

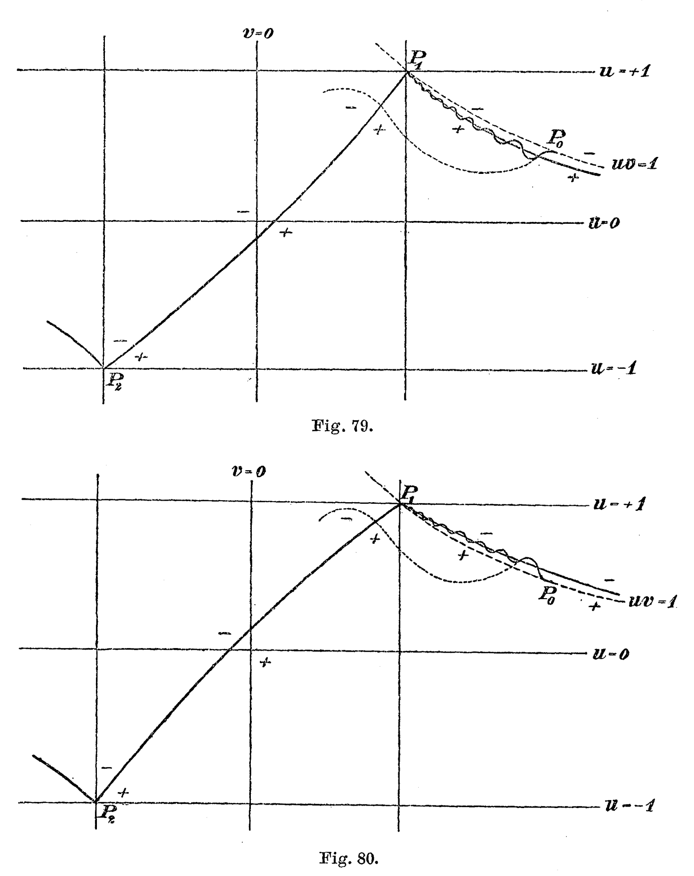


Fig. 79.

Fig. 80.

die sich nun bieten, sind in Fig. 79 angedeutet: Die Integralkurve muſs die Leitlinie zum zweiten Mal schneiden; dieser Schnittpunkt kann nun entweder, von P_0 aus gerechnet, diesseits von P_1 liegen, oder jenseits. Die in der Figur ausgezogene, wellenförmige Gestalt der Integralkurve entspricht der ersten, die punktierte Gestalt der zweiten Möglichkeit. *Wir wollen zeigen, daſs nur die erste Möglichkeit der Wirklichkeit entspricht.*

Zum Beweise haben wir auſser dem Vorzeichen der Krümmung deren Gröſse zu beachten. Letztere ist in rechtwinkligen Koordinaten u, v bekanntlich durch den Ausdruck

Hosted by Google

$$\text{a)} \qquad \frac{\frac{d^2u}{dv^2}}{\left(1+\left(\frac{du}{dv}\right)^2\right)^{3/2}}$$

gegeben. Wir werden statt dessen als einen angenäherten Ausdruck für die Krümmung den folgenden

$$\text{b)} \qquad \frac{d^2u}{dv^2}$$

substituieren, dessen jeweiligen Betrag wir direkt aus der Differentialgleichung (19) entnehmen können. Dieser Wert ist allerdings etwas zu grofs und stimmt nur dann mit dem genauen Wert der Krümmung hinreichend überein, wenn die Neigung der Kurventangente gegen die Abscissenaxe klein ist. Dafs dieses in unserem Falle zutrifft, können wir nicht mit Sicherheit behaupten; nur soviel ist nach einer Bemerkung auf der vorigen Seite klar, dafs die Neigung der Kurventangente niemals unendlich grofs werden kann; denn dann würde die Projektion der Integralkurve auf die Abscissenaxe diese nicht mehr eindeutig überdecken.

Auf der Leitlinie selbst hat wie wir wissen die Integralkurve die Krümmung Null. Ersetzen wir in der Gleichung (15) die Zahl m^2 durch eine wenig kleinere oder gröfsere, so entstehen zwei Nachbarkurven der Leitlinie von wesentlich gleichem Verlauf, welche beispielsweise beide durch den Punkt P_1 hindurchgehen und sich asymptotisch der positiven Abscissenaxe anschliefsen. Wir können etwa statt der kleinen Zahl m^2 das eine Mal den Wert Null, das andere Mal den Wert $2m^2$ einsetzen. Die erste unserer Nachbarkurven fällt dann in dem uns interessierenden Gebiete mit der Hyperbel $uv = 1$ zusammen, die zweite hat die Gleichung

$$(1-uv)\,(v-u) = 2m^2(1-u^2)^2.$$

In den Punkten der ersten bez. zweiten Nachbarkurve besitzt die Integralkurve nach Gl. (15) die angenäherte Krümmung

$$\frac{d^2u}{dv^2} = \frac{-m^2}{(m^2\mu\lambda)^2} = -\frac{1}{m^2\mu^2\lambda^2},$$

bez.

$$\frac{d^2u}{dv^2} = \frac{2m^2-m^2}{(m^2\mu\lambda)^2} = +\frac{1}{m^2\mu^2\lambda^2}.$$

Der Wert von m^2 sollte etwa $\frac{1}{100}$ sein. Der Reibungskoeffizient μ ist ein echter Bruch; als Gröfsenordnung kann man etwa $\frac{1}{3}$ annehmen, so dafs μ^2 etwa $\frac{1}{10}$ wird. Auch die Verhältniszahl $\lambda = \frac{\varrho}{E}$ ist ein

echter Bruch, da der Schwerpunkt einen merklichen Abstand von dem festen Punkte haben muſs, wenn anders wir es überhaupt mit einem „schweren Kreisel“ zu thun haben, während die die Figurenaxe nach untenhin begrenzende Halbkugel sicherlich einen kleinen Radius besitzen wird. Um eine bestimmte Angabe zu machen, wollen wir etwa λ^2 gleich $\frac{1}{1000}$ (d. h. $E = \text{ca.}\, 32\, \varrho$) setzen. Unter diesen Voraussetzungen wird die angenäherte Krümmung der Integralkurve auf unseren beiden der Leitlinie benachbarten Kurven gleich $\pm 10^6$, der angenäherte Krümmungsradius also nur gleich ein Milliontel der Einheitsstrecke unserer Figur. Dabei ist der Abstand unserer beiden Nachbarkurven von einander und von der Leitlinie ein äuſserst geringer, nämlich selbst von der Gröſsenordnung m^2 und er vermindert sich überdies mit wachsender Annäherung an den Punkt P_1.

Die Krümmung der Integralkurve also, die auf der Leitlinie selbst den Wert Null hat, wird in nächster Nähe derselben schon sehr groſs. Sobald sich die Integralkurve nur merklich von der Leitlinie entfernt hat, muſs sie schleunigst wieder umbiegen und sich der Leitlinie abermals nähern: Die Integralkurve ist hiernach gezwungen, mit äuſserst geringer Amplitude und Spannweite um die Leitlinie herumzuoscillieren, ähnlich wie ein Massenpunkt um eine Ruhelage mit kleiner Amplitude und kurzer Schwingungsdauer herumpendelt, wenn er schon bei geringer Entfernung von der Ruhelage durch eine groſse Kraft nach jener zurückgetrieben wird.

Somit ist bewiesen, daſs der in der Figur 79 punktiert gezeichnete Verlauf der Integralkurve bei kleinem Werte von m^2, d. h. bei groſsem Anfangsimpuls unmöglich ist und daſs der geschlängelte, ausgezogene Verlauf mindestens qualitativ der Wirklichkeit entspricht. Der punktiert gezeichnete Weg mag vielleicht bei schwachem Anfangsimpulse zur Geltung kommen, doch gehen wir auf diesen minder wichtigen Fall nicht ein. Die entsprechenden Überlegungen und Konstruktionen lassen sich fast Wort für Wort auf den Fall $P < 0$ übertragen; wir können daher behaupten, daſs auch in Fig. 80 die Integralkurve um die Leitlinie herumpendeln muſs und niemals erheblich von ihr abbiegen kann.

Übrigens läſst sich die hier befolgte Schluſsweise, die wir als graphische Integration bezeichnen können, sofort auf den allgemeinen Fall der Differentialgleichung

$$\frac{d^2u}{dv^2} = f(u, v)$$

übertragen, wenn die Funktion $f(u, v)$ in der Umgebung der „Leitlinie“ $f(u, v) = 0$ ein starkes Gefälle besitzt und der Anfangspunkt



der Integralkurve der Leitlinie nicht zu fern angenommen wird. Auch hier mufs die Integralkurve fortgesetzt um die Leitlinie herumpendeln.

Über die Amplitude und Spannweite der Pendelungen haben wir bisher nur gesagt, dafs sie äufserst klein sein müssen; wir fügen noch hinzu, dafs sie *um so kleiner ausfallen müssen, je kleiner die Zahl* m^2, *je gröfser also der anfängliche Bewegungsimpuls ist, und dafs sie mit zunehmender Annäherung an den Punkt* P_1 *abnehmen müssen.*

Denken wir uns, um dieses einzusehen, die Niveaulinien des Ausdrucks $f(u, v)$ konstruiert, welcher unserer Differentialgleichung zufolge die angenäherte Krümmung der Integralkurve bestimmt, in der Weise, wie dies für die speziellen Niveaulinien $f(u, v) = 0$ (die Leitlinie), und $f(u, v) = \pm \frac{1}{(m \mu \lambda)^2}$ (die beiden oben genannten Nachbarkurven) geschehen ist. Diese Niveaulinien liegen um so dichter, je kleiner m^2 ist, aufserdem verdichten sie sich in der Nähe des Punktes P_1, da sie alle durch diesen Punkt hindurch müssen. Die Dichtigkeit der Niveaulinien liefert aber direkt einen Mafsstab für die Krümmungszunahme der Integralkurve in der Nähe der Leitlinie und für ihre Tendenz, nach der Leitlinie zurückzukehren. Noch anschaulicher können wir uns den Ausdruck $f(u, v)$ als ein Relief modelliert denken, indem wir uns den absoluten Wert von $f(u, v)$ als dritte Koordinate senkrecht zur u, v-Ebene auftragen, wobei die eben genannten Niveaulinien zu Höhenlinien des Reliefs werden. Es entsteht so eine Rinne, deren Sohle in der u, v-Ebene liegt und mit unserer Leitlinie zusammenfällt und deren Böschungen beiderseitig um so steiler ansteigen, je kleiner m^2 ist und je mehr wir uns dem Punkte P_1 nähern. In letzterem stellen sich die Böschungen genau lotrecht. Wiederum wächst mit der Steilheit der Böschungen die Schnelligkeit, mit der die Integralkurve bei seitlicher Abbiegung der Leitlinie wieder zustrebt. Die Integralkurve verläuft ähnlich wie die Bahn eines schweren Punktes, der in der (reibungslos gedachten) Rinne entlang läuft, zugleich aber vermöge eines seitlichen Anfangsanstofses abwechselnd rechts und links an den Rändern etwas aufläuft. Während die bei den aufeinanderfolgenden Seitenpendelungen erreichte Höhenlage nach dem Energiegesetz dieselbe ist, wird die in horizontaler Richtung gemessene Amplitude der Seitenabweichung um so kleiner, je gröfser die Steilheit der Ränder ist; desgleichen wird die Zeitdauer der aufeinanderfolgenden Pendelungen oder, was auf dasselbe herauskommt, die längs der Sohle gemessene Spannweite der Seitenpendelungen geringer bei wachsender Steilheit der Ränder; denn die nach der Rinne zurücktreibende Kraft, d. h. die in die Böschung fallende Komponente der Schwere, ist dem

Hosted by Google

Gefälle der Böschung proportional. Die Bahn des Massenpunktes wird also, auf die horizontale Zeichenebene projiziert, was die Ausgiebigkeit der aufeinanderfolgenden Pendelungen betrifft, in der That die in der Fig. 79 und 80 dargestellte Form annehmen, welche somit auch unserer Integralkurve zukommen wird.

Die Schluſsfolgerungen, die sich von hieraus für den Ablauf der Kreiselbewegung ergeben, liegen auf der Hand. Mit wachsender Zeit nimmt der Eigenimpuls N seiner Gröſse nach ab. Fiel er anfangs in die Richtung der Figurenaxe, so ist anfangs $|N| > |n|$ und mit wachsender Zeit nähert sich N dem Werte n, d. h. v dem Werte 1. Unsere Integralkurve zeigt dann, daſs sich gleichzeitig u dem Werte 1 oder ϑ dem Werte 0 nähert. *Die Figurenaxe richtet sich also durch den Einfluſs der gleitenden Reibung allmählich auf.*

Hand in Hand mit der Aufrichtung der Figurenaxe geht natürlich ihre *Präcession* um die Vertikale von statten, deren jeweilige Geschwindigkeit sich nach Gl. (3) aus dem augenblicklichen Werte von ϑ und N bez. von u und v berechnet. Die Aufrichtung der Figurenaxe wird unterbrochen und ihre Präcession wird begleitet von kleinen *Nutationen* der Figurenaxe, die durch die Seitenpendelungen unserer Integralkurve dargestellt werden. *Diese Nutationen sterben aber in dem Maſse ab, wie sich die Figurenaxe aufrichtet und sind übrigens von Hause aus um so kleiner, je gröſser der Anfangsimpuls war*, vorausgesetzt natürlich, daſs dieser genau oder ungefähr die Richtung der Figurenaxe hatte.

Ist die aufrechte Lage erreicht, so fällt der bisherige Grund für die Abnahme des Impulses, die gleitende Reibung, fort. In der That ergiebt sich mit $u = 1$ aus Gl. (6) $dN/dt = 0$; es bleibt also von nun ab $N = n$ oder $v = 1$: *Unsere Integralkurve endigt im Punkte P_1 und der Kreisel verharrt in der aufrechten Bewegung.* Die endgültige Vernichtung des Bewegungsimpulses fällt nicht der gleitenden sondern der bohrenden Reibung zu, wie bereits im vorigen Paragraph auseinandergesetzt wurde.

§ 5. Angenäherte formelmäſsige Darstellung des Bewegungsverlaufes.

Da wir auf Grund der vorangehenden Diskussion die Bewegung der Figurenaxe graphisch beherrschen, wird es nun leicht sein, eine näherungsweise formelmäſsige Darstellung der Bewegung zu geben. Wir fügen diese nachträglich hinzu, teils um einige numerische Rechnungen anstellen zu können, teils um den in der Einleitung (pag. 5) ausgesprochenen Grundsatz zu verwirklichen, nach welchem „unsere Kenntnis der Mechanik nicht auf die Formel basiert sein solle, sondern umgekehrt die ana-

Hosted by Google

lytische Formulierung als letzte Konsequenz aus einem gründlichen Verständnis der mechanischen Verhältnisse von selbst zum Vorschein komme".

Der Gedanke bei der folgenden Näherungsrechnung besteht darin, daſs wir, was die Änderungen von ϑ angeht, für die oscillierende Integralkurve der Figuren 79 und 80 unsere Leitlinie selbst substituieren. Was wir dabei vernachlässigen, sind die Nutationen der Figurenaxe, welche die Bewegung nur vorübergehend und in geringem Grade beeinflussen, was wir aber beibehalten und in unseren Formeln zum einfachen Ausdruck bringen, ist das Aufrichten der Figurenaxe, die Abnahme des Impulsvektors und der mittlere Betrag der Präcession, d. h. alle wesentlichen Momente der Bewegung.

Wir sehen also die Gl. (14) des vorigen Paragraphen als die während der Bewegung angenähert gültige Beziehung zwischen dem Neigungscosinus $u = \cos\vartheta$ und der Impulsgröſse $v = \frac{N}{n}$ an. Um dieselbe nach v aufzulösen, schreiben wir sie folgendermaſsen:

$$v^2 - \left(u + \frac{1}{u}\right) v = -1 \mp \frac{m^2}{u}(1-u^2)^2.$$

Die beiden Wurzeln v_1, v_2 dieser quadratischen Gleichung werden:

$$v_1 = \frac{1}{2}\left(u + \frac{1}{u}\right) - \frac{1}{2}\left(u - \frac{1}{u}\right)\sqrt{1 \mp 4um^2},$$
$$v_2 = \frac{1}{2}\left(u + \frac{1}{u}\right) + \frac{1}{2}\left(u - \frac{1}{u}\right)\sqrt{1 \mp 4um^2}.$$

Wegen der auch jetzt vorauszusetzenden Kleinheit der Zahl $\pm m^2 = \frac{AP}{n^2}$ ziehen wir die Quadratwurzel nach dem binomischen Satze angenähert aus. Es ergiebt sich:

$$v_1 = \frac{1}{2}\left(u + \frac{1}{u}\right) - \frac{1}{2}\left(u - \frac{1}{u}\right)(1 \mp 2um^2) = \frac{1}{u} \mp m^2(1-u^2),$$
$$v_2 = \frac{1}{2}\left(u + \frac{1}{u}\right) + \frac{1}{2}\left(u - \frac{1}{u}\right)(1 \mp 2um^2) = u \pm m^2(1-u^2).$$

Da $u < 1$ ist, wird $v_1 > 1$, $v_2 < 1$. Die Bedeutung der beiden Wurzeln folgt aus Fig. 78. Schneiden wir nämlich die ausgezogene oder die punktierte Leitlinie jener Figur mit einer zur Abscissenaxe parallelen Geraden $u = \text{const.}$, wobei $0 < u < 1$ sein möge, so erhalten wir zwei Schnittpunkte, von denen der eine rechts von P_1, der andere links davon zwischen P_1 und P_2 liegt. Dem ersteren entspricht ein Abscissenwert $v_1 > 1$, dem letzteren ein solcher $v_2 < 1$. Wir interessieren uns nur für denjenigen Teil der Leitlinie, welcher von unserer Integralkurve umschlängelt wird, haben also nur den Wurzelwert v_1 zu be-



rücksichtigen. Gehen wir noch zu der ursprünglichen Bedeutung der Zeichen v, u und m^2 zurück, so können wir die für v_1 gefundene Formel so schreiben:

$$N = \frac{n}{\cos\vartheta} - \frac{AP}{n}\sin^2\vartheta. \tag{1}$$

Wir erkennen hieraus, *in welcher gegenseitigen Abhängigkeit* ϑ *gegen* 0 *und* N *gegen* n *konvergiert.*

Wir berechnen zweitens die Präcessionsgeschwindigkeit ψ', die zu den wechselnden Neigungen der Figurenaxe gehört. Aus (1) folgt

$$\frac{n - N\cos\vartheta}{A\sin^2\vartheta} = \frac{P}{n}\cos\vartheta.$$

Dies ist nach Gl. (3) des vorigen Paragraphen zugleich die gesuchte Präcessionsgeschwindigkeit. Man hat also

$$\psi' = \frac{P}{n}\cos\vartheta \tag{2}$$

und schlieſst, *daſs sich die absolute Gröſse der Präcessionsgeschwindigkeit beim Aufrichten der Figurenaxe etwas beschleunigt.*

Wir fragen sodann nach dem zeitlichen Verlauf der Bewegung, der ja aus unserer qualitativen Darstellung eliminiert war. Hierbei haben wir auf die Gl. (8) des vorigen Paragraphen

$$t = \mp \frac{1}{Mg\mu\varrho}\int\frac{dN}{\sin\vartheta}$$

zurückzugehen. (Das obere Vorzeichen galt bei positivem Anfangswerte von N, also bei positivem n, das untere bei negativem.) Wir berechnen dN durch ϑ und $d\vartheta$ aus Gl. (1):

$$dN = \left(\frac{n}{\cos^2\vartheta} - \frac{2AP}{n}\cos\vartheta\right)\sin\vartheta\, d\vartheta$$

und erhalten dann

$$t = \mp\frac{n}{Mg\mu\varrho}\left\{\int\frac{d\vartheta}{\cos^2\vartheta} - \frac{2AP}{n^2}\int\cos\vartheta\, d\vartheta\right\}.$$

Das doppelte Vorzeichen dürfen wir durch das einfache negative ersetzen, wenn wir dafür n mit dem Zeichen des absoluten Betrages versehen. Führen wir die Integrationen aus und bestimmen die Integrationskonstante daraus, daſs $\vartheta = \vartheta_0$ für $t = 0$ sein soll, so ergiebt sich das folgende *Gesetz für den zeitlichen Verlauf der Bewegung:*

$$t = \frac{|n|}{Mg\mu\varrho}\left\{(\operatorname{tg}\vartheta_0 - \operatorname{tg}\vartheta) - \frac{2AP}{n^2}(\sin\vartheta_0 - \sin\vartheta)\right\}. \tag{3}$$

Das zweite Glied der { } ist wegen des kleinen Faktors AP/n^2 offenbar klein gegenüber dem ersten Gliede. Dieses erste Glied zeigt uns, daſs das Aufrichten der Figurenaxe ziemlich langsam von statten geht;



denn im Zähler steht die grofse Impulskomponente n, im Nenner der kleine Reibungskoeffizient μ und der kleine Radius ϱ der Auflagefläche. *Die Zeitdauer des Aufrichtens wird um so gröfser, je gröfser der Anfangsimpuls war und je kleiner der Reibungskoeffizient μ sowie der Krümmungsradius der Auflagefläche ist.*

Der zahlenmäfsige Wert der zum Aufrichten erforderlichen Zeit ergiebt sich aus (3), wenn wir $\vartheta = 0$ setzen, zu

$$T = \frac{|n|}{Mg\mu\varrho}\left\{\operatorname{tg}\vartheta_0 - \frac{2AP}{n^2}\sin\vartheta_0\right\}. \tag{4}$$

Die aufrechte Lage wird also in endlicher Zeit erreicht; die Zeit ist bei sonst gleichen Umständen im wesentlichen der Tangente der Anfangsneigung proportional.

Es erübrigt nur noch, die Bahnkurve, die ein Punkt der Figurenaxe beschreibt, analytisch und zeichnerisch darzustellen. Wir gehen dabei einerseits von der Gl. (2)

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{P}{n}\cos\vartheta,$$

andrerseits von der aus (3) folgenden Beziehung aus:

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \mp\frac{Mg\mu\varrho}{n}\,\frac{\cos^2\vartheta}{1 - \frac{2AP}{n^2}\cos^3\vartheta}. \tag{5}$$

Durch Division folgt

$$\frac{d\psi}{d\vartheta} = \mp\frac{P}{Mg\mu\varrho}\left(\frac{1}{\cos\vartheta} - \frac{2AP}{n^2}\cos^2\vartheta\right)$$

und durch Integration

$$\psi = \mp\frac{P}{Mg\mu\varrho}\left\{\log\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\vartheta}{2}\right) - \frac{AP}{n^2}\left(\vartheta + \frac{\sin 2\vartheta}{2}\right)\right\}. \tag{6}$$

Da die Gestalt der Bahnkurve in keiner Weise von dem dem Winkel ψ vorzuschreibenden Anfangswerte ψ_0 abhängt, haben wir von der Hinzufügung einer Integrationskonstanten abgesehen.

Hier wollen wir eine unwesentliche Vernachlässigung gestatten, durch die sich das folgende vereinfacht. Wir wollen nämlich das zweite Glied der $\{\,\}$ in (6) gegen das erste wegen des Faktors AP/n^2 streichen. Ferner wollen wir, um bestimmte Vorzeichen zu haben, vorübergehend annehmen, dafs der Schwerpunkt *über* dem Stützpunkte liegt und dafs der anfängliche Impulsvektor die ungefähre Richtung der *positiven* Figurenaxe habe. Dann ist $P = +MgE$ zu setzen und in (6) das obere Vorzeichen zu wählen. Führen wir noch die schon früher benutzte Verhältniszahl $\lambda = \varrho/E$ ein, so schreibt sich Gl. (6) folgendermafsen:

Hosted by Google

$$\lambda \mu \psi = \log \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\vartheta}{2} \right)$$

oder auch

$$e^{\lambda \mu \psi} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\vartheta}{2} \right) = \frac{1 - \operatorname{tg} \vartheta / 2}{1 + \operatorname{tg} \vartheta / 2}$$

oder endlich

$$\operatorname{tg} \vartheta / 2 = \frac{1 - e^{\lambda \mu \psi}}{1 + e^{\lambda \mu \psi}}. \tag{7}$$

Dies ist die gesuchte Gleichung der Bahnkurve bei positivem P und positivem Anfangsimpulse. Sie gilt ebenso offenbar bei anderer Wahl der Vorzeichen von P und n, wenn man nur nötigenfalls den Sinn, in dem ψ gerechnet wird, umkehrt.

Um sie verzeichnen zu können, müssen wir sie irgendwie auf die Zeichenebene projizieren und zwar empfiehlt sich wie früher die *stereographische Projektion.* Wir schlagen also um den festen Punkt O die Einheitskugel, auf welcher unsere Bahnkurve verläuft, wenn der sie erzeugende Punkt der Figurenaxe den Abstand 1 von O hatte, und projizieren vom Südpol der Einheitskugel auf die Äquatorebene. Der Nordpol geht dabei in den Punkt O über, während das Bild irgend eines anderen Punktes der Einheitskugel von O den Abstand $r = \operatorname{tg} \vartheta / 2$ und das Azimuth ψ hat. r und ψ sind also gewöhnliche Polarkoordinaten des stereographischen Bildpunktes, bezogen auf den Punkt O als Anfangspunkt. In diesen Koordinaten geschrieben wird das Bild der Bahnkurve nach Gl. (7):

$$r = \frac{1 - e^{\lambda \mu \psi}}{1 + e^{\lambda \mu \psi}}. \tag{8}$$

Ihre Gestalt ist die einer *Spirale,* u. zw. läuft sie in den Punkt O als *eine gewöhnliche Archimedische Spirale* aus, während sie nach der anderen Seite hin sich *dem Einheitskreise asymptotisch nähert.*

Um dieses einzusehen, beachte man, daſs vermöge der Wahl der Integrationskonstanten in Gl. (6) der aufrechten Endlage ($\vartheta = 0$ oder $r = 0$) das Azimuth $\psi = 0$ und daſs allen früheren Lagen der Figurenaxe negative Werte von ψ entsprechen. Um also das Verhalten der Bahnkurve in der Nähe des Punktes O zu untersuchen, haben wir ψ klein vorauszusetzen und die Exponentialfunktion nach Potenzen von $\lambda \mu \psi$ zu entwickeln. Es ergiebt sich so

$$r = -\lambda \mu \frac{\psi}{2} \tag{8'}$$

d. h. die Gleichung einer Archimedischen Spirale.

Um andrerseits die Bahnkurve für weit zurückliegende Zeiten festzustellen, haben wir ψ einen groſsen negativen Wert beizulegen, also

Hosted by Google

$e^{\lambda\mu\psi}$ als klein anzusehen. r nähert sich dabei der oberen Grenze 1, die Bahnkurve strebt also asymptotisch dem Einheitskreise zu.

In der Nähe von O ist die Abnahme des Fahrstrahls r bei einem vollen Umlauf um O gegeben durch $\lambda\mu\pi$; dieselbe ist klein, weil λ und μ kleine Zahlen sind, verschwindet aber nicht bei Annäherung an O. Dagegen wird offenbar, wenn wir die Kurve rückwärts bis in die Nähe des Einheitskreises verfolgen, die Zunahme des Fahrstrahls bei einmaligem Umlauf um O mit zunehmender Näherung an den Einheitskreis verschwindend klein.

Man kann die Gestalt der Bahnkurve sehr schön experimentell feststellen, wenn man die Kreiselspitze ihren Weg auf einer dagegen gehaltenen beruſsten Fläche aufzeichnen läſst, oder, was noch empfehlenswerter ist, wenn man senkrecht zur Kreiselaxe einen kleinen Spiegel befestigt, denselben mit einem Projektionsapparat beleuchtet und den zurückgeworfenen Lichtfleck auf einem Schirm beobachtet. Die so erhaltenen Kurven haben durchaus den Charakter der hier geschilderten Spiralen, nur daſs der gleichmäſsige Verlauf der Spirale von aufgesetzten Schlängelungen (den Nutationen) unterbrochen wird, die wir bei unserer Darstellung vernachlässigt haben.

Figur 81 ist unter der Annahme $\lambda\mu = 1/10$ entworfen. Sie entspricht der Wirklichkeit insofern nicht gut, als der wirkliche Wert $\lambda\mu$ meist erheblich kleiner sein dürfte. An einer früheren Stelle (pag. 565) schätzten wir $\mu^2 = 10^{-1}$, $\lambda^2 = 10^{-3}$, also $\lambda\mu = 1/100$, was der Wirklichkeit näher kommen dürfte. Jedoch würde bei Zugrundelegung dieser Zahl die Zeichnung schon etwas undeutlich werden.

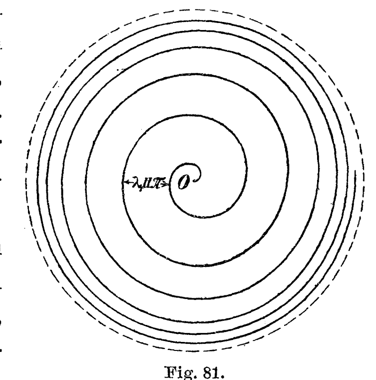


Fig. 81.

Für die folgenden Zahlenrechnungen wollen wir dagegen den letztgenannten Wert benutzen. Wir fragen uns zunächst, wie viele Windungen die Bahnkurve ausführt, bis sie von einer gegebenen Anfangslage aus im Nullpunkte endigt. Die Anfangslage sei etwa $\vartheta_0 = 60^0$. Den zugehörigen Wert des Azimuthes ψ_0, welcher negativ ausfallen muſs, entnehmen wir aus Gl. (8) oder, noch etwas genauer, aus Gl. (6), indem wir das im vorstehenden vernachlässigte Glied dieser Gleichung mitrechnen; er wird:

$$\psi_0 = -\frac{1}{\lambda\mu}\left\{\log\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\vartheta_0}{2}\right) - \frac{AP}{n^2}\left(\vartheta_0 + \frac{\sin 2\vartheta_0}{2}\right)\right\}.$$

Mit $\lambda\mu = 10^{-2}$, $\vartheta_0 = 60^0 = 1{,}05$ und dem schon früher vorausgesetzten Wert $\frac{AP}{n^2} = 1/100$ ergiebt sich

$$\psi_0 = -130{,}2.$$

Hosted by Google

Dies ist der *Anfangswert* des Winkels ψ. Da der *Endwert*, bei aufrechter Stellung der Figurenaxe, $\psi = 0$ ist, so giebt uns ψ_0 zugleich den Gesamtwinkel, um den sich der von O aus gezogene Fahrstrahl bei der Bewegung gedreht hat. Die Zahl der Windungen der Spirale wird daher

$$\frac{|\psi_0|}{2\pi} = 21.$$

Die Figurenaxe umkreist also die Vertikale eine erhebliche Anzahl von Malen, bevor sie mit ihr zusammenfällt. Die Ganghöhe der Bahnkurve wird dementsprechend in stereographischer Projektion recht gering und erheblich geringer wie im Falle der Fig. 81, wo die entsprechende Zahl von Umgängen nur 2,1 beträgt.

Wir können auch die Nutationen, obwohl sie aus unserer Betrachtung herausgefallen sind, nachträglich ihrer ungefähren Häufigkeit nach bestimmen. Es läſst sich zeigen, daſs die Periode τ der Nutationen näherungsweise denselben Wert wie bei der reibungslos vorausgesetzten pseudoregulären Präcession hat nämlich (s. Gl. (15) von pag. 305) den Wert

(9) $$\tau = \frac{2\pi A}{N}.$$

Zum Beweise gehen wir auf die Differentialgleichung (7) von pag. 558 zurück, setzen darin $\vartheta = \vartheta_1 + \vartheta_2$ und verstehen unter ϑ_1 den vorstehend studierten präcessionsähnlichen Teil der Bewegung, unter ϑ_2 die hinzukommende Nutation. ϑ_1 ist dann eine *langsam veränderliche*, ϑ_2 eine *schnell veränderliche aber kleine* Gröſse. Dementsprechend wird man ϑ_1'' gegen ϑ_2'' vernachlässigen und bei der Entwickelung von Gl. (7) nach ϑ_2 nur die erste Potenz von ϑ_2 beibehalten. Es entsteht mit Rücksicht auf die Definition von ϑ_1 aus der Gleichung der Leitlinie:

$$A\vartheta_2'' + \vartheta_2 \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta_1} \frac{(N - \cos\vartheta_1\, n)(n - \cos\vartheta_1\, N)}{A \sin^3\vartheta_1} = 0.$$

Die hier angedeutete Differentiation liefert einfach (vgl. § 9, Gl. (13)) wo eine analoge Rechnung auszuführen sein wird) N^2/A. Die Bestimmungsgleichung für ϑ_2 lautet mithin: $\vartheta_2'' + \vartheta_2 \frac{N^2}{A^2} = 0$ und liefert integriert die obige Periode.

Bedeutet andererseits T die Zeitdauer des einzelnen Präcessionsumganges und sieht man von der durch das Aufrichten der Figurenaxe bedingten geringen Beschleunigung der Präcessionsgeschwindigkeit ab, so kann man setzen:

$$\frac{2\pi}{\mathsf{T}} = \psi'$$

und nach Gl. (2):



(10) $$\frac{2\pi}{\mathsf{T}} = \frac{P}{n}\cos\vartheta.$$

Aus (9) und (10) ergiebt sich mit Rücksicht auf (1):

$$\frac{\mathsf{T}}{\tau} = \frac{nN}{AP}\frac{1}{\cos\vartheta} = \frac{n^2}{AP}\frac{1}{\cos^2\vartheta}\left(1 - \frac{AP}{n^2}\cos\vartheta\sin\vartheta\right).$$

Unter ϑ ist hierbei ein Mittelwert des Neigungswinkels ϑ während des fraglichen Präcessionsumganges verstanden. Das Verhältnis T/τ bedeutet *die Anzahl der Nutationen, die auf eine Präcession entfallen.* Diese Anzahl ist, wie wir sehen, der Gröfsenordnung nach gleich n^2/AP, also unter den obigen Zahlenannahmen gleich 100. *Die unserer Spirale sich überlagernden Schlängelungen sind also äufserst zahlreich und dicht.*

Schliefslich fragen wir noch nach dem Zahlenwerte der Zeitdauer T, in der sich die Figurenaxe aufrichtet. Diese drücken wir etwa in Einheiten der Umdrehungszeit τ_0 des Kreisels nach erfolgtem Aufrichten aus. Alsdann ist der Gesamtimpuls genau gleich n und die Länge des Rotationsvektors gleich $|n|/C$ geworden. Die Zeitdauer τ_0 ergiebt sich daher aus

$$\frac{2\pi}{\tau_0} = \frac{|n|}{C}.$$

Multiplizieren wir diese Gleichung mit Gl. (4), so entsteht:

$$\frac{T}{\tau_0} = \frac{1}{2\pi}\frac{A}{C}\frac{n^2}{AP}\frac{1}{\lambda\mu}\left\{\operatorname{tg}\vartheta_0 - \frac{2AP}{n^2}\sin\vartheta_0\right\}.$$

Mit $n^2/AP = 100$, $\lambda\mu = 1/100$, $\vartheta_0 = 60^0$ ergiebt sich

$$\frac{T}{\tau_0} = \frac{A}{C}\,2730.$$

Macht der Kreisel nach der Aufrechtstellung noch fünf Umdrehungen pro Sec., so ist $\tau_0 = 1/5$ sec. und, wenn man insbesondere $A = C$ nimmt, $T = 546$ sec. $=$ ca. 10 Minuten.

Bei unseren letzten Berechnungen sowie bei der Beschreibung der Bahnkurve ist indessen zu bedenken, dafs unsere Betrachtungen nur bis in die Nähe der aufrechten Lage, nicht bis zu dieser selbst zutreffend zu sein beanspruchen. Denn wir haben (Ungenauigkeit II) die bohrende Reibung gegenüber der gleitenden vernachlässigt, was nur bei nicht zu kleinem Winkel ϑ zulässig ist (vgl. pag. 551). Von unserer Bahnkurve müssen wir daher das letzte, in den Punkt O auslaufende Stück als unverbürgt ansehen.

Wir wollen endlich noch, indem wir in unseren Formeln $\mu = 0$ setzen, die hier betrachtete Bewegung in das System der reibungslosen Bewegungen einordnen. Wir gehen dabei aus von Gl. (5), welche mit $\mu = 0$ liefert

$$\vartheta' = 0 \text{ oder } \vartheta = \text{const.}$$

Hosted by Google

Dies ist zugleich bei verschwindender Reibung die Gleichung der Bahnkurve. Aus den Gl. (1) und (2) folgt dann, daſs auch N und ψ' konstant werden. *Bei verschwindender Reibung geht also die hier betrachtete Bewegung in die reguläre Präcession über.* Deshalb können wir sie als „eine Präcessions-ähnliche" oder eine „durch Reibung gedämpfte Präcession" bezeichnen. Nehmen wir andrerseits die Nutationen mit in Rechnung, die in unseren Formeln nicht zum Ausdruck kamen, die sich aber, wie wir im vorigen Paragraphen sahen, unserer Bewegung überlagern, so tritt unsere jetzige Betrachtung in direkte Beziehung zu den früheren Untersuchungen über die *pseudoreguläre Präcession* und zeigt uns, wie diese wichtigste reibungslose Bewegung durch die Reibung modifiziert wird.

§ 6. Über einen beim Ansatz der Reibungsprobleme naheliegenden Fehler. Nachträgliche Rechtfertigung der obigen Behandlung und Hinweis auf das Experiment.

Der gegenwärtige Paragraph hat zunächst den Zweck, unsere früheren Angaben über die Bestimmung der Reibungsarbeit und des Reibungsmomentes (vgl. § 3 pag. 550) zu rechtfertigen bezw. zu beschränken. Dabei werden gewisse charakteristische Unterschiede zwischen den Reibungskräften oder allgemeiner gesprochen solchen Kräften, die ihrer Gröſse oder Richtung nach von der Geschwindigkeit des Systems abhängen, und denjenigen Kräften zur Sprache kommen, die sich nach Gröſse und Richtung allein durch die jeweilige Lage des Systems bestimmen und die man bei den Entwickelungen der theoretischen Mechanik in erster Linie im Auge zu haben pflegt.

Wir haben pag. 550 die Arbeit einer unendlich kleinen Drehung um eine horizontale und eine vertikale Axe gesondert berechnet und haben die erste als die Arbeit der gleitenden, die letztere als die der bohrenden Reibung angesprochen. In Formeln war

$$(1)\qquad \begin{cases} d\mathfrak{A}_1 = -\,\mu R \varrho \Omega \sin\alpha\, dt \\ d\mathfrak{A}_2 = -\,\mu' R \Omega \cos\alpha\, dt = -\,\mu R a \Omega \cos\alpha\, dt, \end{cases}$$

wo a eine Länge von der Gröſsenordnung des Radius des Berührungskreises bedeutete. Die gesamte Reibungsarbeit also, welche bei der unendlich kleinen Drehung $\Omega\, dt$ um eine zur Vertikalen um den Winkel α geneigte Axe zu leisten ist, wäre hiernach

$$(2)\qquad d\mathfrak{A} = -\,\mu R \Omega\,(\varrho \sin\alpha + a\cos\alpha)\, dt.$$

Ist nun dieses Verfahren ohne weiteres zulässig?

Wir wollen zunächst den einfachen Fall eines einzelnen Massenpunktes betrachten, der sich in einer Ebene einmal unter dem Einfluſs


Hosted by Google

einer schon durch die Lage des Punktes bestimmten Kraft P, das andere Mal unter dem Einfluſs einer Reibungskraft bewegt. Die Reibungskraft W ist zwar, wenn wir das Coulombsche Reibungsgesetz zu Grunde legen, der Gröſse nach von der Geschwindigkeit unabhängig, nämlich gleich μR, wo R die Reaktion unserer Ebene auf den Punkt bedeutet, aber der Richtung nach von ihr abhängig, nämlich der Richtung der augenblicklichen Geschwindigkeit entgegengesetzt. Auf dem Wegstückchen ds beträgt nun die Arbeit das eine Mal

$$d\mathfrak{A} = P \cos(P, ds)\, ds, \tag{3}$$

das andere Mal

$$d\mathfrak{A} = -\,W ds = -\,\mu R ds. \tag{4}$$

Andererseits berechnen wir diese beiden Arbeitsgröſsen, indem wir den Weg ds in zwei rechtwinklige Komponenten dx und dy auflösen. Auf dem Wege dx leistet P die Arbeit $P_x\, dx$, wenn P_x die Komponente von P nach der x-Axe bedeutet. Entsprechend berechnet sich die Arbeit auf dem Wege dy; als Gesamtarbeit ergiebt sich daher:

$$d\mathfrak{A} = P_x\, dx + P_y\, dy, \tag{3'}$$

was bekanntlich mit (3) stimmt.

Wollen wir im zweiten Falle ebenso verfahren, so würden wir sagen: Führen wir zunächst die Bewegung dx aus, so wird die Arbeit von W auf diesem Wege gleich $-\,W dx = -\,\mu R dx$; denn bei der Bewegung dx wirkt die Reibung dem Sinne der Bewegung entgegen, also in der Richtung der negativen x-Axe und ist der Gröſse nach durch Reibungskoeffizienten und Gegendruck R gegeben. Ebenso wird die Arbeit auf dem Wege dy gleich $-W dy$. Im Ganzen erhielte man so:

$$d\mathfrak{A} = -\,W(dx + dy) = -\,\mu R\,(dx + dy), \tag{4'}$$

was ersichtlich mit (4) nicht stimmt.

Die Berechnung der Reibungsarbeit aus den Arbeiten der Teilbewegungen ist also, in dieser Weise ausgeführt, unstatthaft. Man erkennt aber leicht, wie man diese Berechnung zu korrigieren hat, wenn man an der Zerlegung der Bewegung in die Komponenten dx und dy festhalten will: Man muſs die bei der thatsächlichen Bewegung ds auftretende Reibung W in zwei Komponenten $W_x = W\frac{dx}{ds}$ und $W_y = W\frac{dy}{ds}$ zerlegen und die Arbeit dieser Komponenten bei den Teilbewegungen dx und dy bestimmen. Alsdann ergiebt sich richtig und in Übereinstimmung mit (4):

$$d\mathfrak{A} = -\,(W_x\, dx + W_y\, dy) = -\,\mu R\,\frac{dx^2 + dy^2}{ds}.$$

Ähnlich hat man allemal bei Reibungswirkungen und allgemeiner bei Kräften, die in irgend einer Weise von der Geschwindigkeit ab-

hängen, zu unterscheiden: *zwischen der Arbeit, welche bei den Teilbewegungen, in die man die thatsächliche Bewegung zerlegen mag, zu leisten wäre, wenn eine solche Teilbewegung für sich betrachtet wird und gesondert vorhanden wäre; und zwischen derjenigen Arbeit, welche die bei der thatsächlichen Bewegung auftretenden Kräfte bei den gedachten Teilbewegungen leisten* *). Für den Ansatz der Bewegungsgleichungen hat man die zweite Berechnungsweise der Arbeit zu Grunde zu legen, während die erstgenannte hierbei irreführend sein würde.

Im § 3 wurde aber diese Unterscheidung bei der Aufstellung der vorstehend unter (1) wiedergegebenen Ausdrücke nicht hervorgehoben. Vielmehr wurde die bei der Rotation $\Omega \sin \alpha \, dt$ um eine horizontale Axe zu leistende Arbeit $d\mathfrak{A}_1$ und die bei der Rotation $\Omega \cos \alpha \, dt$ um eine vertikale Axe zu leistende Arbeit $d\mathfrak{A}_2$ gesondert berechnet, als ob die eine oder die andere Rotation allein vorhanden wäre; und es wurde stillschweigend angenommen, daſs sich die Arbeit $d\mathfrak{A}$, die bei der Rotation Ωdt um eine beliebig geneigte Axe zu leisten ist, additiv aus jenen Arbeitsgröſsen $d\mathfrak{A}_1$ und $d\mathfrak{A}_2$ zusammensetzt. Dies ist nach den obigen Erfahrungen nicht zutreffend; wir müssen daher die Berechnung der Arbeit $d\mathfrak{A}$ nachträglich kontrollieren.

Hierbei dürfen wir, um die bohrende Reibung auf gleitende Reibung zurückführen zu können, den Berührungskreis zwischen der die Figurenaxe begrenzenden Kugel und der den Kreisel tragenden Pfanne nicht in einen Punkt zusammenziehen. Allerdings tritt dann die pag. 548 hervorgehobene Schwierigkeit auf, daſs die Verteilung des Gegendruckes R auf die Punkte des Berührungskreises statisch unbestimmt wird. Da wir auf elastische Verhältnisse nicht eingehen können, müssen wir eine Hülfsannahme machen. Die nächstliegende Annahme ist, daſs sich der Gegendruck R gleichmäſsig auf den Umfang des Berührungskreises verteilt. Unterscheiden wir also die Punkte des Kreises durch einen um den Mittelpunkt des Berührungskreises herum gezählten Winkel β, so wird auf das Kreis-Element $d\beta$ der Bruchteil $\frac{d\beta}{2\pi} R$ des ganzen Gegendruckes R kommen. Sicherlich ist diese Verteilung bei merklicher Neigung der Figurenaxe nicht ganz zutreffend; sie möge aber der Einfachheit wegen zugelassen werden.

Die folgende Zeichnung bezieht sich auf die Ebene des Berührungskreises (Fig. 82). Der Radius des Berührungskreises heiſse a; ϱ sei

*) Eine interessante, technisch wichtige Folgerung hieraus zieht H. Lorenz in seinem Lehrbuch der technischen Physik, München 1902, S. 185: Der in Bewegung befindliche Steuerschieber einer Dampfmaschine läſst sich trotz des groſsen auf ihm lastenden Dampfdruckes senkrecht gegen seine Bewegungsrichtung fast reibungslos verschieben.


Hosted by Google

der Radius der begrenzenden Kugel. Die beiden Teilbewegungen sind je durch einen Pfeil angedeutet: die Drehung $\Omega \cos \alpha \, dt$ um die Vertikale durch O, welche sich in der Figur in den Mittelpunkt des Berührungskreises projiziert und die Drehung $\Omega \sin \alpha \, dt$ um eine horizontale Axe durch O, welche um den Kugelradius ϱ oberhalb der Zeichenebene liegend zu denken ist und die sich in den Durchmesser DD projizieren mögen. Von diesem Durchmesser aus möge auch das Azimuth β gemessen werden.

Um die Reibungswirkung in einem beliebigen Punkte P feststellen zu können, mufs man die Bewegung dieses Punktes kennen. Sie setzt sich aus zwei Teilbewegungen du und dv zusammen; du entspricht der Vertikalkomponente des Rotationsvektors und ist tangential zum Berührungskreise gerichtet; dv entspricht der Horizontalkomponente desselben und liegt eigentlich nicht genau in der Zeichenebene. Vielmehr ergiebt sich die genauere Richtung von dv als das gemeinsame Lot auf der Horizontalkomponente des Rotationsvektors und dem kürzesten Abstande des fraglichen Punktes P von der Axe jener Komponente. Sofern aber die Pfanne flach und daher der Radius a klein gegen den Radius ϱ ist, ist die Neigung von dv gegen die Zeichenebene nur gering. Deshalb möge es gestattet sein, dv in die Zeichenebene fallend anzusehen. Im gleichen Sinne wird es erlaubt sein, den Abstand des Punktes P von der Axe der horizontalen Rotationskomponente, welcher eigentlich $b = \sqrt{\varrho^2 - a^2 \cos^2 \beta}$ ist, einfach gleich ϱ zu setzen. Hiernach ergiebt sich als Gröfse der Teilbewegungen

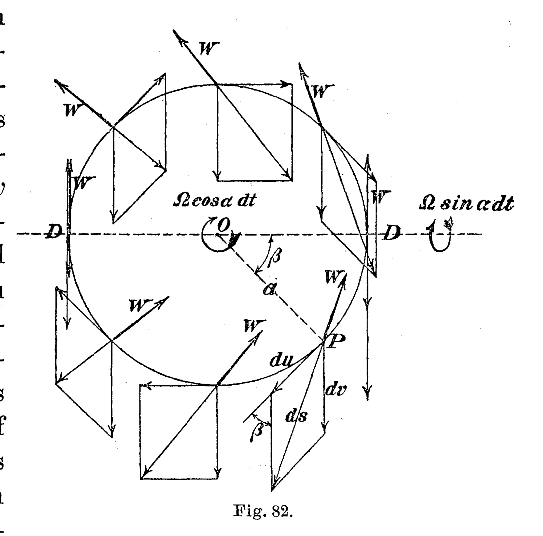


Fig. 82.

$$du = \Omega \cos \alpha \, a dt, \qquad dv = \Omega \sin \alpha \, b dt = \Omega \sin \alpha \, \varrho dt.$$

Die Gesamtbewegung von P folgt hieraus zu

$$ds = \sqrt{du^2 + dv^2 + 2 du \, dv \cos \beta}.$$

In jedem Elemente $d\beta$ des Berührungskreises tritt nun eine Reibungskraft W auf, deren Richtung der Richtung von ds entgegengesetzt ist und deren Gröfse zufolge unserer Annahme über die Verteilung des

Gegendruckes gleich $\mu R \frac{d\beta}{2\pi}$ ist. In der Figur ist W für eine Anzahl äquidistanter Punkte der Kreisperipherie konstruiert. Die Arbeit dieser Reibungskraft wird gleich

$$-\mu R \frac{d\beta}{2\pi} ds,$$

die Gesamtarbeit auf dem ganzen Berührungskreise daher gleich

$$d\mathfrak{A} = -\frac{\mu R}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} d\beta\, ds.$$

Tragen wir den angegebenen Wert für ds ein, so können wir schreiben:

$$d\mathfrak{A} = -\frac{\mu R \Omega dt}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} d\beta \sqrt{a^2\cos^2\alpha + \varrho^2\sin^2\alpha + 2a\varrho\cos\alpha\sin\alpha\cos\beta}.$$

Dies ist ein elliptisches Integral. Statt β führen wir als Integrationsvariable $\gamma = \beta/2$ ein; unser Integral nimmt dann die Form eines Legendreschen Integrals zweiter Gattung an; es wird nämlich:

$$(5)\qquad d\mathfrak{A} = -\mu R \Omega\,(a\cos\alpha + \varrho\sin\alpha)\, dt\, \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} d\gamma \sqrt{1 - k^2\sin^2\gamma},$$

wobei zur Abkürzung gesetzt ist:

$$(6)\qquad k^2 = \frac{4a\varrho\cos\alpha\sin\alpha}{(a\cos\alpha + \varrho\sin\alpha)^2} = \frac{4\frac{\varrho}{a}\operatorname{tg}\alpha}{\left(1 + \frac{\varrho}{a}\operatorname{tg}\alpha\right)^2}.$$

Der somit festgestellte Wert (5) der Reibungsarbeit unterscheidet sich aber von dem oben angegebenen Werte (2) nur durch den Faktor

$$(7)\qquad \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} d\gamma \sqrt{1 - k^2\sin^2\gamma} = \frac{2}{\pi}E(k),$$

wo die Bezeichnung E im Sinne von Legendre gebraucht ist. Die Kontrolle des Ausdrucks (2) wird also darin zu bestehen haben, daſs wir uns fragen, inwieweit der letztgenannte Faktor von der Einheit abweicht.

Zu dem Ende verzeichnen wir in Fig. 83 einerseits die Gröſse von k, andererseits die von $\frac{2}{\pi}E(k)$ für wechselnde Werte der Abscisse $x = \frac{\varrho}{a}\operatorname{tg}\alpha$.

Was zunächst die Linie für k betrifft, so zeigt man leicht, daſs dieselbe für den Abscissenwert $x = 1$ ein Maximum besitzt; der zu-

Hosted by Google

gehörige Wert von k ist gleich 1. Für $x = \frac{1}{2}$ oder $x = 2$ ergiebt sich $k^2 = \frac{8}{9}$, $k = 0{,}94$, für $x = \frac{1}{4}$ oder $x = 4$ wird $k^2 = \frac{16}{25}$, $k = 0{,}80$, für $x = \frac{1}{8}$ oder $x = 8$ folgt $k = 0{,}63$ u. s. f.; für $x = 0$ und $x = \infty$ wird gleicherweise $k = 0$. Wir haben also bei $x = 0$ einen steilen Anstieg,

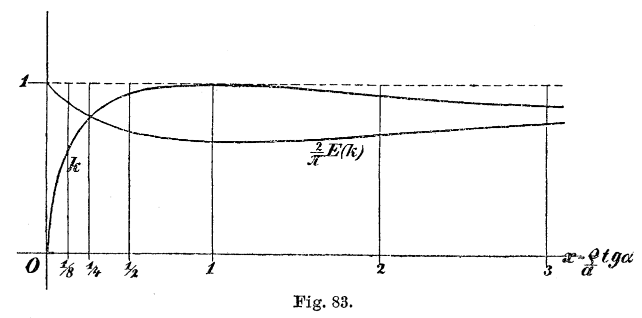


Fig. 83.

dann ein flaches Maximum und von hier aus einen asymptotischen Abfall zu Null.

Zur Verzeichnung der Linie für $\frac{2}{\pi} E(k)$ genügen etwa die den meisten Logarithmentafeln beigegebenen Tabellen der Ellipsenquadranten. Dieselben zeigen beispielsweise, daſs für die soeben genannten Werte von $k = 0{,}94$, $k = 0{,}80$, $k = 0{,}63$ bezw. $\frac{2}{\pi} E(k)$ gleich wird 0,71, 0,81, 0,89. Für den maximalen Wert $k = 1$ hat $\frac{2}{\pi} E(k)$ seinen Kleinstwert $\frac{2}{\pi} = 0{,}64$, für $k = 0$ seinen Gröſstwert 1.

Nun entspricht der Abscissenwert $x = 1$ derjenigen Neigung α von Rotationsaxe und Vertikaler, für welche $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{\varrho}$ wird, wo also die Rotationsaxe gerade durch die Peripherie des Berührungskreises hindurchgeht. Dementsprechend bedeutet ein Abscissenwert $x < 1$, daſs die Rotationsaxe das Innere des Berührungskreises trifft, während $x > 1$ heiſst, daſs sie auſserhalb daran vorbeigeht. Wenn, wie wir voraussetzen, der Berührungskreis klein ist, (a klein gegen ϱ), so muſs die Rotationsaxe schon merklich senkrecht stehen, wenn sie die Peripherie des Berührungskreises treffen oder durch das Innere desselben hindurchgehen soll. Zu allen einigermaſsen beträchtlichen Neigungen der Rotationsaxe gehören in unserer Figur groſse Werte der Abscisse x, mithin Werte von $\frac{2}{\pi} E(k)$, die der Einheit nahe kommen. Auch im umgekehrten Falle, wenn die Rotationsaxe dicht am Mittelpunkte des Berührungskreises vorbeigeht, wird der Wert von $\frac{2}{\pi} E(k)$ nahezu gleich 1.

In diesen beiden Fällen stimmt also unser jetziger Ausdruck (5) für die Reibungsarbeit mit dem früheren Ausdruck (2) merklich über-

Hosted by Google

ein. *Unsere frühere Behandlung ist also gerechtfertigt* 1) *wenn die Rotationsaxe einen merklichen Winkel mit der Vertikalen bildet*, 2) *wenn sie fast genau mit dieser zusammenfällt.* Nur von diesen beiden Fällen haben wir aber früher gesprochen, von dem ersten Falle in § 4 und 5 (allmähliches Aufrichten der Figurenaxe durch die gleitende Reibung), von dem zweiten am Schluſs von § 3 (allmähliches Absterben der aufrechten Kreiselbewegung infolge der bohrenden Reibung). Wenn dagegen die Rotationsaxe den Berührungskreis trifft oder in seiner Nähe innerhalb oder auſserhalb vorbeigeht, d. h. wenn $x = \frac{\varrho}{a} \operatorname{tg} \alpha$ weder sehr klein noch sehr groſs ist, muſs der frühere Arbeitsausdruck durch Hinzufügung des Faktors $\frac{2}{\pi} E(k)$ korrigiert werden, welcher im ungünstigsten Falle ($x = 1$) jenen Ausdruck auf 64% des früheren Betrages herabsetzt.

Es ist auch von unserem jetzigen Standpunkte aus zulässig und naheliegend, die gesamte Reibungsarbeit $d\mathfrak{A}$ in zwei Teile $d\mathfrak{A}_1$ und $d\mathfrak{A}_2$ aufzulösen, von denen der eine dem augenblicklichen Drehwinkel um eine horizontale Axe $\Omega \sin \alpha \, dt = d\omega_h$ proportional ist und *Arbeit der gleitenden Reibung* genannt werden kann und von denen der andere dem augenblicklichen Drehwinkel um die Vertikale $\Omega \sin \alpha \, dt = d\omega_v$ proportional ist und *Arbeit der bohrenden Reibung* heiſsen möge. Mit Benutzung der eben genannten Winkel können wir nach (5) und (7) schreiben

$$d\mathfrak{A} = d\mathfrak{A}_1 + d\mathfrak{A}_2 = -\mu R (\varrho \, d\omega_h + a \, d\omega_v) \frac{2}{\pi} E(k)$$

und können dementsprechend definieren:

$$(8) \qquad \begin{cases} d\mathfrak{A}_1 = -\mu R \varrho \frac{2}{\pi} E(k) \, d\omega_h, \\ d\mathfrak{A}_2 = -\mu R a \frac{2}{\pi} E(k) \, d\omega_v. \end{cases}$$

Diese Ausdrücke stimmen wieder mit den früheren Werten aus Gl. (1) überein, wenn $\frac{2}{\pi} E(k)$ merklich gleich 1 ist, wenn also die Rotationsaxe entweder merklich von der Vertikalen abweicht oder wenn sie fast genau mit ihr zusammenfällt. Im ersten Falle ergiebt sich der frühere Schluſs, daſs die Arbeit der bohrenden Reibung klein gegen die Arbeit der gleitenden Reibung wird, daſs man also von der bohrenden Reibung näherungsweise absehen darf, wie wir es vermöge unserer Vernachlässigung (II) thaten. Im anderen Falle ist umgekehrt die Arbeit der bohrenden Reibung die überwiegende. Tritt keiner dieser beiden Fälle ein, so sind die früheren Ausdrücke (1) durch Hinzufügung des Faktors $\frac{2}{\pi} E(k)$ zu korrigieren.

Hosted by Google

Es ist schliefslich durchaus folgerichtig, die *Momente der gleitenden und bohrenden Reibung* von unserem jetzigen Standpunkte aus folgenderweise zu definieren. Man bemerke allgemein, dafs das Moment einer Kraft um eine Axe erklärt werden kann als das Verhältnis der Arbeit, welche die Kraft bei einer unendlich kleinen Drehung um die fragliche Axe leistet, zur Gröfse des Drehwinkels. In unserem Falle handelt es sich einerseits um eine horizontale Axe und den zugehörigen Drehwinkel $d\omega_h$. Die in Betracht kommende Reibungsarbeit ist die Arbeit der gleitenden Reibung $d\mathfrak{A}_1$. Wir definieren daher als Moment der gleitenden Reibung die Gröfse

$$M_1 = \frac{d\mathfrak{A}_1}{d\omega_h} = -\mu R \varrho \frac{2}{\pi} E(k).$$

Andrerseits gehört zu der Drehung $d\omega_v$ um die Vertikale die Arbeit $d\mathfrak{A}_2$ der bohrenden Reibung. Als Moment der bohrenden Reibung ist daher zu bezeichnen

$$M_2 = \frac{d\mathfrak{A}_2}{d\omega_v} = -\mu R a \frac{2}{\pi} E(k).$$

Diese Werte stimmen natürlich wieder mit den in § 3 pag. 550 angegebenen Werten von M_1 und M_2 überein, wenn die Rotationsaxe einen merklichen Winkel gegen die Vertikale bildet und zeigen uns überdies, wie die früheren Werte zu korrigieren sind, wenn jene Voraussetzung nicht erfüllt ist. Die negativen Vorzeichen, welche bei unserer jetzigen Definition zu den Ausdrücken für M_1 und M_2 hinzugetreten sind, waren früher in der besonderen Festsetzung enthalten, dafs die Momente dem Sinne nach der zugehörigen Rotationskomponente entgegengesetzt sind. —

Bevor wir unsere Betrachtungen über die Reibung beim Kreisel mit festem Stützpunkte beschliefsen, wünschen wir nochmals auf das *Experiment* als den eigentlichen Wertmesser unserer theoretischen Resultate hinzuweisen. Wir haben häufig Versuche mit dem auf pag. 1 abgebildeten, von Rozé konstruierten Kreisel angestellt und konnten hierbei die vorstehend geschilderten theoretischen Ergebnisse in allgemeinen Umrissen durchaus bestätigen. Dieses allerdings nur unter der Beschränkung, dafs der dem Kreisel ursprünglich erteilte Impuls hinreichend grofs war, einer Beschränkung, die aber auch unseren sämtlichen theoretischen Untersuchungen ausdrücklich zu Grunde gelegt wurde.

Bei nur mäfsigem Impuls verlaufen die Erscheinungen lange nicht so typisch und durchsichtig wie bei starkem Impuls. Alsdann spielen offenbar störende Ursachen, die wir im Einzelnen nicht übersehen

Hosted by Google

können, wie die besonderen Verhältnisse an der Unterstützungsstelle, eine zu groſse Rolle gegenüber den eigentlichen Trägheitswirkungen, die wir allein theoretisch beherrschen. Die einfache schematische Beschreibung der Reibungseinflüsse, die in den vorigen Paragraphen enthalten ist, paſst auf solche Fälle nicht, und braucht auch nach den eingeführten beschränkenden Voraussetzungen darauf nicht zu passen.

Ist aber der Impuls hinreichend stark, so treten regelmäſsig die öfters genannten Erscheinungen auf: Die Figurenaxe richtet sich auf, indem sie einen Spiralkegel beschreibt, und zwar gleichviel ob der Schwerpunkt über oder unter der Unterstützungspfanne liegt; die Präcessionsgeschwindigkeit beschleunigt sich dabei, entsprechend Gl. (2) von pag. 570, Nutationen der Axe, die man anfangs etwa absichtlich durch einen Schlag erzeugt hat, sterben in dem Maſse ab, wie sich die Figurenaxe der aufrechten Stellung nähert.

Trotzdem läſst eine solche allgemeine Bestätigung der Theorie noch viel zu wünschen übrig, da sie über die quantitativen Verhältnisse nichts besagt. Zu einer gründlichen experimentellen Bestätigung wäre es erforderlich, zunächst die Masse und Massenverteilung des Versuchskreisels, also die Gröſsen M, P, A, C durch Wägung und Schwingungsbeobachtung zu bestimmen, ferner den ursprünglichen Wert sowie die Abnahme der Umdrehungszahl und somit indirekt die Gröſse des Impulses N durch stroboskopische Methoden während des einzelnen Experimentes festzustellen und endlich die wechselnden Lagen des Kreisels zuverlässig zu registrieren.

Wir sind uns wohl bewuſst, daſs nach dieser Richtung hin unsere Behandlung sehr lückenhaft ist und wünschen dringend, daſs in künftigen Untersuchungen zur irdischen Dynamik die experimentelle Prüfung und die mathematische Überlegung mehr als gleichwertige und gleichunentbehrliche Faktoren neben einander behandelt werden möchten.

§ 7. Einfluſs des Luftwiderstandes auf die Kreiselbewegung.

Neben der Reibung wirkt offenbar auch der Luftwiderstand bei der Kreiselbewegung als eine Energie verbrauchende Ursache mit. Indem der Kreisel die umgebende Luft in Bewegung setzt und indem sich diese Bewegung teils weiter entfernten Luftschichten mitteilt, teils durch die Reibung zwischen ungleich bewegten Schichten verzögert wird, flieſst dauernd Bewegungsenergie von der bewegten Kreiselmasse in das umgebende Mittel ab. Dieser Umstand kann nicht umhin, auf die Kreiselbewegung selbst zurückzuwirken.

Hosted by Google

Die Gröſse des Einflusses wird verschieden sein je nach der Form des Kreisels und nach der Art seiner Bewegung. Mit einer Vergröſserung der Oberfläche wird der Einfluſs im allgemeinen wachsen, mit einer Vermehrung der Masse bei gleichbleibender Oberfläche abnehmen. Ein Kreisel von groſsen Dimensionen wird daher vom Luftwiderstande weniger in Mitleidenschaft gezogen werden, wie ein geometrisch-ähnlicher Kreisel von kleineren Abmessungen, weil das Verhältnis Rauminhalt (oder Masse) zu Oberfläche bei jenem gröſser ist wie bei diesem. Hat der Kreisel, wie es bei pneumatischem Antrieb der Fall ist, Schaufeln, gegen welche der antreibende Luftstrom gelenkt wird, so wird beim weiteren Bewegungsverlauf der verzögernde Einfluſs der Luft erheblich gröſser sein wie bei einem Körper mit glatter Oberfläche etc.

Auch die Art der Bewegung nimmt auf die Wirkung des Luftwiderstandes Einfluſs. Hat die Oberfläche Rotationssymmetrie um die Figurenaxe, so wird sich der einfachen Drehung um die Figurenaxe nur ein geringer Luftwiderstand entgegensetzen. Dagegen wird die fortschreitende Bewegung der Figurenaxe in höherem Grade durch den Luftwiderstand behindert werden, und zwar die schnellen Nutationen wieder in höherem Grade wie die langsame Präcessionsbewegung. Man wird also erwarten dürfen, daſs die Nutationen in schnellerem Zeitmaſs abklingen wie die langsame Präcessionsbewegung und diese wieder schneller wie die Eigendrehung um die Figurenaxe, daſs überhaupt durch den Luftwiderstand und ähnlich durch die anderen Energieverzehrenden Wirkungen allemal auf eine Ausgleichung der ursprünglich vorhandenen Unregelmäſsigkeiten und auf eine Vereinfachung der Bewegungsform hingearbeitet wird.

Wie man hiernach sieht, ist das Problem des Luftwiderstandes reichlich kompliziert. Um es in Strenge zu behandeln, wäre es nötig, neben den Differentialgleichungen der Kreiselbewegung die hydrodynamischen Gleichungen für die Bewegung des umgebenden Mittels in ihrem wechselseitigen Zusammenhange zu berücksichtigen, wie schon gelegentlich des ähnlichen ballistischen Problems (pag. 535) bemerkt wurde. Wir kämen dabei zu einer Aufgabe wie sie unter dem Namen „Bewegung eines Körpers in einer Flüssigkeit“ von mathematischer Seite vielfach behandelt worden ist*), nur daſs die grundlegende Voraussetzung aller einschlägigen Behandlungen, daſs nämlich die Flüssigkeit inkompressibel und reibungslos sei und daſs ihr durch den

*) Eine zusammenfassende Darstellung der betr. Arbeiten giebt A. E. H. Love in der Encyklopädie der mathem. Wissensch. Bd. IV, Art. 16, Hydrodynamik II.

Hosted by Google

Körper eine Bewegung mit Geschwindigkeitspotential erteilt werde, fallen zu lassen wäre, da sie den Verhältnissen des Luftwiderstandes gar zu schlecht entspricht. Mit dieser Voraussetzung fällt aber auch die Möglichkeit einer strengen und eleganten mathematischen Behandlung. Wir müssen daher auf eine Untersuchung des Luftwiderstandes im Anschluſs an die vorhandene mathematische Litteratur von vornherein verzichten.

Unsere Behandlung soll vielmehr derjenigen nachgebildet sein, die der Physiker bei der Bestimmung der durch Luftwiderstand gedämpften Pendelschwingungen, der Schwingungen einer Galvanometernadel mit magnetischer oder Flüssigkeitsdämpfung etc. einzuschlagen pflegt. Man nimmt hierbei an, daſs man die Dämpfungswirkung wenigstens bei kleinen Ausschlägen dadurch hinreichend genau berücksichtigen könne, daſs man der Bewegungsgleichung ein der augenblicklichen Geschwindigkeit proportionales Glied hinzufügt. Ähnlich wollen wir annehmen, *daſs die Wirkung des Luftwiderstandes auf die Kreiselbewegung annähernd durch eine der augenblicklichen Rotationsgeschwindigkeit* Ω *nach Gröſse und Axe proportionale entgegengerichtete Drehkraft beschrieben werden kann.* Lösen wir etwa Ω nach den drei Hauptaxen des Körpers in die Komponenten p, q, r auf, so werden wir also die Komponenten des Luftwiderstandsmomentes nach eben jenen Axen gleich $-\lambda p$, $-\lambda q$, $-\lambda r$ setzen. Vielleicht wäre es angezeigt, den Koeffizienten von r kleiner zu wählen als die von p und q, also die Komponenten des Momentes gleichzusetzen $-\lambda_1 p$, $-\lambda_1 q$, $-\lambda_2 r$ $(\lambda_2 < \lambda_1)$, weil durch die Drehung um die Figurenaxe, wie oben bemerkt, die Luft weniger mitgenommen wird, wie durch eine Drehung der Figurenaxe um eine dazu senkrechte Axe. Da aber unser Ansatz auch dann nicht beanspruchen könnte, den Verhältnissen der Wirklichkeit genau zu entsprechen, so werden wir uns mit der zuerst genannten weitgehenden Schematisierung des Ansatzes begnügen, der übrigens für Späteres eine besondere Bedeutung hat. Ferner werden wir natürlich von allen sonstigen Reibungseinflüssen jetzt absehen.

Wir wollen uns zunächst fragen, wie *die Bewegung des kräftefreien Kreisels* (Poinsot-Bewegung) durch den so aufgefaſsten Luftwiderstand modifiziert wird. Die Behandlung wird hier sehr einfach. Bei der Poinsotbewegung gehen wir am besten von den Eulerschen Gleichungen (vgl. pag. 142) aus, die sich für den symmetrischen Kreisel $(B = A)$ unter Hinzufügung unserer Luftwiderstandsglieder folgendermaſsen schreiben:

$$A\frac{dp}{dt} = (A - C)\,qr - \lambda p,$$

Hosted by Google

$$A\frac{dq}{dt} = (C-A)\,rp - \lambda q,$$
$$C\frac{dr}{dt} = \qquad\qquad - \lambda r.$$

Aus der letzten Gleichung erkennt man zunächst, daſs die Eigenrotation r nach dem folgenden Gesetz von ihrem Anfangswerte r_0 aus (entsprechend $t = 0$) abnimmt:

$$r = r_0 e^{-\frac{\lambda t}{C}}. \tag{1}$$

Die beiden ersten Gleichungen fassen wir nach Multiplikation mit 1 und i zu der komplexen Gleichung zusammen:

$$A\frac{d(p+iq)}{dt} = (C-A)\,ir\,(p+iq) - \lambda(p+iq). \tag{2}$$

Durch Division mit $p + iq$ und Eintragung des Wertes von r aus (1) ergiebt sich:

$$\frac{d\log(p+iq)}{dt} = \frac{C-A}{A}\,ir_0 e^{-\frac{\lambda t}{C}} - \frac{\lambda}{A}$$

und durch Integration:

$$\log(p+iq) = -\frac{\lambda t}{A} - \frac{C-A}{A}\frac{C}{\lambda}\,ir_0 e^{-\frac{\lambda t}{C}} + \text{const.}$$

Bestimmen wir noch die Integrationskonstante durch die Anfangswerte p_0, q_0, so können wir schreiben:

$$p + iq = (p_0 + iq_0)\, e^{-\frac{\lambda t}{A} + \frac{C-A}{A}\frac{C}{\lambda}\,ir_0\left(1 - e^{-\frac{\lambda t}{C}}\right)}. \tag{3}$$

Man erkennt hieraus, daſs der absolute Betrag von $p + iq$, d. i. die Länge der äquatorialen Komponente des Drehungsvektors nach einem ähnlich einfachen Gesetz abnimmt wie die Eigenrotation r. Man hat nämlich

$$\sqrt{p^2 + q^2} = \sqrt{p_0^{\,2} + q_0^{\,2}}\, e^{-\frac{\lambda t}{A}}. \tag{4}$$

Bezeichnet man ferner mit α denjenigen Winkel, den die genannte Komponente mit ihrer Anfangslage einschlieſst, indem man setzt:

$$\frac{p+iq}{\sqrt{p^2+q^2}} = \frac{p_0 + iq_0}{\sqrt{p_0^{\,2} + q_0^{\,2}}}\, e^{i\alpha},$$

so ergiebt sich aus (3) für α der Wert

$$\alpha = \frac{C-A}{A}\frac{C}{\lambda}\, r_0\left(1 - e^{-\frac{\lambda t}{C}}\right). \tag{5}$$

Nach den Gleichungen (1), (4) und (5) läſst sich nun der allgemeine Charakter der Bewegung folgendermaſsen schildern: *Sowohl die Kompo-*

Hosted by Google

nente des Rotationsvektors nach der Figurenaxe wie die dazu senkrechte äquatoriale Komponente werden durch den Luftwiderstand stetig bis auf Null verkürzt; die Zeitdauer dieses Vorganges ist unendlich; die Anzahl der Umgänge, welche der Rotationsvektor unterdessen um die Figurenaxe ausführt, ist endlich und berechnet sich aus (5) *zu*

$$\frac{\alpha_\infty}{2\pi} = \frac{C-A}{A}\,\frac{C}{\lambda}\,\frac{r_0}{2\pi};$$

sie ist um so gröſser, je gröſser die anfängliche Eigenrotation war und je kleiner die Dämpfungskonstante λ ist; mit verschwindendem λ, wo die Bewegung eine reguläre Präcession wird, wächst jene Zahl, wie es sein muſs, ins Unendliche.

Interessante Unterschiede ergeben sich je nach dem Verhältnis der Hauptträgheitsmomente A und C. Wir bestimmen etwa die jeweilige Neigung β des Rotationsvektors gegen die Figurenaxe, indem wir nach (1) und (4) bilden

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\sqrt{p^2+q^2}}{r} = \frac{\sqrt{p_0{}^2+q_0{}^2}}{r_0}\,e^{-\lambda t\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{C}\right)}.$$

Führen wir noch die anfängliche Neigung β_0 ein, so können wir auch schreiben:

$$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\beta_0\, e^{-\lambda t\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{C}\right)}. \tag{6}$$

Der Winkel β wächst hiernach kontinuierlich an oder nimmt ständig ab, je nachdem C kleiner oder gröſser als A ist. *Die Rotationsaxe strebt in jedem Falle einer Axe gröſsten Hauptträgheitsmomentes zu, im Falle des abgeplatteten Trägheitsellipsoides* ($C > A$) *der Figurenaxe, im Falle des verlängerten Trägheitsellipsoides* ($C < A$) *einer äquatorialen Axe.* Im Falle des Kugelkreisels, wo jede Axe als Axe eines gröſsten Hauptträgheitsmomentes aufgefaſst werden kann, wird die Rotationsaxe durch den Luftwiderstand natürlich überhaupt nicht umgelagert; hier besteht vielmehr die einzige Wirkung desselben in einer allmählichen Schwächung der Rotationsgeschwindigkeit.

Den Unterschied zwischen beiden Fällen können wir noch deutlicher beschreiben, wenn wir an den Verlauf des Polhodiekegels denken. *Im Falle $C > A$ verengert sich der Polhodiekegel im Verlaufe der Bewegung und zieht sich schlieſslich auf die Figurenaxe zusammen, nachdem er sie eine endliche Anzahl von Malen umschlungen hat; im Falle $C < A$ erweitert er sich und läuft, abermals nach einer endlichen Anzahl von Umgängen, in die Äquatorebene des Kreisels fächerartig aus**).

*) Hätten wir den oben genannten allgemeineren Ansatz gemacht, bei welchem zwischen λ_1 und λ_2 unterschieden wird, so würden wir als Bedingung

Hosted by Google

Wir wollen etwa, um beide Fälle durch eine Figur veranschaulichen zu können, den Polhodiekegel mit einer im Körper festen Ebene schneiden, die wir im Abstande 1 von O senkrecht zur Figurenaxe legen. Nennen wir den Durchstoſsungspunkt jener Ebene mit der Figurenaxe O', den mit der augenblicklichen Rotationsaxe P, so ist die Entfernung $\varrho = O'P$ mit $\operatorname{tg}\beta$, ihr Anfangswert ϱ_0 mit $\operatorname{tg}\beta_0$ identisch. Der Winkel, um den sich der Vektor $O'P$ gegen seine Anfangslage $O'P_0$ gedreht hat, ist der oben berechnete Winkel α Die entstehende Kurve der aufeinander folgenden Punkte P, d. h. die Spur des Polhodiekegels in der Zeichenebene, wird also in Polarkoordinaten durch ϱ und α bestimmt. Führen wir als eine bequeme Zeiteinheit die Dauer τ einer vollen Kreiselumdrehung zu Beginn der Bewegung ein, so wird $r_0 = \frac{2\pi}{\tau}\cdot$ Benutzen wir überdies für die reinen Zahlengröſsen $\frac{C}{A} - 1$ und $\frac{\lambda\tau}{C}$ die Abkürzungen γ und δ, so können wir (6) und (5) folgendermaſsen schreiben:

$$(7) \qquad \frac{\varrho}{\varrho_0} = e^{-\gamma\delta\frac{t}{\tau}}, \qquad \frac{\alpha}{2\pi} = \frac{\gamma}{\delta}\left(1 - e^{-\delta\frac{t}{\tau}}\right).$$

Fig. 84.

Fig. 85.

In den Figuren 84 und 85 haben wir $\gamma = \pm\frac{1}{2}$, $\delta = \frac{1}{10}$ vorausgesetzt. Die Anzahl der Umläufe unserer Kurve um O' wird 5, die Zeit, in der der Abstand ϱ auf den e^{ten} Teil seines Anfangswertes verkürzt bez. auf das e-fache angewachsen ist, wird $t = 20\,\tau$. Beide Kurven

für eine Verengerung bez. Erweiterung des Polhodiekegels die folgende erhalten haben:

$$\lambda_1 C > \lambda_2 A \quad \text{bez.} \quad \lambda_1 C < \lambda_2 A.$$

Es könnte hiernach unter Umständen vorkommen, daſs die Rotationsaxe der Figurenaxe zustrebt, auch wenn dieselbe keine Axe gröſsten Hauptträgheitsmomentes ist.

Hosted by Google

können als Spirallinien bezeichnet werden, stimmen aber nicht genau mit einer der bekannten Spiralformen überein.

Übrigens können wir uns auch ohne Rechnung von der gegensätzlichen Wirkung des Luftwiderstandes im Falle $C > A$ und $C < A$ Rechenschaft geben. Wir knüpfen dabei an die Figuren 86 und 87

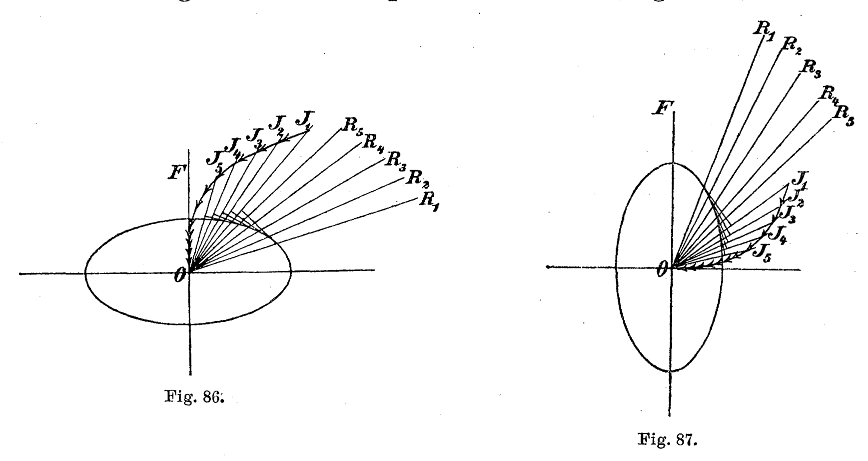


Fig. 86.

Fig. 87.

an, welche zunächst ebenso wie die Figuren 14 und 13 von pag. 107 und 106 zum Ausdruck bringen, daſs im Falle eines abgeplatteten Trägheitsellipsoides $C > A$ der Impulsvektor zwischen Figurenaxe und Rotationsvektor liegt, daſs dagegen im Falle eines verlängerten Trägheitsellipsoides der Rotationsvektor zwischen Impuls- und Figurenaxe enthalten ist. Nun besteht nach unserer Grundannahme die Wirkung des Luftwiderstandes in einem Moment, welches dem Drehungsvektor nach Gröſse und Axe proportional ist. Dieses haben wir mit dem jeweiligen Impulsvektor zusammenzusetzen, indem wir entgegengesetzt parallel zu der Richtung des Rotationsvektors an den Endpunkt des Impulsvektors einen Pfeil von der Länge $\lambda \Omega \Delta t$ antragen. *In Fig. 86 wird der Impulsvektor hierdurch der Figurenaxe genähert, in Fig. 87 von ihr entfernt.*

Der abgeänderten Lage und Gröſse des Impulses entspricht auch eine etwas andere Lage der Rotationsaxe und eine etwas verschiedene Gröſse der Rotationsgeschwindigkeit. In den Figuren ist die geometrische Konstruktion angedeutet, durch welche nach Früherem die Richtung der Rotationsaxe aus der der Impulsaxe bestimmt werden kann. Wir haben nun die obige Konstruktion zu wiederholen, indem wir das Moment des Luftwiderstandes entsprechend der abgeänderten Lage und Gröſse der Rotationsaxe dem Impuls hinzufügen. Wie man sieht fährt hierbei der Impuls und gleichzeitig auch der Rotationsvektor fort, sich

Hosted by Google

in Fig. 86 der Figurenaxe zu nähern, in Fig. 87 sich von ihr zu entfernen; gleichzeitig nimmt Impuls und Rotation an Gröſse ständig ab.

Um dies Verfahren streng zu machen, müſste man natürlich das zu Grunde gelegte Zeitintervall Δt unbegrenzt abnehmen lassen, so daſs der Endpunkt des Impulses nicht einen gebrochenen Linienzug sondern eine kontinuierliche Kurve im Körper beschriebe. Überdies wäre es nötig, die Änderungen zu berücksichtigen, die der Impuls im Körper vermöge der „resultierenden centrifugalen Drehkraft“ erfährt (vgl. pag. 144). Da aber diese nach Axe und Gröſse gleich dem vektoriellen Produkt aus Impuls- und Rotationsvektor ist, so steht sie auf der Ebene unserer Zeichnung anfangs senkrecht und beeinfluſst weder die Gröſse des Impulses noch seine Neigung gegen die Figurenaxe. Die Wirkung jener Drehkraft besteht vielmehr nur darin, daſs die zusammengehörigen Lagen von Impuls- und Rotationsaxe um einen mit fortschreitender Bewegung wachsenden Winkel aus der Zeichenebene herausdrehen werden, derart daſs der Endpunkt des Impulses nicht eine ebene, sondern eine um die Figurenaxe spiralig gewundene Kurve beschreibt. Die genaue Gestalt dieser Kurve ist im übrigen in den obigen Rechnungen enthalten, da sich ja die Koordinaten des Impuls-Endpunktes relativ zum Körper nur durch die Faktoren A und C von den Komponenten p, q, r des Rotationsvektors unterscheiden.

Aber auch die Gestalt der vom Impuls-Endpunkt *im Raume* beschriebenen Kurve ist nach dem vorstehenden im wesentlichen klar. Gegen den Raum verschiebt sich der Impuls-Endpunkt jeweils entgegengesetzt parallel der Rotationsaxe. Diese selbst nähert sich nach den vorigen Figuren mehr und mehr der Impulsaxe und dreht sich überdies um deren augenblickliche Lage, da sich die Figurenaxe um die augenblickliche Lage der Rotationsaxe dreht und durch die Lage von Figuren- und Impulsaxe auch die Lage der Rotationsaxe bestimmt ist. Man schlieſst hieraus, daſs der Endpunkt des Impulsvektors im Raum eine Schraubenlinie von abnehmender Weite der Windungen um eine gewisse mittlere Richtung beschreiben muſs, wie sie etwa durch die nebenstehende Figur*) schematisch angedeutet wird. Der Impulsvektor bleibt also nicht wie bei der idealen Poinsot-Bewegung im Raume genau konstant, wohl aber bleibt seine mittlere Richtung konstant und die Schwankungen um die mittlere Lage nehmen im Verlauf der Bewegung ab.

O

Fig. 88.

Die Bewegung der Figurenaxe im Raume erweist sich wieder für

*) Die Spirallinie geht natürlich abwechselnd hinter und vor der Mittellinie vorbei, was in der Figur nicht deutlich genug zum Ausdruck kommt.

Hosted by Google

die beiden Fälle $C > A$ und $C < A$ grundsätzlich verschieden. Im ersteren Falle strebt die Figurenaxe einer Richtung zu, die mit der schlieſslichen Richtung der Rotationsaxe, also auch mit der der Impulsaxe übereinstimmt, im letzteren Falle steht sie schlieſslich senkrecht auf diesen Richtungen. Bezeichnen wir also etwa die mittlere Richtung der Impulsaxe im Raume als die Vertikale so können wir sagen: *Bei dem abgeplatteten Kreisel wird die Figurenaxe durch den Luftwiderstand aufgerichtet, bei dem verlängerten wird sie gesenkt.* Nachdem die Bewegung erloschen ist, d. h. nach unendlich langer Zeit steht die Figurenaxe im ersten Falle vertikal, im zweiten horizontal.

Mit Rücksicht auf den Luftwiderstand müssen wir unsere frühere Stabilitätsunterscheidung beim symmetrischen Kreisel (vgl. pag. 132 und 133) einer grundsätzlichen Revision unterziehen. Wir sagten früher: *die gleichförmige Rotation um die Figurenaxe ist eine stabile, die um eine äquatoriale Axe eine labile Bewegungsform.* Beides ist nur halb richtig, wenn wir an die Wirkung des Luftwiderstandes denken. Wir erteilen dem Kreisel eine Rotation genau um die Figurenaxe. Diese ist auch bei Berücksichtigung des Luftwiderstandes eine mögliche permanente Bewegungsform, insofern als die Rotationsaxe im Körper und im Raume ungeändert bleibt und nur die Rotationsgeschwindigkeit allmählich abnimmt. Fand die anfängliche Rotation aber nicht genau um die Figurenaxe statt oder wird sie durch einen Zusatzimpuls etwas abgelenkt, so verhält sich der abgeplattete Kreisel umgekehrt wie der verlängerte. Beim abgeplatteten Kreisel strebt die Rotationsaxe vermöge des Luftwiderstandes, sich mit der Figurenaxe zu vereinigen, und steht alsbald merklich im Raume still. Beim verlängerten Kreisel entfernt sich die Rotationsaxe, wenn sie anfangs auch nur beliebig wenig von der Figurenaxe abwich, mehr und mehr von dieser, desgleichen die Impulsaxe. Oder, anders ausgedrückt: Die Figurenaxe, die anfangs merklich mit der Rotations- und der Impulsaxe zusammenfiel, stellt sich im Verlaufe der Bewegung schlieſslich senkrecht dazu. Wir erkennen so: *Die Rotation um die Figurenaxe ist mit Rücksicht auf den Luftwiderstand bei dem abgeplatteten Kreisel stabil, bei dem verlängerten labil.* Das Umgekehrte gilt für die Rotation um eine äquatoriale Axe.

Die vorstehenden Ausführungen decken sich, soweit sie analytischen Charakters sind, teilweise mit Überlegungen, welche Stone*) im Hinblick auf die Entwickelungsgeschichte der Erde angestellt hat. Von geologischer Seite ist vielfach die Hypothese ausgesprochen, daſs

*) On the possibility of a change in the position of the earth's axis due to a frictional action connected with the phenomena of the tides. Monthly notices of the astronomical Society, London, März 1867.

die Rotationsaxe der Erde in früheren geologischen Perioden einmal eine andere Lage im Erdkörper gehabt haben möge. Läſst sich diese Annahme mit der Thatsache, daſs die Rotationsaxe jetzt fast genau mit der Polaraxe zusammenfällt, auf Grund einer Reibungswirkung von der Art des hier vorausgesetzten Luftwiderstandes (Gezeitenreibung) vereinen? Da die Erde ein abgeplatteter symmetrischer Kreisel und ihre Polaraxe eine Axe gröſsten Hauptträgheitsmomentes ist, wäre es nach dem Vorhergehenden an sich möglich. Indessen werden wir im nächsten Kapitel mit Rücksicht auf die zahlenmäſsigen Umstände des Vorganges zu einer negativen Beantwortung der gestellten Frage geführt werden. —

Wir ergänzen die obigen Betrachtungen nunmehr durch Berücksichtigung der Schwere. Dafür wollen wir aber im Folgenden von der Ungleichheit der Trägheitsmomente absehen, also einen schweren *Kugelkreisel* betrachten. Während bei dem kräftefreien Kugelkreisel die Rotation auch bei Berücksichtigung des Luftwiderstandes dauernd um eine im Raum und im Körper feste Axe stattfindet, wird beim schweren Kugelkreisel das Endergebnis sein müssen, daſs die durch O gehende Schwerpunktsaxe schlieſslich in allen Fällen senkrecht nach unten weist. Den Prozeſs, durch welchen dieses erzielt wird, werden wir näherungsweise darzulegen haben.

Bei dem schweren Kreisel ist es, wie öfter bemerkt, bequem, die Eulerschen Winkel und die Lagrangeschen Gleichungen zu benutzen. Wir bestimmen zunächst die in den Lagrangeschen Gleichungen vorkommenden Komponenten (oder Momente) des Luftwiderstandes hinsichtlich der drei Koordinaten φ, ψ, ϑ. Sie mögen Φ, Ψ, Θ heiſsen und sind den senkrechten Projektionen des Drehungsvektors (oder des in Fig. 76 verdeutlichten, aus den Strecken $\varphi', \psi', \vartheta'$ bestehenden Linienzuges) auf die Figurenaxe, die Vertikale und die Knotenlinie proportional. Nennt man den Proportionalitätsfaktor wie früher λ, so findet man nach Fig. 76:

$$(8) \quad \Phi = -\lambda(\varphi' + \psi' \cos\vartheta), \ \Psi = -\lambda(\psi' + \varphi' \cos\vartheta), \ \Theta = -\lambda\vartheta'.$$

Die zugehörigen Impulskomponenten heiſsen N, n und $[\Theta]$; wie z. B. aus den Gl. (2) des vierten Paragraphen hervorgeht, hat man im Falle des Kugelkreisels:

$$(9) \quad N = A(\varphi' + \psi' \cos\vartheta), \ n = A(\psi' + \varphi' \cos\vartheta), \ [\Theta] = A\vartheta'.$$

Die Lagrangeschen Gleichungen lauten, wenn T die lebendige Kraft des Kugelkreisels bedeutet:

$$\frac{dN}{dt} = \Phi, \ \frac{dn}{dt} = \Psi, \ \frac{d[\Theta]}{dt} - \frac{\partial T}{\partial \vartheta} = P \sin\vartheta + \Theta.$$

Hosted by Google

Mit Rücksicht auf (8) und (9) und den in Gl. (4) des vierten Paragraphen angegebenen Wert von $\partial T/\partial\vartheta$ können wir schreiben:

$$\frac{dN}{dt} = -\frac{\lambda}{A}N, \quad \frac{dn}{dt} = -\frac{\lambda}{A}n, \tag{10}$$

$$A\vartheta'' + \lambda\vartheta' = P\sin\vartheta - \frac{(n - N\cos\vartheta)(N - n\cos\vartheta)}{A\sin^3\vartheta}. \tag{11}$$

Die Gleichungen (10) bedingen, ähnlich wie beim kräftefreien Kreisel, eine exponentielle Abnahme der Impulskomponenten nach dem Gesetze:

$$N = N_0 e^{-\frac{\lambda t}{A}}, \quad n = n_0 e^{-\frac{\lambda t}{A}}; \tag{12}$$

das Verhältnis beider Komponenten bleibt dabei konstant; denn es ist $N : n = N_0 : n_0$. Indem wir die Werte (12) einsetzen, vereinfacht sich (11) wie folgt:

$$A\vartheta'' + \lambda\vartheta' = P\sin\vartheta - e^{-\frac{2\lambda t}{A}} \frac{(n_0 - N_0\cos\vartheta)(N_0 - n_0\cos\vartheta)}{A\sin^3\vartheta}. \tag{13}$$

Wir gehen hier wie bei dem früheren Reibungsproblem auf „Präcessions-ähnliche Bewegungen“ aus. Da bei der regulären Präcession $\vartheta =$ const. ist, wollen wir jetzt nach solchen Bewegungen fragen, für die ϑ' und ϑ'' klein sind. In erster Näherung setzen wir daher die linke Seite gleich Null und folgen damit einem Verfahren, welches als „Methode der langsamen Bewegungen“ auſserordentlich viele bewuſste oder unbewuſste Anwendungen auf allen Gebieten findet. Der Sinn dieses Verfahrens besteht darin, daſs man eine hinreichend langsame Bewegung näherungsweise als eine Aneinanderreihung von Gleichgewichtslagen auffaſst, daſs man also von der Trägheit des Systems, die offenbar um so weniger ins Gewicht fällt, je langsamer die Bewegung ist, absieht. Dies Verfahren liefert in vielen Fällen eine brauchbare erste Annäherung an den wirklichen Bewegungsverlauf, eine Annäherung, die wir im vorliegenden Falle durch Berechnung einer zweiten Näherung kontrollieren werden.

Wir bestimmen also $\cos\vartheta$ als Funktion von t aus der Gleichung:

$$\left(\frac{n_0}{N_0} - \cos\vartheta\right)\left(\frac{N_0}{n_0} - \cos\vartheta\right) = \frac{AP}{n_0 N_0}\sin^4\vartheta\, e^{\frac{2\lambda t}{A}}. \tag{14}$$

Wir setzen einen starken Anfangsimpuls voraus, nehmen also an, daſs AP/N_0^2 klein sei; von derselben Gröſsenordnung ist $AP/n_0 N_0$. Fällt der Anfangsimpuls überdies nahezu in die Richtung der Figurenaxe, so wird n_0/N_0 ein echter Bruch, der etwa dem Cosinus eines Hülfswinkels ϑ_0 gleichgesetzt werden kann. Wir unterscheiden den Anfang der Bewegung (t klein) und das Ende derselben (t sehr groſs).

a) *t klein.* Die rechte Seite von (14) ist wegen $AP/n_0 N_0$ klein; auf der linken Seite muſs daher einer der beiden Faktoren ebenfalls klein sein.

Hosted by Google

Dies kann nur der Faktor $\frac{n_0}{N_0} - \cos\vartheta = \cos\vartheta_0 - \cos\vartheta$ sein. Wir setzen dementsprechend $\cos\vartheta = \cos\vartheta_0 + \varepsilon$ und vernachlässigen höhere Potenzen von ε. Aus (14) folgt:

$$-\varepsilon\left(\frac{1}{\cos\vartheta_0} - \cos\vartheta_0\right) = \frac{AP}{n_0 N_0}\sin^4\vartheta_0\, e^{\frac{2\lambda t}{A}},$$

$$\varepsilon = -\frac{AP}{N_0^{\,2}}\sin^2\vartheta_0\, e^{\frac{2\lambda t}{A}}$$

und

$$\cos\vartheta = \cos\vartheta_0 - \frac{AP}{N_0^{\,2}}\sin^2\vartheta_0\, e^{\frac{2\lambda t}{A}}. \tag{15}$$

Mit dem gleichen Grade der Annäherung gilt:

$$\vartheta = \vartheta_0 + \frac{AP}{N_0^{\,2}}\sin\vartheta_0\, e^{\frac{2\lambda t}{A}}. \tag{15'}$$

Wir schlieſsen daraus, daſs zu Beginn der Bewegung ϑ wächst, die Figurenaxe also sich senkt, wenn P positiv ist, d. h. wenn der Schwerpunkt auf der positiven Figurenaxe liegt. Im umgekehrten Falle nimmt ϑ ab, die Figurenaxe hebt sich also, während die Schwerpunktsaxe, die mit der negativen Figurenaxe identisch ist, sich senkt. Der Anfangswert ϑ stimmt ungefähr mit unserem Hülfswinkel ϑ_0 überein.

b) *t groſs.* Das Produkt $\frac{AP}{n_0 N_0} e^{\frac{2\lambda t}{A}}$ wird beliebig groſs, wenn t über alle Grenzen wächst. Da die linke Seite von (14) endlich bleibt, muſs $\sin\vartheta$ mit wachsendem t klein werden; $\cos\vartheta$ wird daher gleich ± 1. Für $\cos\vartheta = +1$ wird die linke Seite von (14) gleich

$$-\frac{(N_0 - n_0)^2}{n_0 N_0},$$

für $\cos\vartheta = -1$ wird sie gleich

$$+\frac{(N_0 + n_0)^2}{n_0 N_0}.$$

Vergleicht man die Vorzeichen der rechten und linken Seite in (14), so erkennt man, daſs $\cos\vartheta = +1$ im Falle $P < 0$, $\cos\vartheta = -1$ im Falle $P > 0$ gilt. In beiden Fällen ist die Schwerpunktsaxe gegen Ende der Bewegung senkrecht nach unten gerichtet. Die formelmäſsige Darstellung von ϑ gegen Ende der Bewegung lautet daher:

$$\begin{cases} P > 0 \qquad \sin\vartheta = \pi - \vartheta = \sqrt[2]{\dfrac{N_0 + n_0}{\sqrt{AP}}}\, e^{-\frac{\lambda t}{2A}}, \\[2ex] P < 0 \qquad \sin\vartheta \qquad = \vartheta = \sqrt[2]{\dfrac{N_0 - n_0}{\sqrt{-AP}}}\, e^{-\frac{\lambda t}{2A}}. \end{cases} \tag{16}$$

Hosted by Google

Der graphische Verlauf der durch (14) bestimmten Abhängigkeit zwischen ϑ und t wird schematisch durch die beiden Kurven der Fig. 89 veranschaulicht.

Natürlich ist es noch keineswegs ausgemacht, daſs unsere durch ziemlich willkürliche Vernachlässigung einiger Glieder der Differentialgleichung (13) gefundenen Formeln den wirklichen Verlauf der Präcessions-ähnlichen Bewegung approximieren. Jedenfalls ist hierzu noch der Nachweis erforderlich, daſs die vernachlässigten Glieder thatsächlich klein gegenüber den beibehaltenen ausfallen. Indem wir jetzt nachträglich diesen Nachweis liefern, werden wir gleichzeitig die Möglichkeit zeigen, die bisherigen Annäherungen schrittweise zu verbessern.

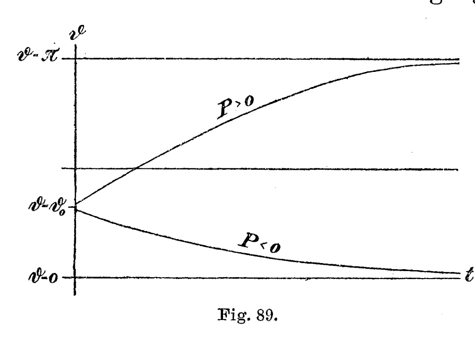


Fig. 89.

a) *t klein.* Wir berechnen die linke Seite der Gl. (13) auf Grund der Formel (15′). Es ergiebt sich

$$(17)\qquad A\vartheta'' + \lambda\vartheta' = \frac{6\lambda^2}{A}\cdot\frac{AP}{N_0^{\,2}}\sin\vartheta_0\, e^{\frac{2\lambda t}{A}}.$$

Das Verhältnis dieses Ausdrucks zu dem ersten Gliede der rechten Seite von (13), welches wir näherungsweise gleich $P\sin\vartheta_0$ schreiben können, wird

$$6\,\frac{\lambda^2}{N_0^{\,2}}\,e^{\frac{2\lambda t}{A}}.$$

Die Gröſsenordnung dieses Verhältnisses wird, da bei kleinem t die Exponentialgröſse nur mäſsige Werte hat, durch die Zahl $\lambda^2/N_0^{\,2}$ bestimmt. Zufolge der Einführung des Proportionalitätsfaktors λ bedeutet aber $2\pi\lambda$ denjenigen Zusatzimpuls, welchen der Luftwiderstand bei einer vollen Umdrehung um irgend eine Axe ausübt. Wir dürfen annehmen, daſs dieser erheblich kleiner ist, als der Eigenimpuls des Kreisels oder anders ausgedrückt, daſs die Trägheitswirkungen der Luft äuſserst gering sind verglichen mit den Trägheitswirkungen des Kreisels. Unsere Kontrolle der obigen Näherungslösung hat also ein befriedigendes Ergebnis gehabt, da sie zeigt, daſs die vernachlässigten Glieder der Differentialgleichung in der That von geringerer Ordnung wie die beibehaltenen waren.

Die bisherige Lösung läſst sich jetzt leicht durch Berücksichtigung der linken Seite von (13) korrigieren. Wir setzen, auſser in dem Aus-

Hosted by Google

schlag gebenden Gliede $n_0 - N_0 \cos\vartheta$, überall in Gl. (13) unsere erste Näherung (15) ein; für die linke Seite benutzen wir dabei den Ausdruck (17); auf der rechten Seite haben wir nach (15) zu setzen:

$$\sin\vartheta = \sin\vartheta_0 \left(1 + \frac{AP}{N_0^2}\cos\vartheta_0\, e^{\frac{2\lambda t}{A}}\right),$$

$$N_0 - n_0\cos\vartheta = N_0 \sin^2\vartheta_0 \left(1 + \frac{AP}{N_0^2}\cos\vartheta_0\, e^{\frac{2\lambda t}{A}}\right).$$

Nach einigen formalen Vereinfachungen und bei Vernachlässigung höherer Potenzen der kleinen Glieder finden wir

$$n_0 - N_0\cos\vartheta = \frac{AP}{N_0}\sin^2\vartheta_0\, e^{\frac{2\lambda t}{A}} \left\{1 + \left(\frac{3AP}{N_0^2}\cos\vartheta_0 - \frac{6\lambda^2}{N_0^2}\right) e^{\frac{2\lambda t}{A}}\right\}$$

und hieraus:

$$(18) \qquad \cos\vartheta = \cos\vartheta_0 - \frac{AP}{N_0^2}\sin^2\vartheta_0\, e^{\frac{2\lambda t}{A}} \left\{1 + \left(\frac{3AP}{N_0^2}\cos\vartheta_0 - \frac{6\lambda^2}{N_0^2}\right) e^{\frac{2\lambda t}{A}}\right\}.$$

Dies ist die gesuchte Korrektion von (15), die wir als eine zweite Näherung anzusehen haben, da nunmehr die Quadrate und Produkte der kleinen Gröſsen AP/N_0^2 und λ^2/N_0^2 beibehalten sind. Ersichtlich enthält unser Verfahren den Keim zu einer beliebig fortzusetzenden Potenzentwicklung nach eben jenen kleinen Gröſsen; wir brauchten nur, um zu dieser zu gelangen, aus der zweiten Näherung eine dritte etc. zu berechnen. Mit wachsendem t würde sich die Konvergenz der Entwickelung verschlechtern, da in (18) die Potenzen der genannten kleinen Gröſsen von den entsprechenden Potenzen des Faktors $e^{2\lambda t/A}$ begleitet werden. Aus diesem Grunde und wegen der Umständlichkeit der so entstehenden Formeln begnügen wir uns mit der zweiten Näherung.

b) *t groſs.* Auch hier gilt es zunächst, nachzuweisen, daſs in Gl. (13) die linke Seite bei der Aufstellung der Näherungslösung (16) vernachlässigt werden durfte. Wir berechnen zu dem Ende die vernachlässigten Terme nach Gl. (16) und finden, je nachdem $P \gtrless 0$ ist,

$$A\vartheta'' + \lambda\vartheta' = \pm\frac{1}{4}\frac{\lambda^2}{A}\sin\vartheta.$$

Das Verhältnis dieses Ausdrucks zu dem ersten Gliede $P\sin\vartheta$ der rechten Seite von (13) beträgt

$$\pm\frac{1}{4}\frac{\lambda^2}{AP}.$$

Wir dürfen annehmen, daſs λ^2 klein ist gegen die gleichbenannte Gröſse AP, was etwa auf die Annahme hinauskommt, daſs der Einfluſs des Luftwiderstandes auf die Kreiselbewegung klein ist gegenüber der Schwerewirkung. Jedenfalls ist unter der genannten Annahme die

Hosted by Google

Vernachlässigung der linken Seite von (13) in erster Näherung gerechtfertigt.

Gehen wir auch hier auf dem oben beschriebenen Wege zu einer zweiten Näherung über, so finden wir, wenn wir die Fälle $P \gtrless 0$ durch ein doppeltes Vorzeichen unterscheiden:

$$\sin\vartheta = \sqrt{\frac{N_0 \pm n_0}{\sqrt{\pm AP}}}\, e^{-\frac{\lambda t}{2A}}\left(1 \pm \frac{1}{16}\frac{\lambda^2}{AP}\right), \tag{19}$$

also eine Formel desselben Charakters wie (16). Auch hier könnte man zu einer dritten etc. Näherung fortschreiten.

Die für die erste Näherung entworfene schematische Figur 89 kann uns ebensowohl zur Veranschaulichung dieser zweiten Näherung dienen. Übrigens werden sich dieser Figur noch Nutationen von der Periode der Kreiselumdrehung überlagern können, die von den Anfangsbedingungen der Bewegung abhängen und sich im Verlaufe der Bewegung abglätten. Unsere Kurve aus Fig. 89 kann sich nur bei geeignet gewählten Anfangsbedingungen (und auch da nur näherungsweise) einstellen, ähnlich wie die reguläre Präcession bei dem idealen Kreisel. Im Allgemeinen wird sie nicht die Integralkurve selbst sondern nur die „Leitlinie“ der Integralkurve darstellen, um welche sich die letztere mit abnehmenden Oscillationen herumschlängelt, ähnlich wie in den Figuren 79 und 80 des vierten Paragraphen.

Bei nicht kugelförmigem Trägheitsellipsoid liegen die Verhältnisse wesentlich komplizierter. Hier kann der Fall eintreten, daſs die Figurenaxe wegen der kombinierten Wirkung von Schwere und Luftwiderstand nach der Vertikalen hinstrebt, daſs sie aber wegen der Verschiedenheit der Hauptträgheitsmomente von dieser abgelenkt wird. Welcher dieser Einflüsse die Oberhand gewinnen wird, läſst sich ohne ein tieferes Eingehen nicht entscheiden.

§ 8. Die Elastizität des Kreiselmaterials.

So unentbehrlich der Begriff des starren Körpers für Naturwissenschaft und Technik ist, so sicher ist es, daſs er in der Wirklichkeit nur grob angenähert wird. Auch der in Bewegung gesetzte Kreisel wird sich nicht nur wie ein starrer Körper als Ganzes bewegen, sondern er wird gleichzeitig den durch die Bewegung hervorgerufenen Spannungen etwas nachgebend sich deformieren. Die Frage ist nur, ob solche Formänderungen unter irgend welchen Umständen merklich werden. Diese Frage ist gerade in demjenigen Falle akut geworden, wo wir vielleicht am ehesten geneigt sein möchten, die Vorstellung der starren Konsti-

Hosted by Google

tution festzuhalten, im Falle unserer Erde. Nicht nur ist die Gestalt der Erde in dauernder Weise durch ihre Umdrehung beeinflufst und von derjenigen verschieden, die sie annehmen würde, wenn sie eines Tages zu rotieren aufhören würde; sondern die Gestalt der Erde ändert sich auch, wenn sich die Drehaxe im Erdkörper umlagert, also von ihrer normalen oder mittleren Lage, in der sie mit der Figurenaxe der Erde zusammenfällt, etwas abweicht. Direkt ist eine solche Formänderung natürlich nicht mefsbar; sie übt aber eine Rückwirkung auf die Bewegung der Erde, nämlich auf den Wechsel der Drehaxe im Erdkörper aus, eine Rückwirkung, die sehr wohl der Messung zugänglich ist. Wir kommen im nächsten Kapitel auf diese Verhältnisse im Zusammenhang zurück. Hier gilt es, die späteren Diskussionen vorzubereiten und zu zeigen, dafs entsprechende Fragen bei jeder Art Kreiselproblem auftreten, wenngleich ihnen bei den üblichen Abmessungen und Formen unserer Apparate kaum eine nennenswerte Bedeutung zukommen dürfte.

Indem wir die Verhältnisse der Erde im Auge behalten, betrachten wir einen Kreisel *von der Form eines abgeplatteten Rotationsellipsoides.* Die Massenverteilung im Inneren des Ellipsoides sei homogen, den Schwerpunkt desselben denken wir uns unterstützt, sodafs wir nur die kräftefreie Bewegung zu betrachten haben, die beim starren symmetrischen Kreisel, wie wir wissen, eine reguläre Präcession ist. Unser Interesse werden wir auf die Präcessionsdauer und den Einflufs, den hierauf die Elastizität des Materials nimmt, richten.

Hinsichtlich der Benennung ist im Auge zu behalten, dafs gerade im Falle der Erde die hier zu studierende Präcessionsbewegung als *freie Nutation* (spezieller, sofern man vom Einflufs der Elastizität absieht, als *Eulersche Nutation*) bezeichnet wird, während man bekanntlich bei der Erde unter Präcession eine durch Sonnen- und Mondanziehung *erzwungene* Bewegung von aufserordentlich viel längerer Periode versteht. Dieser langsamen erzwungenen Präcession überlagert sich die sehr viel raschere Eulersche Nutation, unsere kräftefreie Präcession, so dafs die Gesamtbewegung den uns wohlbekannten Charakter der pseudoregulären Präcession annimmt. Übrigens bezeichneten wir auch bei der allgemeinen Untersuchung der pseudoregulären Präcession in Kap. V, § 2 die Schwankung des Kreisels gegen die Bewegung der erzwungenen regulären Präcession als Nutation; auch dort erweist sich diese Nutation gleichbedeutend mit der kräftefreien Präcession des dem Einflufs der Schwere entzogenen Kreisels, nämlich unter den Bedingungen, durch welche wir die pseudoreguläre Präcession definierten, dafs 1) der Eigenimpuls sehr grofs sei (N^2 grofs gegen AP)

Hosted by Google

und daſs 2) die Figurenaxe stets in der Nähe der Impulsaxe liege, Bedingungen, welche im Falle der Erde erfüllt sind.

Die gestaltlichen und Massenverhältnisse unseres Kreisels werden durch Angabe der folgenden, nach Voraussetzung positiven Verhältniszahl

$$\varepsilon = \frac{C - A}{A}$$

gekennzeichnet, welche wir die *„Elliptizität“* nennen. Aus der Elliptizität berechnet sich die numerische Excentrizität e der Meridiankurve unseres Ellipsoides nach der Formel $e = \sqrt{2\varepsilon/(1+\varepsilon)}$. Für ein beliebiges Ellipsoid gilt nämlich, daſs das Trägheitsmoment um eine beliebige Hauptaxe gleich dem fünften Teil der Masse multipliziert mit der Summe der Quadrate der beiden anderen Hauptaxen wird. Bezeichnet also b die in die Figurenaxe des Ellipsoides fallende kleine Hauptaxe, a die in die Äquatorebene fallende groſse Hauptaxe der Meridianellipse, so hat man

$$A = \frac{M}{5}(a^2 + b^2), \quad C = \frac{M}{5}(a^2 + a^2)$$

und daher

$$\varepsilon = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2},$$

während die Definition der numerischen Excentrizität bekanntlich lautet:

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}.$$

Hieraus folgt leicht der oben angegebene Zusammenhang zwischen e und ε.

Indem wir abermals an die Verhältnisse der Erde denken, *setzen wir ε als kleine Zahl voraus;* die Gestalt des Ellipsoides weicht dann wenig von der Kugelgestalt ab (Sphäroid). Unter dieser Annahme schreiben wir die näherungsweise Gleichung der Oberfläche des Ellipsoides an. Wird z nach der Figurenaxe, x und y nach zwei rechtwinkligen Axen der Äquatorebene gemessen, so haben wir zunächst ohne Vernachlässigung

$$\frac{z^2}{b^2} + \frac{x^2 + y^2}{a^2} = 1.$$

Wir transformieren diese Gleichung in zentrische Polarkoordinaten, indem wir mit r den Abstand eines Punktes der Oberfläche vom Mittelpunkt des Ellipsoides, mit Θ die Neigung des Radiusvektor r gegen die Äquatorebene bezeichnen. Wir haben dann

$$z^2 = r^2 \sin^2\Theta, \quad x^2 + y^2 = r^2\cos^2\Theta,$$

also zufolge der obigen Ellipsoidgleichung

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1 - \cos^2\Theta}{b^2} + \frac{\cos^2\Theta}{a^2} = \frac{1}{b^2}(1 - e^2\cos^2\Theta)$$

und angenähert

(1) $$r = b\,(1 + \varepsilon \cos^2 \Theta).$$

Dies die ursprüngliche Kreiselgestalt. Wird nun der Kreisel in Rotation versetzt, so tritt eine Formänderung auf, die wir als klein voraussetzen können. Findet die Rotation gerade um die Figurenaxe statt, so wird das Ellipsoid noch etwas mehr abgeplattet: die Elliptizität ε wird um einen kleinen Betrag ε' vermehrt. Bei der Berechnung der hinzukommenden Elliptizität ε', die nach den Grundsätzen der Elastizitätstheorie zu erfolgen hat, wird man von der ursprünglich vorhandenen Elliptizität ε unbedenklich absehen, also die ursprüngliche Kreiselgestalt einfach als Kugel voraussetzen dürfen. Denn durch die kleine Abweichung ε von der Kugelgestalt wird die hinzukommende Elliptizität ε' nur in einer Gröſse zweiter Ordnung (von der Gröſsenordnung des Produktes $\varepsilon\varepsilon'$) beeinfluſst. Man kann dabei die Frage aufwerfen, welchen Radius man der Kugel geben soll, durch welche man zum Zweck der Berechnung von ε' das ursprüngliche Ellipsoid mit den Hauptaxen a und b ersetzen will. Am nächsten liegt es, eine mittlere, zwischen a und b enthaltene Länge m als Radius zu wählen, die man so bestimmt, daſs der Inhalt der Kugel gleich dem Inhalt des ursprünglichen Ellipsoides wird. Diese Forderung führt auf die Bedingung

$$m^3 = a^2 b.$$

Setzt man für a den aus Gl. (1) mit $\Theta = 0$ folgenden Wert $a = b\,(1 + \varepsilon)$ ein, so wird

$$m^3 = b^3\,(1 + 2\varepsilon), \quad m = b\left(1 + \frac{2}{3}\,\varepsilon\right), \quad b = m\left(1 - \frac{2}{3}\,\varepsilon\right).$$

Die Gleichung des ursprünglichen Ellipsoides läſst sich daher folgendermaſsen schreiben:

(2) $$r = m\left(1 + \varepsilon\,(\cos^2 \Theta - \tfrac{2}{3})\right),$$

während die Gleichung desjenigen Ellipsoides, in welches die Kugel vom Radius m übergeht, die folgende sein wird

(2′) $$r = m\left(1 + \varepsilon'(\cos^2 \Theta - \tfrac{2}{3})\right).$$

Durch Superposition der beiden geringen Abplattungen ε und ε' ergiebt sich als Gleichung unseres durch die Rotation deformierten Ellipsoides:

(3) $$r = m\left(1 + (\varepsilon + \varepsilon')\,(\cos^2 \Theta - \tfrac{2}{3})\right).$$

Ähnlich können wir verfahren, wenn die Rotation um eine von der Figurenaxe abweichende Axe stattfindet. Der Winkel zwischen Figurenaxe und Rotationsaxe sei δ (vgl. Fig. 90 $\sphericalangle\, FOR$). Die nun

Hosted by Google

entstehende Abplattung wird sich symmetrisch um die Rotationsaxe OR herum verteilen und kann wiederum so berechnet werden, als ob der Kreisel die ursprüngliche Form einer Kugel vom Radius m hätte. Die hinzukommende Elliptizität ε' hat dieselbe Gröſse wie vorher. Die Gleichung des aus der Kugel entstehenden Ellipsoides lautet

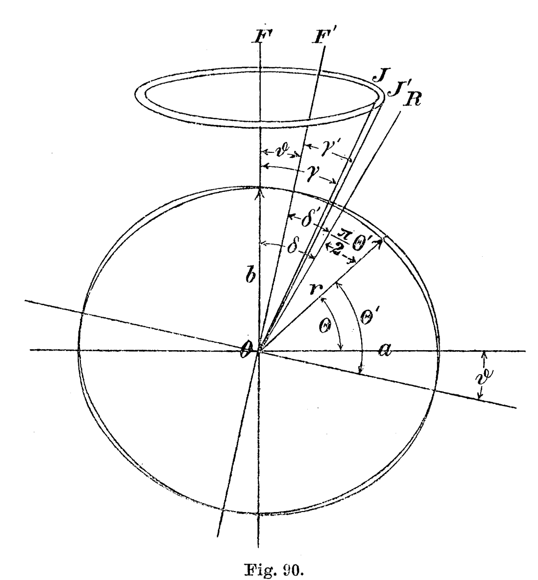


Fig. 90.

(4) $r = m\left(1 + \varepsilon'(\cos^2\Theta - \frac{2}{3})\right)$,

wo Θ' den Winkel des beliebigen Radiusvektors r gegen die zur Rotationsaxe senkrechte Ebene bedeutet. Wie man aus Fig. 90 erkennt, ist

$$\Theta' = \Theta + \delta.$$

Hiermit ist auch in genügender Näherung die Formänderung bestimmt, welche das ursprüngliche Ellipsoid (Gl. (2)) durch Rotation um die Axe OR erleidet. Die neue Form wird durch die Gleichung

$$(5) \qquad r = m\left(1 + \varepsilon \cos^2\Theta + \varepsilon' \cos^2(\Theta + \delta) - \frac{2}{3}(\varepsilon + \varepsilon')\right)$$

gegeben.

Dies ist mit derselben Annäherung die Gleichung eines abgeplatteten Ellipsoides, wie es die bisherigen Gleichungen (1) bis (4) waren. Die Figurenaxe des neuen Ellipsoides fällt aber nicht mehr mit der ursprünglichen Figurenaxe zusammen.

Zur Bestimmung der nunmehrigen Figurenaxe (und der zugehörigen Äquatorebene) haben wir die Gleichung

$$\frac{dr}{d\Theta} = 0,$$

das heiſst:

$$\varepsilon \cos\Theta \sin\Theta + \varepsilon' \cos(\Theta + \delta) \sin(\Theta + \delta) = 0.$$

Den Winkel δ werden wir als *kleinen* Winkel voraussetzen. Wir dürfen dann statt der obigen Gleichung schreiben:

$$\varepsilon \cos\Theta \sin\Theta + \varepsilon' \cos\Theta \sin\Theta + \varepsilon'\delta(\cos^2\Theta - \sin^2\Theta) = 0$$

oder

$$\operatorname{tg} 2\Theta = -\frac{2\varepsilon'\delta}{\varepsilon + \varepsilon'}.$$

Hosted by Google

Die rechte Seite ist wegen des Faktors δ klein; daher erhält man für Θ zwei Werte $-\vartheta$ und $\pi/2-\vartheta$, die sich wenig von Null und von $\pi/2$ unterscheiden. Der erste kommt einer der in der Äquatorebene gelegenen Hauptaxen, der letztere der neuen Figurenaxe zu. Der Winkel zwischen der ursprünglichen und der neuen Figurenaxe ($\sphericalangle FOF'$ in Fig. 90) beträgt ebenfalls ϑ und man hat hinreichend genau

$$\vartheta = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon+\varepsilon'}\,\delta < \delta. \tag{6}$$

Das so gefundene Resultat ist sehr anschaulich:

Wäre das Material des Kreisels absolut starr, so würde die Massenverteilung nach wie vor symmetrisch um OF bleiben ($\vartheta = 0$); wäre es absolut nachgiebig (Flüssigkeit), so würde es sich symmetrisch um die Drehaxe OR herum gruppieren ($\vartheta = \delta$); bei jedem endlichen Grade von elastischer Widerstandsfähigkeit mufs sich ein mittlerer Zustand ausbilden, bei welcher eine zwischen OF und OR gelegene Axe Symmetrielinie der Massenverteilung wird ($\vartheta < \delta$).

Aus der nunmehr bekannten Gestalt des Kreisels wird es leicht sein, immer unter der Annahme homogener Massenverteilung, auf Trägheitsmomente und Elliptizität des deformierten Sphäroids zu schliefsen. Und zwar werden wir auf dieselbe Elliptizität geführt werden, gleichviel, ob die Rotation um die Figurenaxe OF oder um die davon abweichende Axe OR stattfindet, ob also die Oberfläche durch Gl. (3) oder durch Gl. (5) gegeben ist.

In der That erhalten wir als Hauptaxen des deformierten Ellipsoides

$$\begin{aligned}
&\text{aus Gl. (3) für } \Theta = 0 &&: r = a' = m\left(1+\tfrac{1}{3}(\varepsilon+\varepsilon')\right),\\
&\quad\text{„}\qquad\text{„}\quad \Theta = \tfrac{\pi}{2} &&: r = b' = m\left(1-\tfrac{2}{3}(\varepsilon+\varepsilon')\right),\\
&\text{aus Gl. (5) für } \Theta = -\vartheta &&: r = a' = m\left(1+\tfrac{1}{3}(\varepsilon+\varepsilon')\right),\\
&\quad\text{„}\qquad\text{„}\quad \Theta = \tfrac{\pi}{2}-\vartheta &&: r = b' = m\left(1-\tfrac{2}{3}(\varepsilon+\varepsilon')\right),
\end{aligned}$$

wobei wegen der Kleinheit von ϑ gesetzt wurde: $\cos^2\vartheta = 1$, $\sin^2\vartheta = 0$. *Beide Ellipsoide sind also in erster Näherung kongruent, sie unterscheiden sich nur durch ihre Lage, nicht durch ihre Gestalt.* Dementsprechend werden auch ihre Hauptträgheitsmomente A' und C' und ihre Elliptizität E die gleichen. Man findet aus den vorstehenden Werten von a' und b' unmittelbar:

$$\left\{\begin{aligned}
A' &= \frac{M}{5}(a'^2+b'^2) = \frac{2M}{5}\left(1-\frac{1}{3}(\varepsilon+\varepsilon')\,\varepsilon\right),\\
C' &= \frac{M}{5}(a'^2+a'^2) = \frac{2M}{5}\left(1+\frac{2}{3}(\varepsilon+\varepsilon')\right),\\
\mathsf{E} &= \frac{C'-A'}{A'} = \varepsilon+\varepsilon'.
\end{aligned}\right. \tag{7}$$



Wir sind jetzt in der Lage, die *Dauer einer freien Präcession des Kreisels* sowohl für ein starres, wie für ein durch die Rotation deformierbares Material zu berechnen. In ersterer Hinsicht könnten wir uns auf Rechnungen aus Kap. III, § 2 berufen. Nach Gl. (6′) von pag. 151 ist die äquatoriale Komponente $p + iq$ des Drehungsvektors bei der regulären Präcession durch einen Exponentialausdruck gegeben, in dessen Exponenten it mit dem Faktor

$$\frac{C - A}{A} r_0$$

multipliziert erscheint. Dieser Faktor muſs daher gleich $2\pi / T$ sein, wenn T die Präcessionsdauer bezeichnet. Bedeutet andrerseits τ die Dauer einer Rotation des Kreisels, so ist der Rotationsvektor Ω gleich $2\pi / \tau$ und seine Komponente nach der Figurenaxe, die in der angezogenen Gleichung mit r_0 bezeichnet ist, gleich $\cos\delta \cdot 2\pi / \tau$, unter δ den in Fig. 90 so bezeichneten Winkel verstanden. Mithin hat man

$$\frac{2\pi}{T} = \frac{C - A}{A} \frac{2\pi}{\tau} \cos\delta$$

oder, da man $\cos\delta$ hinreichend genau gleich 1 setzen darf:

$$T = \frac{\tau}{\varepsilon}. \tag{8}$$

Lehrreicher und für das folgende nützlicher ist indessen der folgende Weg zur Ableitung der gleichen Formel. Nach unserer Auffassung der Eulerschen Differentialgleichungen sagen diese aus, daſs der Impulsvektor im Raum bei der kräftefreien Bewegung nach Richtung und Gröſse ungeändert bleibt, daſs dagegen relativ gegen den Kreisel die Fortschreitungsgeschwindigkeit des Impuls-Endpunktes nach Richtung und Gröſse gleich dem vektoriellen Produkt von Impuls- und Drehungsvektor (der sog. „resultierenden zentrifugalen Drehkraft“) ist. Bedeutet also J den Vektor des Impulses, $|J|$ seine Länge, dJ seine augenblickliche Änderung relativ gegen den Kreisel und bildet derselbe mit der Figurenaxe den Winkel γ (vgl. Fig. 90), so hat man

$$\frac{dJ}{dt} = V(J, R) = |J|\,\Omega \sin(\delta - \gamma); \tag{9}$$

Ω ist die Länge des Rotationsvektors R und kann wie oben gleich $2\pi / \tau$ gesetzt werden. Der Impuls-Endpunkt beschreibt nun im Kreisel während eines Präcessionsumlaufes einen Kreis vom Radius $|J| \sin\gamma$ um die Figurenaxe. Hierzu gebraucht er vermöge des angegebenen Wertes seiner Fortschreitungsgeschwindigkeit die Zeit

$$T = \frac{2\pi\,|J| \sin\gamma}{|J|\,\Omega \sin(\delta - \gamma)} = \tau \frac{\sin\gamma}{\sin(\delta - \gamma)}$$



oder bei hinreichender Kleinheit des Winkels δ

(8′) $$T = \tau \frac{\gamma}{\delta - \gamma}.$$

Diese Berechnung stimmt mit der in (8) gegebenen natürlich überein. Es ist nämlich $\operatorname{tg} \gamma$ gleich dem Verhältnis der äquatorialen Komponente des Impulses zu der nach der Figurenaxe genommenen und $\operatorname{tg} \delta$ gleich dem Verhältnis der entsprechenden Komponenten des Rotationsvektors. Da sich nun nach dem grundsätzlichen Zusammenhang zwischen Impuls- und Rotationsvektor entsprechende Komponenten beider Vektoren wie A bez. wie C verhalten, so ergiebt sich

$$\operatorname{tg} \gamma : \operatorname{tg} \delta = A : C$$

oder hinreichend genau

(10) $$\gamma : \delta = A : C; \quad \frac{\gamma}{\delta - \gamma} = \frac{A}{C - A} = \frac{1}{\varepsilon}.$$

Die Überlegung, die zu Gl. (9) führte, läſst sich unmittelbar auf den elastisch deformierbaren Kreisel übertragen. Wir müssen dabei nur eine Voraussetzung ausdrücklich hervorheben: *Die Formänderung soll Zeit haben, sich vollständig in der oben beschriebenen Weise für jede Lage des Rotationsvektors auszubilden, bevor dieser Vektor seine Lage im Kreisel merklich verändert hat.* Diese Annahme ist in hohem Grade gerechtfertigt, da sich Spannungen und Formänderungen allgemein gesprochen mit der dem betr. Material eigentümlichen Schallgeschwindigkeit ausbreiten, während die beobachtbaren Bewegungserscheinungen (hier die Umlagerungen des Rotationsvektors) auſserordentlich viel langsamer erfolgen. Unter dieser Annahme werden wir sehen, daſs die allgemeine Bewegung auch des deformierbaren Kreisels als reguläre Präcession bezeichnet werden kann. Würde dagegen diese Annahme nicht zulässig sein, würde also die Abplattung nach Lage und Gröſse hinter der durch die jeweilige Lage der Rotationsaxe indizierten Abplattung zurückbleiben, so wäre die Bewegung viel komplizierter.

Wir unterscheiden die durch die jeweilige Rotation abgeänderte Symmetrielinie der Massenverteilung (OF' in Fig. 90) als *instantane Figurenaxe* von der *ursprünglichen* oder *mittleren Figurenaxe* OF. Die Bewegung des deformierbaren Kreisels wird nun in jedem Augenblicke dieselbe sein, wie die eines starren Kreisels mit der wechselnden Figurenaxe OF' und den abgeänderten Trägheitsmomenten A' und C'. Dementsprechend wird der Impuls-Endpunkt, dessen Fortschreitungsgeschwindigkeit gegen das Kreiselmaterial wieder durch das vektorielle Produkt aus Impulsvektor (J') und Rotationsvektor (R) gegeben ist, in jedem Augenblicke senkrecht gegen die durch die Vektoren J' und R gelegte Ebene fortschreiten. Jede Umlagerung von J' bringt aber

Hosted by Google

eine Umlagerung von R mit sich, und zwar muſs nach dem allgemeinen Zusammenhange zwischen Impuls- und Drehungsvektor der Endpunkt von R parallel zu dem Impuls-Endpunkte fortschreiten. Jede Umlagerung des Rotationsvektors hat andrerseits eine Formänderung und eine neue Lage der instantanen Figurenaxe zur Folge. Da wir annehmen, daſs die Formänderung Zeit hat, sich vollständig auszubilden, liegt die instantane Figurenaxe dauernd in der durch OF und R bestimmten Ebene. In derselben Ebene liegt auch wegen des allgemeinen Zusammenhanges zwischen Impuls- und Rotationsvektor die Axe von J'. Die drei Axen OF', OJ' und OR liegen also in der gleichen Meridianebene durch OF, die sich um OF dreht. Da überdies die Winkelabstände der drei Axen erhalten bleiben, beschreibt jede derselben einen Kreiskegel und im besonderen der Impuls-Endpunkt J' einen Kreis um OF. Diese Bewegung hat durchaus den Charakter einer regulären Präcession, nur daſs auſser der Impuls- und der Rotationsaxe auch die instantane Figurenaxe im Körper fortschreitet. Wir berechnen jetzt die Präcessionsdauer T', indem wir wieder den Weg des Impuls-Endpunktes während eines Umlaufs durch seine Fortschreitungsgeschwindigkeit dividieren.

Der Weg beträgt jetzt $2\pi|J'|\sin(\vartheta+\gamma')$ (vgl. Fig. 90), die Fortschreitungsgeschwindigkeit ist

$$\frac{dJ'}{dt} = |J'|\,\Omega\,\sin(\delta'-\gamma'),$$

daher wird die Präcessionsdauer

$$T' = \frac{2\pi|J'|\sin(\vartheta+\gamma')}{|J'|\,\Omega\sin(\delta'-\gamma')} = \tau\,\frac{\sin(\vartheta+\gamma')}{\sin(\delta'-\gamma')}$$

oder hinreichend genau

(11) $$T' = \tau\,\frac{\vartheta+\gamma'}{\delta'-\gamma'}.$$

Den hier auftretenden Winkelquotienten haben wir mit Rücksicht auf die Gl. (6) und (10) umzurechnen. Aus Gl. (6) folgt, da nach Fig. 90 $\delta = \vartheta + \delta'$ ist:

$$\vartheta = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon+\varepsilon'}(\vartheta+\delta'), \qquad \vartheta = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\,\delta'.$$

Gl. (10) lautet, für die deformierte Gestalt des Ellipsoides angeschrieben:

$$\gamma' : \delta' = A' : C'$$

und lehrt, daſs hinreichend genau gilt

$$\frac{\gamma'}{\delta'-\gamma'} = \frac{\delta'}{\delta'-\gamma'} = \frac{1}{\mathsf{E}} = \frac{1}{\varepsilon+\varepsilon'}.$$


Hosted by Google

Hiernach wird

$$\frac{\vartheta + \gamma'}{\delta' - \gamma'} = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \frac{\delta'}{\delta' - \gamma'} + \frac{\gamma'}{\delta' - \gamma'} = \frac{1}{\varepsilon + \varepsilon'} \left(\frac{\varepsilon'}{\varepsilon} + 1 \right) = \frac{1}{\varepsilon} \cdot$$

Unser obiges Resultat bezüglich der Präcessionsdauer T' (Gl. (11)) läſst sich daher schreiben:

$$T' = \frac{\tau}{\varepsilon}, \tag{12}$$

in welcher Form es mit der früheren Gleichung (8) zusammenfällt. In Worten heiſst dieses:

Die Präcessionsdauer eines Kreisels von deformierbarem Material und sphäroidischer Gestalt berechnet sich nicht aus der Elliptizität seiner deformierten Gestalt, (welche $\mathsf{E} = \varepsilon + \varepsilon'$ genannt wurde), *sondern aus der Elliptizität seiner ursprünglichen Form, die es vor der Rotation hatte und die es beim Erlöschen der Rotation wieder annehmen würde. Sie ist daher von der elastischen Nachgiebigkeit des Materials unabhängig und im besonderen gleich der Präcessionsdauer eines absolut starren Kreisels, dessen Elliptizität mit der ursprünglichen Elliptizität* ε *des deformierbaren Kreisels übereinstimmt.*

Wir werden im folgenden Kapitel bei den geophysikalischen Anwendungen auf diesen Satz zurückkommen und werden ihn zum Ausgangspunkt für die Darstellung der Polschwankungen und für die Erklärung der sog. Chandlerschen Periode nehmen. Eine Schwierigkeit hat die Übertragung der vorstehenden Resultate auf die Verhältnisse der Erde nur insofern, als 1) die Erde ihrer Massenverteilung nach kein homogenes Rotationsellipsoid ist, sondern nach der Mitte hin dichter als auf der Oberfläche ist, und ferner insofern als 2) bei einer Deformation der Erde neben den elastischen Kräften auch die Gravitationswirkungen der einzelnen Teile auf einander wesentlich in Betracht kommen. Der erstgenannte Umstand bringt es mit sich, daſs alle Zahlenangaben, die wir später zu machen haben werden, mit einer gewissen Unsicherheit behaftet sind, entsprechend der Unsicherheit in den Annahmen über die Massenverteilung im Erdinnern. Die an zweiter Stelle genannte Schwierigkeit ist dadurch zu heben, daſs wir die im Vorstehenden mit ε' bezeichnete Elliptizität bei der Erde als diejenige Elliptizität zu definieren haben werden, die eine Kugel von der Elastizität und der mittleren Dichte und Gröſse der Erde unter der *gemeinsamen* Wirkung der elastischen Kräfte und der Gravitationswirkungen annehmen würde, wenn sie mit der Geschwindigkeit der täglichen Erdumdrehung in Rotation versetzt wird.

Noch möge darauf hingewiesen werden, daſs die Voraussetzung eines nahezu kugelförmigen Kreisels, an der wir in diesem Paragraphen

Hosted by Google

festgehalten haben, nicht allein im Interesse der Anwendung auf den Erdkörper geboten war. Man übersieht vielmehr leicht, daſs gerade eine sphäroidische Masse oder, allgemein gesprochen, eine Masse von sphäroidischem Trägheitsellipsoid in Hinsicht auf die deformierende Wirkung der Zentrifugalkräfte besonders empfindlich sein wird.

§ 9. Die Elastizität der Unterlage.

In höherem Grade wie die Elastizität des Kreiselmaterials dürfte bei den gewöhnlichen Versuchen die Elastizität der Unterlage den Charakter der Kreiselbewegung beeinflussen. Man bemerkt sehr häufig ein Mitschwingen der Unterlage (Tischplatte), das sich sowohl dem Ohre wie dem Tastsinn deutlich bemerkbar macht. Um die Schwingungen einer Tischplatte zu erzeugen und zu unterhalten, ist aber Energie erforderlich. Diese muſs auf Kosten der Bewegungsenergie des Kreisels bestritten werden und wird teils im Innern der Tischplatte durch innere Reibung etc. in Wärme verwandelt, teils wird sie nach auſsen hin zerstreut, indem sich die Schwingungen der Tischplatte auf entferntere Gegenstände (durch die Beine des Tisches auf den Fuſsboden etc.) je länger je mehr übertragen. Durch das Mitschwingen der Tischplatte wird also die Kreiselbewegung gedämpft. Von allen übrigen Energie verzehrenden Kräften (Reibung etc.) werden wir bei der folgenden Darstellung natürlich absehen. Über die Schwingungsform der Tischplatte wollen wir die Annahme machen, daſs es sich um transversale Plattenschwingungen handelt, bei denen etwa die Stützpunkte der Platte auf den Tischbeinen festbleiben und jeder Punkt der Platte in vertikaler Richtung auf und ab schwingt. An sich ist allerdings auch eine horizontale Schwingung der Platte als Ganzes möglich, wobei die Beine des Tisches wechselnde Verbiegungen erfahren würden. Wir wollen aber annehmen, daſs hauptsächlich die erstere Form der Schwingung durch unsern Kreisel ausgelöst wird, was mit den gewöhnlichen Verhältnissen des Experimentes in Einklang zu sein scheint.

Um das Problem mathematisch zugänglich zu machen, ersetzen wir in Gedanken die mitschwingende Tischplatte durch einen einzelnen Massenpunkt, welcher um seine natürliche Gleichgewichtslage O in vertikaler Richtung beweglich ist und nach dieser mittleren Lage durch eine seiner Entfernung von O proportionale Kraft zurückgezogen wird. Die Gröſse dieser Kraft sowie die Gröſse der Masse wäre durch Versuche an der Tischplatte folgendermaſsen festzustellen: Man messe die vertikale Ausbiegung ζ der Tischplatte an der Stelle des Auflagepunktes des Kreisels auf Grund einer Belastung K und berechne daraus, indem

Hosted by Google

man Proportionalität zwischen Ausbiegung und Belastung voraussetzt, diejenige Kraft k, die zur Ausbiegung $\zeta = 1$ (etwa 1 cm) gehört. Ferner bestimme man die Dauer der freien Schwingungen τ der Tischplatte und berechne daraus die „reduzierte schwingende Masse“ der Tischplatte $m = \frac{\tau^2 k}{4\pi^2}$. Diese reduzierte Masse ist zugleich die Masse unseres materiellen Punktes, den wir an Stelle der Unterlage substituieren; die Kraft, mit der er in seine mittlere Lage O zurückgezogen wird, ist $-k\zeta$. Für das Folgende ist es aber unerläſslich, auch die Dämpfung der Schwingungen der Tischplatte zu berücksichtigen, hervorgerufen teils durch Energieverwandlung im Innern der Platte, teils durch Energiezerstreuung nach auſsen, weil hiervon gerade der uns interessierende Verbrauch an Bewegungsenergie des Kreisels abhängt. Wir denken uns deshalb auch das logarithmische Dekrement der Schwingungen der Tischplatte bestimmt und nennen dasselbe $\frac{h\tau}{2m}$; darauf schreiben wir unserem Massenpunkte noch eine Kraft zu, die seiner Geschwindigkeit proportional und entgegengesetzt, nämlich gleich $-h\zeta'$ ist. Die freien Schwingungen unseres Massenpunktes werden alsdann in allen Stücken den freien Schwingungen der Tischplatte ähnlich. Sie sind durch die einfache Gleichung bestimmt:

$$m\zeta'' + h\zeta' + k\zeta = 0. \tag{1}$$

Wie aus der Einführung der Gröſsen m, h, k hervorgeht, entspricht allgemein zu reden das erste Glied dieser Differentialgleichung der Trägheit, das zweite der Dämpfung, das dritte der Elastizität der Tischplatte. Wollen wir ein schematisches Bild unseres für die Tischplatte substituierten Massenpunktes haben, so können wir uns etwa folgende Vorrichtung denken: Eine massenlose Spiralfeder von vertikaler Axe ist am unteren Ende auf einer unnachgiebigen Unterlage befestigt und trägt am oberen Ende den Massenpunkt m. Die Feder ist durch eine Führungshülse an seitlichen Ausbiegungen behindert, kann aber in vertikaler Richtung verlängert oder zusammengedrückt werden. Der Verlängerung oder Zusammendrückung 1 widerstrebt sie dabei mit der Kraft $\mp k$; auſserdem wirkt im Innern der Feder oder an der Führungshülse ein der Geschwindigkeit proportionaler Widerstand, welcher bei der Geschwindigkeit 1 die Gröſse $-h$ hat. Der am oberen Ende der Feder befestigte Massenpunkt m dient seinerseits dem unteren Ende der Kreiselaxe als Stütze.

Unter dem Einfluſs der Kreiselbewegung kommen indessen nicht die durch die vorstehende Differentialgleichung beschriebenen freien Schwingungen unseres Massenpunktes (Tischplatte) sondern gewisse erzwungene Schwingungen zustande. Bedeutet R die Reaktion oder

den Druck des in Bewegung befindlichen Kreisels auf die Unterlage in vertikaler Richtung, so gilt für diese erzwungene Schwingung ersichtlich

$$(1') \qquad m\zeta'' + h\zeta' + k\zeta = R.$$

Die Gröſse von R folgt aus den allgemeinen Impulssätzen, hier aus dem Satz für die vertikale Schwerpunktsgeschwindigkeit des Kreisels. Bedeutet z die vertikale Koordinate des Schwerpunktes, von dem im Raume festen Punkt O aus gezählt, so wird die Vertikalkomponente des Einzelimpulses (Schiebeimpulses) Mz'; ihre Änderungsgeschwindigkeit ist gleich der Summe der in vertikaler Richtung auf den Kreisel wirkenden äuſseren Kräften, d. h. der Schwere $-Mg$, wenn M die Kreiselmasse ist, und dem Gegendrucke der Unterlage gegen den Kreisel $-R$. Man hat daher die Gleichung:

$$\frac{d}{dt} Mz' = -Mg - R$$

oder

$$(2) \qquad R = -M(g + z'')$$

ähnlich wie in dem Anhange zu Kap. VI Gl. (3) pag. 515. Aus Gl. (1') wird daher

$$(3) \qquad m\zeta'' + h\zeta' + k\zeta + Mz'' + Mg = 0.$$

Wir unterscheiden des weiteren zwischen dem im Raume festen Punkt O (der natürlichen Lage unseres Massenpunktes m) und dem beweglichen Punkte P (seiner augenblicklichen Lage zur Zeit t, die mit dem augenblicklichen Auflagepunkte des Kreisels auf der Unterlage zusammenfällt), wobei OP gleich ζ ist. Von P läuft die Figurenaxe, die Knotenlinie etc. aus; in Bezug auf diesen Punkt werden wir die Eulerschen Winkel φ, ψ, ϑ zählen. Die vertikale Schwerpunktskoordinate z wird, wenn E den Abstand PS des Schwerpunktes vom Auflagepunkte bedeutet,

$$(4) \qquad z = \zeta + E\cos\vartheta$$

zu setzen sein. Gl. (3) kann daher auch so geschrieben werden:

$$(5) \qquad (m + M)\,\zeta'' + h\zeta' + k\zeta + ME\frac{d^2}{dt^2}\cos\vartheta + Mg = 0.$$

Man erkennt aus dieser Gleichung, wie durch Vermittelung der Reaktion R die Bewegung des Kreisels mit der Bewegung unseres Massenpunktes m „verkoppelt“ ist.

Um die vollständigen Bewegungsgleichungen des Problems zu erhalten, haben wir nunmehr die Drehung des Kreisels um den (selbst vertikal beweglichen) Auflagepunkt P zu betrachten. Als äuſsere Kraft kommt hierbei nur die Schwere in Betracht, die um die Knotenlinie das Moment $MgE\sin\vartheta$ giebt, da die Reaktion R mit Bezug auf P das Moment 0



hat. Hiernach bemifst sich die Änderung des Drehimpulses. Die Berechnung der Komponenten des letzteren geschieht nach der Regel der Lagrangeschen Gleichungen: Man bilde den Ausdruck der lebendigen Kraft und bestimme aus diesem die Impulskoordinaten durch Differentiation nach den Geschwindigkeitskoordinaten.

Der Ausdruck der lebendigen Kraft ist, da P beweglich ist, von dem üblichen verschieden. Wir legen zu dem im festen Punkte O konstruierten Koordinatensystem xyz ein paralleles $x_1 y_1 z_1$ durch den Punkt P. Dann gilt für die Koordinaten irgend eines Massenteilchens Δm des Kreisels

$$x = x_1, \quad y = y_1, \quad z = z_1 + \zeta,$$

mithin

$$\frac{\Delta m}{2}(x'^2 + y'^2 + z'^2) = \frac{\Delta m}{2}(x_1'^2 + y_1'^2 + z_1'^2) + \frac{\Delta m}{2}\zeta'^2 + \Delta m z_1' \zeta'.$$

Summiert man über die ganze Masse des Kreisels, so darf man ζ' vor das Summenzeichen ziehen. Man erhält so

$$T = T_1 + \frac{M}{2}\zeta'^2 + \zeta' \sum \Delta m z_1'.$$

Hier ist T_1 die lebendige Kraft des Kreisels bei ruhendem Auflagepunkte, also wie früher

$$T_1 = \frac{A}{2}(\vartheta'^2 + \psi'^2 \sin^2\vartheta) + \frac{C}{2}(\varphi' + \psi' \cos\vartheta)^2.$$

Ferner bedeutet $\sum \Delta m z_1$ die vertikale Schwerpunktskoordinate in dem System $x_1 y_1 z_1$, multipliziert in die Gesamtmasse des Kreisels; man hat also ähnlich wie in Gl. (4):

$$\sum \Delta m z_1 = ME \cos\vartheta, \quad \sum \Delta m z_1' = ME \frac{d}{dt}\cos\vartheta.$$

Mithin wird der Ausdruck der lebendigen Kraft:

$$(6) \qquad T = \frac{A}{2}(\vartheta'^2 + \sin^2\vartheta\,\psi'^2) + \frac{C}{2}(\varphi' + \cos\vartheta\,\psi')^2 + \frac{M}{2}\zeta'^2 - ME\zeta'\vartheta'\sin\vartheta.$$

Bezeichnet man jetzt die drei Impulskomponenten nach den Koordinaten φ, ψ und ϑ bezw. mit N, n und $[\Theta]$, so findet man

$$N = \frac{\partial T}{\partial \varphi'} = C(\varphi' + \cos\vartheta\,\psi'), \quad n = \frac{\partial T}{\partial \psi'} = A\sin^2\vartheta\,\psi' + \cos\vartheta\,N,$$

$$[\Theta] = \frac{\partial T}{\partial \vartheta'} = A\vartheta' - ME\zeta'\sin\vartheta.$$

Die beiden ersten Impulskomponenten haben dieselben Werte wie bei festem Stützpunkte. Setzt man für diese die Lagrangeschen Gleichungen in der Form:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \varphi'} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0 \text{ etc.}$$

Hosted by Google

an, so findet man wie früher

$$N = \text{const.}, \quad n = \text{const.}$$

Dagegen lautet die dritte Lagrangesche Gleichung, nach dem Schema:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \vartheta'} - \frac{\partial T}{\partial \vartheta} = MgE \sin\vartheta$$

gebildet, jetzt folgendermaſsen:

$$A\vartheta'' - ME\zeta'' \sin\vartheta - ME\zeta'\vartheta' \cos\vartheta - \frac{\partial T_1}{\partial \vartheta} + ME\zeta'\vartheta' \cos\vartheta = MgE \sin\vartheta.$$

Der Wert von $\partial T_1/\partial\vartheta$ wurde z. B. in § 4 dieses Kapitels Gl. (4) in eine bequeme Form umgerechnet. Setzt man ihn in die vorige Gleichung ein, streicht die zwei gleichen Glieder der linken Seite gegen einander fort und dividiert durch $\sin\vartheta$, so ergiebt sich:

$$(8) \qquad \frac{A\vartheta''}{\sin\vartheta} + \frac{(N - n\cos\vartheta)(n - N\cos\vartheta)}{A\sin^4\vartheta} = ME(g + \zeta'').$$

Die Wirkung der Beweglichkeit des Stützpunktes oder, wie wir sagen können, seiner „Koppelung“ mit der nachgiebigen Unterlage, besteht hiernach einfach darin, daſs zu der Fallbeschleunigung g auf der rechten Seite unserer Gleichung die Beschleunigung des Auflagepunktes hinzukommt. Die Bewegung um den vertikal veränderlichen Stützpunkt verläuft also ebenso, wie die Bewegung bei festem Stützpunkte, wenn man sich im letzteren Falle am Schwerpunkt auſser der Schwerkraft Mg noch die veränderliche Kraft $M\zeta''$ angebracht denkt. Indem wir diesen Gedanken etwas weiter ausspinnen und gewissermaſsen umkehren, können wir sagen: Die Bewegung des schweren Kreisels um einen festen Stützpunkt verläuft ebenso, wie die Bewegung eines der Schwere nicht unterworfenen Körpers, dessen Stützpunkt mit der konstanten Beschleunigung g in gerader Linie fortgeführt wird.

Jedenfalls enthält Gl. (8) zusammen mit Gl. (5) die vollständige analytische Formulierung unseres Problems und liefert über die gegenseitige Verkettung der beiden bewegten Systeme, Unterlage und Kreisel, den erforderlichen Aufschluſs. Bemerken wir noch: unser Problem hatte ursprünglich vier Grade der Freiheit, entsprechend den vier Lagenkoordinaten $\zeta, \varphi, \psi, \vartheta$. Durch die beiden Impulsgleichungen $n = \text{const.}$, $N = \text{const.}$ sind zwei Freiheitsgrade gewissermaſsen eliminiert, so daſs wir nur mehr zwei Unbekannte ϑ und ζ und zwei Bewegungsgleichungen (5) und (8) übrig behalten.

Übrigens hätten wir auch die Gl. (5) nach dem Schema der Lagrangeschen Gleichungen bilden können, wenn wir von der vollständigen lebendigen Kraft unseres gekoppelten Systems $T^* = T + \frac{m}{2}\zeta'^2$ aus-

Hosted by Google

gegangen wären und dementsprechend die folgende Lagrangesche Gleichung gebildet hätten:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T^*}{\partial \zeta'} - \frac{\partial T^*}{\partial \zeta} = K_\zeta.$$

Hierin setzt sich die auf die ζ-Koordinate wirkende äufsere Kraft K_ζ aus den drei Teilen: $-k\zeta$, $-h\zeta'$, $-Mg$ zusammen. Man erhält so:

$$\frac{d}{dt}(M\zeta' - ME\vartheta' \sin\vartheta + m\zeta') = -h\zeta' - k\zeta - Mg,$$

was ersichtlich mit (5) übereinstimmt.

Es kommt nun darauf an, aus den Gleichungen (5) und (8) weitere Schlüsse zu ziehen. Hierbei werden wir uns von der Annahme leiten lassen, dafs es sich um *kleine* Schwingungen handelt. Dies lehrt, was die Unterlage betrifft, in allen Fällen der Augenschein; was die Kreiselbewegung betrifft, bedeutet unsere Annahme, dafs wir uns auf Bewegungen vom Charakter der pseudoregulären Präcession beschränken wollen. Es sind hiernach ζ und ϑ dauernd von gewissen mittleren Werten ζ_0 und ϑ_0 wenig verschieden, so dafs die Differenzen

$$\mathsf{Z} = \zeta - \zeta_0, \quad \Theta = \vartheta - \vartheta_0$$

als kleine Gröfsen behandelt werden können. Ob das Gleiche für die Differentialquotienten

$$\mathsf{Z}' = \zeta', \ \Theta' = \vartheta', \ \mathsf{Z}'', \ \Theta''$$

gilt, lassen wir dahingestellt, da bei raschen Schwingungen (und um solche wird es sich handeln) die Differentialquotienten von höherer Gröfsenordnung wie Z und Θ selbst sein könnten.

Bestimmen wir zunächst die schon genannten Mittelwerte ζ_0 und ϑ_0 passend. Diese seien gleich den möglichen stationären Werten unserer beiden Koordinaten, also gleich denjenigen Werten, die mit der Annahme

$$\zeta' = \zeta'' = \vartheta' = \vartheta'' = 0$$

nach unsern Gleichungen verträglich sind. Nach Gl. (5) und (8) ergiebt sich

$$k\zeta_0 + Mg = 0, \tag{9}$$

$$(N - n\cos\vartheta_0)(n - N\cos\vartheta_0) = AP\sin^4\vartheta_0; \tag{10}$$

ζ_0 bedeutet, wie man hiernach sieht, die dauernde Einsenkung der Unterlage unter dem Einflufs des Kreiselgewichtes Mg und der elastischen Widerstandsfähigkeit k der Unterlage. Andrerseits ist ϑ_0 diejenige Neigung der Figurenaxe, unter welcher bei gegebenem N, n und $P = MgE$ eine genaue reguläre Präcession möglich ist. Um ϑ_0 näher angeben zu können, dividieren wir (10) durch N^2 und berücksichtigen,

Hosted by Google

daſs bei der pseudoregulären Präcession $\frac{AP}{N^2}$ klein ist, sowie daſs der Impuls nahezu in die Richtung der Figurenaxe fällt. Von den beiden Faktoren linkerhand

$$1 - \frac{n}{N}\cos\vartheta_0, \quad \frac{n}{N} - \cos\vartheta_0$$

muſs daher einer, nämlich der letztere, klein sein; wir setzen ihn gleich ε, finden näherungsweise für den ersten Faktor

$$1 - \frac{n}{N}\cos\vartheta_0 = \sin^2\vartheta_0 = 1 - \frac{n^2}{N^2}$$

und berechnen nach (10)

$$(11) \qquad \varepsilon = \frac{AP}{N^2}\sin^2\vartheta_0 = \frac{AP}{N^2}\left(1 - \frac{n^2}{N^2}\right), \quad \cos\vartheta_0 = \frac{n}{N} - \frac{AP}{N^2}\left(1 - \frac{n^2}{N^2}\right).$$

Diese und nur diese Neigung der Kreiselaxe ist bei einem nahezu in die Figurenaxe fallenden Impuls verträglich sowohl mit einer völligen Ruhe der Unterlage wie mit völliger Schwankungslosigkeit der Figurenaxe.

Nach Einführung der neuen Variabeln Z und Θ vereinfachen sich die Gleichungen (5) und (8) bei Vernachlässigung einiger offenbar relativ kleiner Glieder wie folgt:

$$(12) \qquad (m + M)Z'' + hZ' + kZ = ME(\cos\vartheta_0\Theta'^2 + \sin\vartheta_0\Theta'').$$

$$(13) \qquad \frac{A\Theta''}{\sin\vartheta_0} + \Theta\frac{\partial}{\partial\vartheta_0}\frac{(n - N\cos\vartheta_0)(N - n\cos\vartheta_0)}{A\sin^4\vartheta_0} = MEZ''.$$

Hier ist noch der Faktor von Θ in (13) auszuführen. Da der zu differentiierende Ausdruck nach (10) gleich P ist, kann man unter Anwendung der Regel des logarithmischen Differentiierens schreiben:

$$\frac{\partial}{\partial\vartheta_0}\frac{(n - N\cos\vartheta_0)(N - n\cos\vartheta_0)}{A\sin^4\vartheta_0} = P\left\{\frac{N\sin\vartheta_0}{n - N\cos\vartheta_0} + \frac{n\sin\vartheta_0}{N - n\cos\vartheta_0} - \frac{4\cos\vartheta_0}{\sin\vartheta_0}\right\}.$$

Hier ist der erste Summand in der { } der rechten Seite das Wesentliche. Derselbe ist nämlich nach (11) gleich

$$\frac{\sin\vartheta_0}{\frac{n}{N} - \cos\vartheta_0} = \frac{\sin\vartheta_0}{\varepsilon} = \frac{N^2}{AP\sin\vartheta_0},$$

während die beiden übrigen Summanden, die zusammen näherungsweise $-3\cos\vartheta_0/\sin\vartheta_0$ geben, dagegen vernachlässigt werden können. Man kann daher Gl. (13) mit hinreichender Genauigkeit so schreiben:

$$(14) \qquad \Theta'' + \frac{N^2}{A^2}\Theta = \frac{ME}{A}\sin\vartheta_0 Z''.$$

Dies ist eine *lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten* zwischen den beiden Unbekannten Θ und Z. Gl. (12) ist dagegen



wegen des Gliedes Θ'^2 auf der rechten Seite *nicht linear*. Die mathematische Behandlung nicht linearer Gleichungen stöſst aber auf groſse Schwierigkeiten; es ist daher wünschenswert nachzuweisen, daſs wir jenes Glied näherungsweise streichen können.

Betrachten wir zunächst unsere Gleichungen (12) und (14) unter der Annahme, daſs die Unterlage völlig unnachgiebig sei ($k = \infty$, $Z = Z' = Z'' = 0$, kZ unbestimmt). Dann geht Gl. (14) über in

$$\Theta'' + \frac{N^2}{A^2}\,\Theta = 0$$

und integriert sich durch $\Theta = \frac{a \sin}{b \cos}\left\{\frac{N}{A}\,t\right\}$, so daſs die Periode der Schwankungen der Kreiselaxe gleich $2\pi\,\frac{A}{N}$, also bei groſsem N klein wird. (Man vgl. hierzu Kapitel V § 2, Gl. (15), wo dieselbe Periode gefunden wurde.) Gl. (12) wird in diesem Falle nichtssagend, da wie bemerkt kZ unbestimmt wird; in der That ist jene Gleichung alsdann bei der Bestimmung der Bewegung entbehrlich.

Annähernd wird nun auch bei etwas nachgiebiger Unterlage die Periode und die Form der Schwankung der Kreiselaxe dieselbe sein, wie bei völlig starrer. Jedenfalls werden wir, um die Gröſsenordnung von Θ'^2 und Θ'' in Gl. (12) abzuschätzen, den Wert von Θ bei starrer Unterlage zu Grunde legen können. Dann erkennen wir: Wir dürfen nicht behaupten, daſs wenn Θ klein ist, d. h. wenn die Schwingungsamplituden a und b kleine Zahlen sind, auch Θ' oder gar Θ'' klein seien, weil bei der Differentiation der groſse Faktor N/A bezw. N^2/A^2 hinzutritt. Wohl aber dürfen wir behaupten, daſs Θ'^2 *klein ist gegen* Θ'', da sich die Sinus- oder Cosinusbestandteile beider im Mittel verhalten wie $a^2 : a$ oder wie $b^2 : b$. Während also das Glied Θ'^2 absolut genommen groſs sein kann, so ist es doch relativ gegen das Glied mit Θ'' belanglos. Wir schlieſsen daraus, daſs sein Einfluſs auf den Verlauf der Bewegung klein ist und halten uns dementsprechend für berechtigt, dasselbe in Gl. (12) zu streichen.

Dem Folgenden dürfen wir jetzt die zwei linearen Differentialgleichungen

$$(15) \qquad \begin{cases} (M + m)\,Z'' + hZ' + kZ = ME \sin\vartheta_0 \Theta'' \\ \Theta'' + \frac{N^2}{A^2}\,\Theta = \frac{ME \sin\vartheta_0}{A}\,Z'' \end{cases}$$

zu Grunde legen. Ihre Diskussion geschieht nach bekannten Regeln, die bei der Methode der kleinen Schwingungen (vgl. Kap. V, § 8) ständig angewandt werden.

Hosted by Google

Man setze

(16) $$Z = Ce^{\lambda t}, \quad \Theta = Be^{\lambda t}$$

und bestimme das Verhältnis der beiden Schwingungsamplituden C und B, sowie die Schwingungsfrequenz λ durch Eintragen der vorstehenden Werte in die Gl. (15). Dabei ist es noch nötig, um vergleichbare, d. h. gleichbenannte Amplituden in der Rechnung zu haben, von der Amplitude des Winkels Θ etwa zu der Amplitude des Schwerpunktsausschlages oder, was noch bequemer sein wird, zu der Vertikalprojektion dieser Amplitude überzugehen. Wenn B die Amplitude von Θ, ist die Amplitude der Schwerpunktsbewegung $E \cdot B$ und die vertikale Projektion derselben $E \sin \vartheta_0 B$. Diese setzen wir gleich

(17) $$D = E \sin \vartheta_0 B.$$

Die Gleichungen (15) lauten nun, nach Eintragen der Werte (16) und (17):

(18) $$\begin{cases} (\lambda^2 + h'\lambda + k')\, C = \mu \lambda^2 D, \\ \left(\lambda^2 + \frac{N^2}{A^2}\right) D = \nu \lambda^2 C; \end{cases}$$

hierbei wurden die Abkürzungen benutzt:

(19) $$h' = \frac{h}{M+m}, \quad k' = \frac{k}{M+m}, \quad \mu = \frac{M}{M+m}, \quad \nu = \frac{ME^2 \sin^2 \vartheta_0}{A}.$$

Man bemerke hierbei, daſs ν ebenso wie μ eine reine Zahl und zwar ein echter Bruch ist. In der That wird nach einem bekannten Satz über Trägheitsmomente das Trägheitsmoment A für den Stützpunkt gleich dem entsprechenden Trägheitsmoment für den Schwerpunkt vermehrt um ME^2; mithin ist $ME^2 < A$ und daher $\nu < 1$.

Aus den Gl. (18) folgert man:

(20) $$\frac{C}{D} = \frac{\mu \lambda^2}{\lambda^2 + h'\lambda + k'} = \frac{1}{\nu \lambda^2}\left(\lambda^2 + \frac{N^2}{A^2}\right).$$

Die beiden letzten Glieder dieser Gleichung liefern die Bestimmung von λ; λ berechnet sich als *Wurzel der Gleichung vierten Grades*,

(21) $$\mu \nu \lambda^4 = \left(\lambda^2 + \frac{N^2}{A^2}\right)(\lambda^2 + h'\lambda + k'),$$

so daſs man vier mögliche Werte von λ zur Verfügung hat, die wir $\lambda_1 \ldots \lambda_4$ nennen und von denen je zwei konjugiert imaginär sein werden.

Bei der Diskussion der Wurzeln gehen wir von der naturgemäſsen Annahme aus, daſs die Unterlage ziemlich unnachgiebig sei (k nicht mehr ∞, aber k' recht groſs, im Besonderen groſs gegen N^2/A^2). Dann ist nach Gl. (21) notwendig

Hosted by Google

entweder $\lambda^2 + \frac{N^2}{A^2} \cdots$ sehr klein

oder $\lambda \cdots$ sehr grofs

Indem wir zunächst die erste Möglichkeit betrachten, setzen wir $\lambda^2 + N^2/A^2 = \varepsilon$, berechnen unter Vernachlässigung höherer Potenzen von ε zunächst den Wert von ε und bestimmen daraus zwei Wurzeln unserer Gleichung, deren Näherungswerte wir λ_1 und λ_2 nennen. Wir finden:

$$\varepsilon = \lambda^2 + \frac{N^2}{A^2} = \frac{\mu\nu \frac{N^4}{A^4}}{k' - \frac{N^2}{A^2} \pm ih' \frac{N}{A}},$$

oder, da k' grofs gegen N^2/A^2, die rechte Seite also klein ist:

$$(22) \qquad \left.\begin{matrix}\lambda_1 \\ \lambda_2\end{matrix}\right\} = \pm\, i \frac{N}{A}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\mu\nu}{Q}\frac{N^2}{A^2}\left\{k' - \frac{N^2}{A^2} \mp ih' \frac{N}{A}\right\}\right)$$

mit der Abkürzung

$$Q = \left(k' - \frac{N^2}{A^2}\right)^2 + h'^2 \frac{N^2}{A^2}.$$

Die beiden andern Wurzeln unserer Gleichung finden wir durch Verfolgen der Annahme: λ sehr grofs. Wir setzen etwa $1/\lambda = \varepsilon'$ und vernachlässigen ε'^3, ε'^4. Für ε' ergiebt sich aus (21) mit Rücksicht darauf, dafs k' grofs gegen N^2/A^2 sein sollte, die quadratische Gleichung:

$$1 - \mu\nu + h'\varepsilon' + k'\varepsilon'^2 = 0;$$

ihre Lösung ist:

$$\varepsilon' = -\frac{h'}{2k'} \pm i\sqrt{\frac{1-\mu\nu}{k'} - \frac{h'^2}{4k'^2}}.$$

Hieraus ergeben sich die beiden folgenden Wurzelwerte:

$$(23) \qquad \left.\begin{matrix}\lambda_3 \\ \lambda_4\end{matrix}\right\} = \frac{-h' \mp i\sqrt{4(1-\mu\nu)k' - h'^2}}{2(1-\mu\nu)}.$$

Das Wurzelpaar (λ_1, λ_2) läfst sich mit dem wenig verschiedenen Wertepaar $\pm iN/A$ in Vergleich setzen, welches (s. pag. 615) den Schwingungen der Kreiselaxe bei völlig unnachgiebiger Unterlage entspricht. Es unterscheidet sich von diesem namentlich durch den reellen Bestandteil

$$-\frac{1}{2}\frac{\mu\nu}{Q}\frac{N^4}{A^4}h',$$

der als Folge der dämpfenden Wirkung der Unterlage anzusehen ist. Daneben ist auch der imaginäre Teil durch das Mitschwingen der Unterlage etwas modifiziert. Andrerseits können wir das Wurzelpaar (λ_3, λ_4) mit denjenigen Wurzelwerten vergleichen, welche den

Hosted by Google

Schwingungen der Unterlage bei Abwesenheit des Kreisels nach Gl. (1) zukommen. Man erkennt auch hier eine Rückwirkung des Kreisels auf die Schwingungen der Unterlage, eine Rückwirkung, die sich übrigens, wie man leicht sieht, am einfachsten als eine scheinbare Vermehrung der Masse m des ursprünglichen schwingenden Systems auffassen läſst.

Von hier aus können wir hinsichtlich des Charakters der eintretenden Bewegung folgendes schlieſsen: Jedenfalls müssen sich die Schwingungen sowohl der Kreiselaxe wie der Unterlage aus Gliedern von der Form

$$e^{\lambda_1 t}, \quad e^{\lambda_2 t}, \quad e^{\lambda_3 t}, \quad e^{\lambda_4 t}$$

additiv mit konstanten Koeffizienten C_i und D_i, deren Verhältnis durch Gl. (20) vorausbestimmt ist, zusammensetzen. Dabei werden sich die konjugierten Exponentialgröſsen paarweise zu trigonometrischen Funktionen vereinigen und zusammen je eine Schwingungszahl und einen Dämpfungsfaktor definieren. Insbesondere bestand die Schwingung der Kreiselaxe, wenn wir von der Einwirkung der Unterlage absehen, aus ungedämpften, rein periodischen Schwingungen von der Schwingungszahl $N/2\pi A$. *Durch die Mitwirkung der Unterlage wird diese Schwingungszahl etwas abgeändert, die Schwingung wird überdies gedämpft, so daſs sie allmählich absterben muſs; dann aber überlagern sich den genannten noch andere gedämpfte Schwingungen, die unter Voraussetzung einer ziemlich unnachgiebigen Unterlage* ($k' > N^2/A^2$) *wesentlich höhere Schwingungszahl haben.* Andrerseits sind, solange wir von der anregenden Wirkung des Kreisels auf die Unterlage absehen, die natürlichen Schwingungen der Unterlage gedämpfte Schwingungen von sehr groſser Schwingungszahl. *Durch die Mitwirkung des Kreisels wird ihre Schwingungszahl sowie ihre Dämpfung ebenfalls etwas abgeändert und es überlagern sich diesen Schwingungen noch Vibrationen von geringerer Schwingungszahl, deren Periode in der Nähe der natürlichen Schwingungsperiode der Kreiselaxe liegt.*

Es ist leicht einzusehen, daſs die langsamere der beiden Schwingungen, die der Eigenschwingung der Kreiselaxe naheliegt, in der Bewegung des Kreisels deutlicher zum Ausdruck kommen wird, wie in der Bewegung der Unterlage und daſs umgekehrt die schnellere Schwingung, die wir mit der Eigenschwingung der Unterlage verglichen hatten, in den Schwankungen der Unterlage stärker ausgeprägt sein wird, wie in denen des Kreisels. In der That zeigt Gl. (20), daſs für unser erstes Wurzelpaar $\lambda = \lambda_1$ oder $\lambda = \lambda_2$, für welches $\lambda^2 + N^2/A^2$ klein ist, auch C klein gegen D ist; daſs dagegen für das zweite Paar $\lambda = \lambda_3$ oder $\lambda = \lambda_4$, für welches $\lambda^2 + h'\lambda + k'$, wie man leicht nachrechnet,

Hosted by Google

gleich $\mu\nu\lambda^2$ ist, C gleich D/ν wird, also gröſser als D sein muſs. *Jedes unserer beiden Systeme, Kreisel und Unterlage, schwingt in derjenigen Periode stärker, die ihm die natürlichere ist.*

In der Beobachtung macht sich namentlich der Umstand geltend, daſs die Schwingungen des mit der Unterlage gekoppelten Kreisels gedämpfte Schwingungen sind. Er zeigt sich darin, daſs die kleinen Schwankungen der pseudoregulären Präcession bald absterben und daſs die stationäre Bewegung der reinen regulären Präcession ($\mathsf{Z} = 0$, $\Theta = 0$ oder in unseren früheren Koordinaten geschrieben $\zeta = \zeta_0$, $\vartheta = \vartheta_0$) als Endzustand angestrebt wird. Wir sahen übrigens früher, daſs auch andere dissipative Einflüsse (Reibung im Stützpunkte) in ähnlicher Weise auf eine Abnahme der Nutationen und auf eine Vereinfachung des Bewegungsvorganges hinwirkten. Jedenfalls aber kommt dem Mitschwingen der Unterlage in dem nunmehr erläuterten Sinne bei dieser Erscheinung eine wesentliche Rolle zu.

§ 10. **Anhang. Einfluſs der Reibung auf den in der Horizontalebene spielenden Kreisel.**

In dem Anhange zum vorigen Kapitel haben wir die Bewegung des auf der Horizontalebene frei beweglichen Kreisels unter Absehung von der Reibung behandelt. Indessen muſsten wir zum Schluſs jenes Anhanges darauf hinweisen, daſs die wirklich zu beobachtenden Bewegungen mit der dort gefundenen nur eine entfernte Ähnlichkeit haben. Der Grund liegt natürlich darin, daſs die Reibung, die wir dort vernachlässigt hatten, nicht eigentlich eine sekundäre korrigierende Bedeutung hat, sondern daſs sie, man mag die Unterlage noch so glatt herstellen wie man wolle (Spiegelglasscheibe), für den Charakter der Bahnkurve in erster Linie maſsgebend ist.

Da sich nun die Bahnkurve des horizontal beweglichen Kreisels besonders gut beobachten läſst (s. u.), da sie ferner wegen ihrer gesetzmäſsigen und schönen Gestalt ein besonderes Interesse beanspruchen darf, so müssen wir wünschen, unsere früheren Betrachtungen durch Berücksichtigung der Reibung soweit zu vervollständigen, daſs sie zur allgemeinen Erklärung der wirklichen Erscheinungen geeignet werden. Allerdings werden wir hierbei von quantitativen Berechnungen im Sinne von § 4 und 5 dieses Kapitels absehen und den Einfluſs der Reibung nur qualitativ diskutieren; ferner werden wir von einer erneuten Diskussion des Luftwiderstandes etc. absehen, da dieser neben der gleitenden Reibung an Wichtigkeit zurücktritt.

Auch von dem jetzigen Problem gilt die Bemerkung, die wir früher für die Reibungswirkungen überhaupt gemacht haben: daſs

Hosted by Google

scheinbar geringfügige Nebenumstände den Charakter der Bewegung stark beeinflussen können. So ist es durchaus nicht gleichgültig, ob z. B. die auf der Unterlage gleitende Spitze mehr oder minder zugeschärft ist, ob die Unterlage gröfsere oder geringere Unebenheiten hat und Ähnliches. Besonders deutlich tritt die Wirkung solcher Verhältnisse bei einer Erscheinung hervor, die wir bei Benutzung einer Stahlspitze oft zu beobachten Gelegenheit hatten und die wir als den Vorgang des „Einwurzelns“ bezeichnen möchten: Die Kreiselspitze gerät in irgend eine für das blofse Auge kaum erkennbare Vertiefung der Unterlage, in der sie weiterhin festgehalten wird; der Kreisel spielt nicht mehr auf der horizontalen Ebene, sondern wird durch eine Art unsichtbarer Pfanne gezwungen, sich um einen festen Punkt wie bei unserem ursprünglichen Kreiselproblem zu drehen. Wann und wie dieses Einwurzeln statthat, läfst sich im Voraus nicht bestimmen. Nur soviel ist a priori klar und wird durch die Beobachtung bestätigt, dafs eine zugeschärfte Spitze sich leichter einbohrt, wie eine abgerundete, die über vorhandene Vertiefungen der Unterlage ev. hinweggleitet, dafs eine rauhe und weiche Unterlage (Papier und besonders Pappe) für die gedachte Wirkung günstiger ist, wie eine harte und glatte Unterlage (Glasscheibe), ja daß eine berufste Glasscheibe, auf deren Oberfläche der Kreisel selbst durch Zusammenhäufung des Rufses Unebenheiten herstellt, wieder günstiger ist wie eine unberufste Scheibe, dafs ferner bei nahezu aufrechter Stellung von Figuren- und Drehaxe ein Einwurzeln häufiger stattfindet wie bei stärker geneigter Axe, weil im ersten Falle die zur Hemmung des Auflagepunktes erforderlichen Seitenkräfte kleiner sind und daher leichter von der Unterlage hergegeben werden können, wie im letzteren Falle, dafs endlich diese und andere Unregelmäfsigkeiten in der Bewegung um so leichter eintreten können, je kleiner die Abmessungen und die Massen des Kreisels sind, je kleiner der ursprünglich erteilte Impuls war oder je mehr derselbe im Laufe der Bewegung abgenommen hat. Im Folgenden werden wir diese Erscheinung des Einwurzelns, über die sich theoretisch nicht viel sagen läfst, ausschliefsen; wir setzen also eine hinreichend abgerundete Spitze auf hinreichend ebener und regelmäfsiger Unterlage voraus.

Wir wollen nun den allgemeinen Bewegungsverlauf schildern, wie er unter dieser Einschränkung beobachtet wird. Da fällt zunächst, im Gegensatz zu den Ergebnissen unserer früheren reibungsfreien Betrachtungen, ins Auge, dafs die Horizontalprojektion des Schwerpunktes sich nicht, wie früher behauptet wurde, auf gerader Linie mit konstanter Geschwindigkeit bewegt (entsprechend einer dem Schwerpunkt anfänglich erteilten horizontalen Geschwindigkeit), bez. dafs (bei der anfänglichen

Hosted by Google

horizontalen Schwerpunktsgeschwindigkeit Null) der Schwerpunkt nicht auf einer festen Vertikalen bleibt, sondern daſs er vielmehr kreisförmige Bahnen beschreibt, die ungefähr der Bahn des Stützpunktes auf der Unterlage folgen. Es fällt ferner ins Auge, daſs die Bahn des Stützpunktes, die wir früher als Kreis mit aufgesetzten Zacken beschrieben, im Mittel nicht einen konstanten Radius hat, sondern daſs sich ihr Radius in der Regel verkleinert, unter Umständen, namentlich gegen Ende der Bewegung, allerdings sich gelegentlich auch erweitert. *Die Bahnkurve des Stützpunktes und ebenso die des Schwerpunktes* ist also jetzt als eine meist sich verengende *Spirallinie* zu beschreiben. Die einzelnen Windungen der Spirallinie legen sich in der Regel nicht ineinander, sondern mehr oder weniger nebeneinander, was auf die Deutlichkeit der entstehenden Figur sehr günstig wirkt. Die Spirallinie erscheint daher in einer gewissen Richtung seitlich auseinandergezogen. Man könnte in dieser Erscheinung die Folge einer dem Schwerpunkt ursprünglich erteilten Anfangsgeschwindigkeit erblicken wollen; indessen lehrt die Beobachtung in unzweideutiger Weise, daſs es sich hierbei lediglich um die Wirkung geringer Neigungen und Unregelmäſsigkeiten der Unterlage handelt. In der That konnten wir durch absichtliches Schiefstellen der Unterlage eine beliebig starke Auseinanderziehung der Spirallinie bewirken; die Richtung, in der die Windungen der Spirale fortschreiten, fällt dabei nicht mit der Richtung gröſster Neigung auf der Unterlage zusammen, sondern weicht vermöge der Kreiselwirkung in bestimmtem Sinne von jener ab. Hinsichtlich der Winkelgeschwindigkeit, mit welcher die aufeinander folgenden Kreise der Bahnkurve durchlaufen werden, der „Präcessionsgeschwindigkeit“, lehrt die Beobachtung in unzweideutiger Weise, daſs diese im Verlauf der Bewegung etwas zunimmt, daſs wir es also mit einer etwas beschleunigten Präcession zu thun haben. Endlich wollen wir noch als ein allgemeines Ergebnis der Beobachtung erwähnen, daſs die Nutationen der Kreiselaxe, welche zu den Auszackungen der Bahnkurve des Stützpunktes Anlaſs geben und dadurch viel zu dem eigenartig interessanten Eindruck dieser Kurve beitragen, bei den Experimenten ihrer Gröſse nach immer sehr gering sind, so daſs sie den gleichmäſsigen Verlauf der Bahnkurve nur unwesentlich unterbrechen. Während wir also im vorigen Kapitel auf die Nutationen der Kreiselaxe besonderen Wert legten und sie durch trigonometrische Funktionen annäherten (bei strengerer Rechnung wären sie durch elliptische oder gar hyperelliptische Integrale darzustellen), werden wir jetzt bei Besprechung der Beobachtungen von diesen Nutationen überhaupt absehen.

Hosted by Google

Zum Beleg für die vorstehende Schilderung der zu beobachtenden Vorgänge geben wir in den nachstehenden Figuren zwei Beispiele von Bahnkurven des Stützpunktes zweier verschiedener Kreisel, welche beide

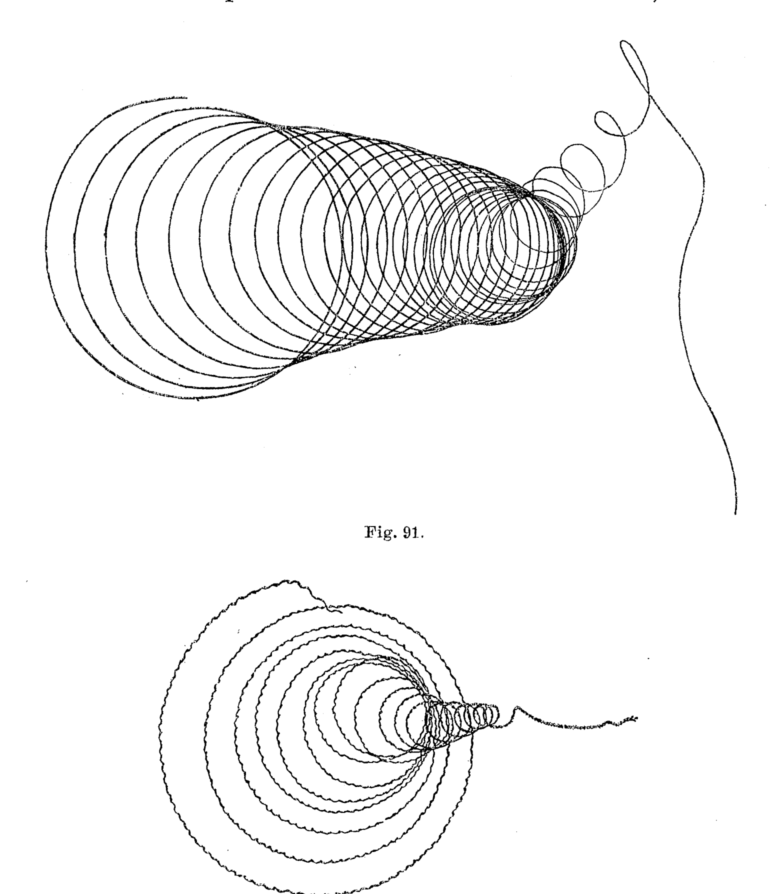


Fig. 91.

Fig. 92.

selbstthätig aufgezeichnet und alsdann photographisch reproduziert wurden, so dafs sie als unmittelbare Beobachtungsdokumente gelten können.

Die erste derselben wurde uns von Lord Kelvin gütigst zur Verfügung gestellt. Er liefs sie entstehen, indem er auf dem Zeichenpapier einen Kreisel spielen liefs, der nach unten hin in einen Bleistift auslief. Wir sehen hier die allmähliche Verengerung der Bahn des Stützpunktes, wie sie oben beschrieben wurde. Die einzelnen Windungen der spiraligen Bahnkurve legen sich in der Figur von links nach rechts neben einander. Die Verkleinerung des Krümmungsradius der Bahn

Hosted by Google

hält in diesem Beispiele bis zum Schlusse an, wo der Impuls bereits stark geschwächt ist und die Linienführung der Bahn etwas unsicher und unregelmäfsig wird. Die Kurve läuft schliefslich in einige gesetzlose Zacken aus, die dem Umfallen des Kreisels entsprechen. Über eine geeignete Herstellungsweise solcher selbstregistrierender Kreisel berichtet C. Barus*).

Wir selbst fanden es beim Studium dieser Erscheinungen bequem, eine berufste Spiegelglasplatte als Unterlage zu benutzen, auf der sich die Spur des Kreisels deutlich markiert, oder, wo wir eine stärkere Reibungswirkung wünschten, berufstes Schreibpapier. Als Kreisel dienten uns einige kleine, ziemlich leichte Uhrrädchen mit Axe (Abstand des Radmittelpunktes vom Stützpunkt ca. 1 cm, Durchmesser des Rädchens 5 cm, Gewicht 15 gr, die stählerne Auflagespitze bei den verschiedenen Exemplaren mehr oder minder zugeschärft). Von einem solchen Kreisel ist unsere zweite Figur auf einer berufsten Glasplatte aufgezeichnet; die hier gegebene Reproduktion ist das Negative des Originals, bei dem sich die Bahnkurve als helle Linie auf dem dunkeln Grunde des Rufses abhebt. Unsere zweite Figur zeigt deutlichere Nutationen wie die erste, im Übrigen läfst sie wieder die Spiralform der Bahnkurve und eine gewisse Seitenverschiebung erkennen, die namentlich gegen Ende der Bewegung als ein schon ziemlich unregelmäfsiger Auslauf in die Augen fällt.

Nachdem wir uns in solcher Weise durch das Experiment vorurteilslos orientiert haben, gehen wir nun an die theoretische Erklärung des Beobachteten.

Entsprechend der durch die Beobachtung festgestellten Geringfügigkeit der Nutationen werden wir über den Charakter der Bewegung die vereinfachende Annahme machen, dafs dieser in jedem Augenblick als *präcessions-ähnlich* angesehen werden kann. Unter einer regulären Präcession soll dabei jetzt eine Bewegung verstanden werden, bei der die Figurenaxe unter einem konstanten Winkel ϑ gegen die Vertikale geneigt ist und bei der sowohl der Schwerpunkt wie der Stützpunkt des Kreisels je einen Kreis mit konstanter Geschwindigkeit um dieselbe vertikale Gerade beschreiben. Präcessions-ähnlich wird eine Bewegung entsprechend dann heifsen, wenn der Neigungswinkel ϑ nur langsam veränderlich ist und wenn die Bahnen von Stützpunkt und Schwerpunkt nahezu kreisförmige und nahezu gleichförmig durchlaufene Spiralen werden.

Hinsichtlich der Gestalt des Kreisels an der Unterstützungsstelle

*) Science, September 1896.

Hosted by Google

mögen die beim Kreisel mit festem Punkte (§ 3) eingeführten Vorstellungen gültig bleiben: das untere Ende des Kreisels laufe in eine Halbkugel von kleinem Radius ϱ aus; der tiefste Punkt der Halbkugel, welcher kein individueller Kreiselpunkt ist sondern in jedem Augenblicke wechselt, ist der *Stützpunkt* P. Während der senkrecht über P gelegene *Mittelpunkt* O der Halbkugel in § 3 ein fester Punkt war, beschreibt derselbe jetzt bei der regulären Präcession einen Kreis. Legen wir durch P eine Ebene senkrecht zur augenblicklichen Rotationsaxe, so schneidet diese unsere Halbkugel in einem Kreise, den wir den „Stützkreis" nennen können; die sämtlichen Punkte dieses Kreises werden nämlich, sofern die augenblickliche Rotationsaxe im Kreisel nicht zu schnell wechselt, nach einander die Rolle des Stützpunktes übernehmen, indem sie durch die Rotation nach einander in die Lage des tiefsten Punktes der Halbkugel übergeführt werden.

Als Gesetz der Reibung — es soll sich lediglich um gleitende Reibung handeln — legen wir wieder das Coulombsche Gesetz (§ 2) zu Grunde. Der Reibungswiderstand W im Stützpunkte ist dann eine horizontale Kraft von der Gröfse μR, wenn R den Gegendruck der Unterlage gegen den Kreisel bedeutet. Letzterer ist, wie pag. 515 auseinandergesetzt wurde, allgemein gleich $M(g + z'')$, wo z'' die Schwerpunktsbeschleunigung bedeutet; im besonderen wird also bei einer präcessions-ähnlichen Bewegung hinreichend genau:

$$R = Mg, \quad W = \mu Mg. \tag{1}$$

Richtung und Sinn des Reibungswiderstandes hängen von der Richtung des Gleitens im Stützpunkte ab. Um letztere zu bestimmen, werden wir vorübergehend den Mittelpunkt O der genannten Halbkugel zum „Bezugspunkte" wählen und die Bewegung des Kreisels in eine Parallelverschiebung, deren Geschwindigkeit mit der Geschwindigkeit des Punktes O übereinstimmt, und eine Drehung um eine Axe durch O zerlegen. Der Punkt P erhält auf diese Weise die beiden Geschwindigkeiten v und V; v sei die Geschwindigkeit der Parallelverschiebung, oder die Geschwindigkeit von O, V diejenige Geschwindigkeit, die P vermöge der Drehung um O erhält. Fällt, wie wir annehmen wollen, die augenblickliche Drehaxe durch O nahezu mit der Figurenaxe zusammen, so liegt die Richtung von V nahezu senkrecht zur Figurenaxe und es wird die Gröfse von V gleich dem senkrechten Abstand des Punktes P von der Figurenaxe, d. i. gleich $\varrho \sin \vartheta$ multipliziert mit der augenblicklichen Drehgeschwindigkeit des Kreisels um O. Die Richtung des Gleitens wird dann durch geometrische Zusammensetzung der beiden Geschwindigkeiten v und V gefunden — durch geometrische,

Hosted by Google

nicht durch algebraische Zusammensetzung, weil, wie wir sehen werden, die Richtungen von v und V notwendig gegen einander geneigt sind. Man wird nun drei Fälle unterscheiden können, nämlich

$$1)\quad V > v, \qquad 2)\quad V = v, \qquad 3)\quad V < v.$$

Fall 1) wird bei rascher Rotation des Kreisels der normale sein; je gröfser nämlich die Rotation, um so gröfser wird die der Rotation entsprechende Geschwindigkeit V des Stützpunktes und um so kleiner wird, nach den Resultaten bei der reibungsfreien Bewegung zu urteilen, die Präcessionsgeschwindigkeit und daher auch die Geschwindigkeit v werden. Bei hinreichend starker Rotation wird man sogar v gegen V vernachlässigen und die Richtung des Gleitens mit der Richtung von V identifizieren können.

Fall 3) wird sich einstellen, wenn im Verlaufe der Bewegung die Eigenrotation durch die Reibung bereits beträchtlich geschwächt ist. Dann ist die Geschwindigkeit v für die Bestimmung der Gleitrichtung mafsgebend.

Im Grenzfalle 2) findet, wenn wir die Gleichung $V = v$ nicht nur als eine Bedingung für die Gröfse, sondern auch für die Richtung der (in entgegengesetztem Sinne zu zählenden) Geschwindigkeiten v und V auffassen, überhaupt kein Gleiten statt. Bei entgegengesetzter Gleichheit von v und V ist nämlich der augenblickliche Stützpunkt in relativer Ruhe zur Unterlage; es rollt dann der augenblickliche Stützkreis ohne Gleiten auf der Unterlage ab. Ob aber im Verlauf der Bewegung dieser Grenzfall sich überhaupt vorübergehend realisiert, ist zweifelhaft und hängt von den Anfangsbedingungen ab.

Wir untersuchen zunächst den normalen Fall 1) des Näheren.

In Fig. 93 haben wir diejenigen Kreise verzeichnet, welche der Schwerpunkt S und der Punkt O nach Voraussetzung bei der präcessionsähnlichen Bewegung annähernd beschreiben. Beide Kreise sind durch senkrechte Projektion in die den Kreisel tragende Horizontalebene verlegt. Die Rotation finde annähernd um die Figurenaxe *im* Sinne des Uhrzeigers statt. Die Projektion des im Schwerpunkte konstruierten Drehimpulses auf diese Axe sei dementsprechend $N > 0$. Dann findet auch die Präcession des Stützpunktes von oben gesehen *im* Uhrzeigersinne statt. Letzteres können wir aus unseren früheren Ergebnissen bei Vernachlässigung der Reibung entnehmen. Die Winkelgeschwindigkeit ψ' der Knotenlinie, welche zugleich die Winkelgeschwindigkeit bedeutet, mit der der Stützpunkt um die (bei unserer früheren Betrachtung feste) Vertikale durch den Schwerpunkt rotiert, hatte (s. z. B. Gl. (31) von pag. 526) im Mittel den Wert

(2) $$\psi' = \frac{P}{N} = \frac{MgE}{N},$$

ist also *positiv* bei positivem N. Sicherlich wird der *Sinn* der Präcessionsbewegung durch die Reibung nicht umgekehrt werden können. Hierdurch ist die der Bahn von O in Fig. 93 beigegebene

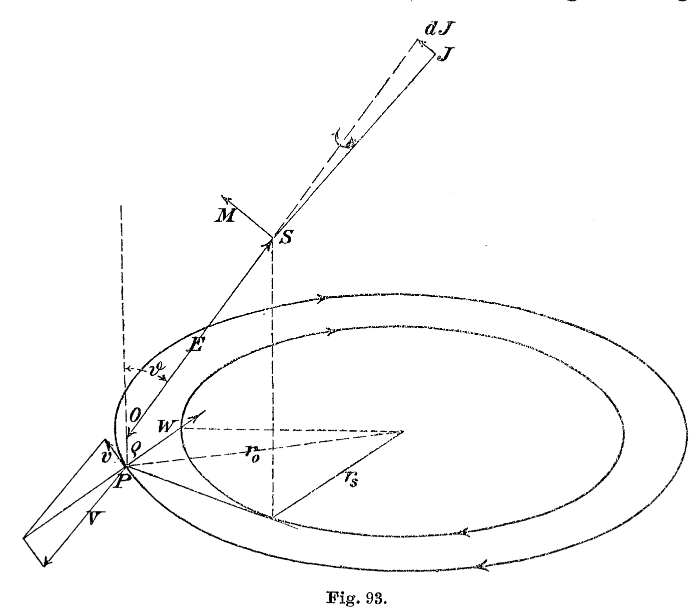


Fig. 93.

Pfeilrichtung gerechtfertigt. Dieselbe Pfeilrichtung kommt ersichtlich auch der Schwerpunktsbahn zu. Wir werden aber auch die *Gröfse* der in (2) genannten Präcessionsgeschwindigkeit auf den vorliegenden Fall übertragen dürfen, da die Reibung auf dieselbe nur einen indirekten Einflufs (durch Verkleinerung von N) hat.

Die oben eingeführten Geschwindigkeiten v und V sind jetzt nach Richtung und Gröfse leicht angebbar. v hat die Richtung der an die Bahn von O im Punkte P gelegten Tangente und ist in unserer Figur von P aus nach hinten gerichtet. V liegt ungefähr senkrecht zur Figurenaxe und ist bei dem festgesetzten positiven Rotationssinn in unserer Figur nach vorne gerichtet. Der Gröfse nach ist, wenn r_o den Radius der Bahn von O bedeutet,

(3) $$v = r_o \psi' = r_o \frac{MgE}{N}.$$

Ferner folgt aus dem Eigenimpuls N die Gröfse der Rotation um die Figurenaxe gleich N/C (C = Trägheitsmoment um die Figurenaxe) und hieraus nach obigem angenähert:

(4) $$V = \varrho \sin \vartheta \frac{N}{C}.$$

Wir setzen voraus, daſs nicht nur, entsprechend der Bedingung des Falles 1), V gröſser als v, sondern daſs V groſs gegen v sei. Dies besagt nach (3) und (4)

$$(5) \qquad \frac{N^2}{MgEC} \text{ groſs gegen } \frac{r_0}{\varrho \sin \vartheta}.$$

Bei hinreichend groſsem Eigenimpuls und hinreichend schräger Figurenaxe wird diese Bedingung in der That erfüllt sein.

Zugleich mit V steht unter der Annahme (5) auch der Reibungswiderstand W annähernd senkrecht auf der Figurenaxe; dem Sinne nach ist er in unserer Figur nach hinten gerichtet. Mit der Gröſse und Richtung von W hängt aber die Schwerpunktsbewegung auf's engste zusammen. Da nämlich W die einzige horizontale Kraft ist, die auf den Kreisel wirkt, so ist die Horizontalbeschleunigung des Schwerpunkts zu W parallel und gleich $W/M = \mu g$ (s. Gl. (1)). Beschreibt, wie wir annahmen, der Schwerpunkt nahezu einen Kreis mit annähernd konstanter Geschwindigkeit, so ist die Schwerpunktsbeschleunigung nahezu zentripetal, also senkrecht gegen die Kreisperipherie nach innen gerichtet. Da diese Richtung andrerseits genau parallel zur Richtung von W und daher nahezu senkrecht zur Richtung der Figurenaxe steht, so folgt, *daſs die Projektion der Figurenaxe auf die tragende Horizontalebene den Schwerpunktskreis nahezu tangieren muſs.* Und zwar entspricht von den beiden Tangenten, die in Fig. 93 von der augenblicklichen Lage von P an den Schwerpunktskreis gelegt werden können, offenbar die ausgezogene vordere Tangente den Verhältnissen des in Rede stehenden Falles 1). *Der Schwerpunkt bleibt also bei der Durchlaufung seines Kreises immer etwas hinter dem Stützpunkte zurück;* die Figurenaxe schneidet nicht die Vertikale durch den Mittelpunkt unserer Kreise, sondern dreht sich *in windschiefer Lage* um dieselbe herum. Auch die Gröſse des Schwerpunktskreises folgt nun leicht aus der Gröſse der Schwerpunktsbeschleunigung. Letztere ist einerseits bekanntlich gleich $r_s \psi'^2$, andrerseits wie oben bemerkt, gleich μg. Man hat also

$$(6) \qquad r_s = \frac{\mu g}{\psi'^2} = \mu g \frac{N^2}{(MgE)^2}.$$

Der Schwerpunktskreis ist um so gröſser, je gröſser der Eigenimpuls und je kleiner das Schweremoment $P = MgE$ ist; auſserdem nimmt seine Gröſse natürlich mit abnehmendem Reibungskoeffizienten μ ab und reduziert sich bei verschwindender Reibung auf Null, in Übereinstimmung mit früheren Ergebnissen. Auch die Gröſse des vom Stützpunkt beschriebenen konzentrischen Kreises ist hiernach bekannt. Man hat nämlich nach Fig. 93:

Hosted by Google

(7) $$r_o^2 = r_s^2 + (E \sin \vartheta)^2,$$

wo $E \sin \vartheta$ die Projektion der Länge OS in die Horizontalebene bedeutet. Dieser Kreis wird im allgemeinen nur wenig gröſser sein wie der Schwerpunktskreis.

Nachdem die Schwerpunktsbewegung bestimmt ist, haben wir die Drehung um den Schwerpunkt zu besprechen. In welchem Sinne wird dieselbe durch die Reibung W beeinfluſst? Wir konstruieren uns zunächst das Reibungsmoment $\mathfrak{M}(W)$ mit Bezug auf den Schwerpunkt. Vernachlässigen wir den Abstand ϱ der Punkte O und P, so enthält die durch S und W gelegte Ebene annähernd die Figurenaxe. Der das Reibungsmoment darstellende Vektor, welcher als Lot auf dieser Ebene zu konstruieren ist, steht daher annähernd senkrecht auf der Figurenaxe und ist in der durch die Figurenaxe gelegten Vertikalebene unter den Verhältnissen unserer Figur 93 schräg nach *oben* gerichtet. Derselbe setzt sich nun mit dem vorhandenen Drehimpulse in der Weise zusammen, daſs sich der Impuls in jedem Zeitelemente dt um $dJ = \mathfrak{M}\,dt$ ändert. Der Impuls, der annähernd die Richtung der Figurenaxe hat, wird dadurch nach oben hin abgelenkt. *Der Impuls richtet sich durch die Reibungswirkung allmählich auf.* Um von hieraus zu schlieſsen, daſs auch die Figurenaxe sich aufrichtet, erinnern wir an die Schluſsweise von pag. 555, wonach die Rotationsaxe annähernd der Impulsaxe folgt, während die Figurenaxe in schnellem Zeitmaſs um die Rotationsaxe herumgeführt wird, so daſs ihre mittlere Lage mit der Lage der Rotationsaxe annähernd übereinstimmt. Wir erkennen hieraus weiter, *daſs die Figurenaxe dauernd in der Nähe des Impulses bleibt, sich also ebenfalls aufrichtet.*

Natürlich ist neben dem Reibungsmomente $\mathfrak{M}(W)$ das Moment des Gegendruckes $\mathfrak{M}(R)$ zu berücksichtigen; dieses hat eine horizontale Axe und giebt in der vom reibungsfreien Falle her bekannten Weise indirekt zu der Präcession des Kreisels Anlaſs.

In erster Annäherung bleibt die Gröſse des Impulses vermöge der Reibungswirkung ungeändert, da der Impuls-Endpunkt (vgl. Fig. 93) annähernd senkrecht gegen die Figurenaxe und daher auch annähernd senkrecht gegen die Impulsrichtung fortschreitet. Es ist aber klar, daſs auf die Dauer der Impuls dennoch geschwächt werden muſs. Denn einerseits wird bei der Hebung der Figurenaxe Arbeit gegen die Schwerkraft geleistet, andrerseits geht an der Unterlage dauernd Reibungsarbeit verloren. Diese Arbeitsverluste müssen aus der lebendigen Kraft des Kreisels gedeckt werden, also teils aus der lebendigen Kraft der Schwerpunktsbewegung, teils aus derjenigen der Drehbewegung.

Hosted by Google

Die Schwerpunktsgeschwindigkeit ist gleich $r_s \psi'$ und hat nach den Gl. (2) und (6) die Gröſse

$$\mu g \frac{N}{MgE}.$$

Soll dieselbe abnehmen, so muſs N abnehmen. Zu dem gleichen Resultat werden wir offenbar geführt, wenn wir annehmen, daſs die Arbeitsverluste auf Kosten der lebendigen Kraft der Drehbewegung vor sich gehen. Denn der Hauptbestandteil dieser lebendigen Kraft ist wie bekannt $N^2/2C$. *Während also der Eigenimpuls N in erster Näherung konstant bleibt, muſs er in zweiter Näherung langsam abnehmen.*

Die allmähliche Verminderung von N bedingt aber weiter, daſs sich die Präcessionsgeschwindigkeit ψ' nach Gl. (2) beschleunigt und ferner nach Gl. (6), daſs sich der Radius des Schwerpunktskreises verringert. Hieraus folgt nach Gl. (7), daſs auch der Radius des vom Stützpunkte beschriebenen Kreises r_0 abnehmen muſs, der übrigens in geringerem Grade auch durch das Aufrichten der Figurenaxe (Verkleinerung des Winkels ϑ) verkleinert wird. Diese Ergebnisse stimmen, wie man sieht, mit den vorangestellten Resultaten der Beobachtung überein.

Wir fassen unsere Betrachtungen wie folgt zusammen: *Im Falle* 1) [$V > v$ oder besser V groſs gegen v] *läuft der Schwerpunkt auf einem Kreise, dessen Radius sich allmählich verkleinert, also genauer gesagt, auf einer sich verengernden Spirale, und zwar mit abnehmender Geschwindigkeit. Das Gleiche gilt von dem Stützpunkte P oder dem Halbkugelmittelpunkte O. Die Figurenaxe, die ursprünglich unter dem Winkel ϑ windschief an der vertikalen Mittellinie des Schwerpunktskreises vorbeigeht, richtet sich im Verlauf der Bewegung durch den Einfluſs der Reibung immer mehr auf.*

Wir wollen in ähnlicher Weise den Fall 3) $v < V$ diskutieren. Hier ist die Geschwindigkeit v für den Sinn des Gleitens maſsgebend; unter den Verhältnissen unserer Fig. 94, wo v im Punkte P nach hinten gerichtet ist, wird der Reibungswiderstand W nach vorn gerichtet sein. Halten wir an unserer Annahme fest, daſs der Schwerpunkt sich nahezu gleichförmig auf einem Kreise bewegt, so muſs seine Zentripetalbeschleunigung wieder nach Richtung und Gröſse gleich W/M sein. Die Zentripetalbeschleunigung muſs also in Fig. 94 ebenso wie W nach vorn gerichtet sein, d. h. S muſs sich auf dem hinteren Halbbogen des Schwerpunktskreises befinden. *Der Schwerpunkt eilt jetzt dem Stützpunkt im Sinne der Bewegung etwas voraus.* Die Figurenaxe geht abermals an der durch den Mittelpunkt des Schwerpunkts-

Hosted by Google

kreises gelegten Vertikalen windschief vorbei. Dagegen können wir nicht mehr wie im Falle 1) behaupten, dafs W nahezu senkrecht zur Figurenaxe steht; es ist deshalb in Fig. 94 die in die Horizontalebene projizierte Figurenaxe nicht wie vorher als Tangente sondern als Sekante an den Schwerpunktskreis gelegt. Für die Gröfse des Schwerpunktskreises gilt wie vorher die Formel (6).

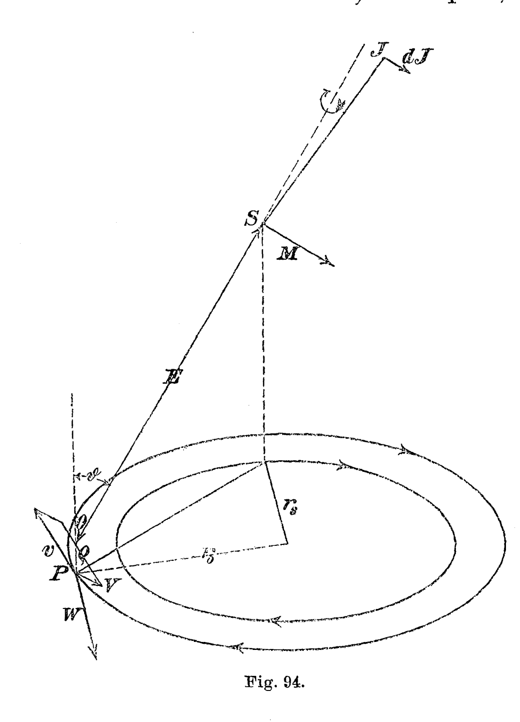


Fig. 94.

Es handelt sich ferner um den Einflufs der Reibung auf die Drehbewegung. Hier liegen die Verhältnisse dem Sinne nach umgekehrt wie im Falle 1). Da der Reibungswiderstand in unserer Figur nach vorne gerichtet ist, giebt er im Schwerpunkte ein Moment, dessen repräsentierender Vektor schräg nach unten verläuft. Der Impuls-Endpunkt wird also durch die Reibungswirkung jetzt nach unten abgelenkt. *Der Impulsvektor und* (bei Hinzunahme der Überlegung von pag. 555) *auch die Figurenaxe werden sich senken.*

Um auch hier die Arbeitsverhältnisse zu berücksichtigen, bemerken wir, dafs durch die Senkung der Figurenaxe Arbeit gewonnen, dafs dagegen durch den Reibungswiderstand dauernd Arbeit verbraucht wird. Wahrscheinlich wird die letztere Arbeitsgröfse überwiegen, sodafs im Ganzen die lebendige Kraft und insbesondere der Eigenimpuls weiter abnimmt. Wir sahen oben, dafs hieraus eine Verkleinerung des Schwerpunktskreises und weiterhin eine Verkleinerung der Bahn des Stützpunktes folgen würde. Andrerseits würde die zunehmende Neigung der Figurenaxe bei ungeändert bleibender Schwerpunktsbahn eine Vergröfserung der Bahn des Stützpunktes bedingen. Welcher von beiden Umständen mehr Einflufs auf die Gröfse der Bahn des Stützpunktes haben wird, läfst sich allgemein nicht entscheiden. Thatsächlich beobachtet man gegen Ende der Bewegung bei geschwächtem Eigenimpuls N zuweilen eine Erweiterung, zuweilen eine Verengerung der Bahn des Stützpunktes.

Hosted by Google

Als hauptsächliches Ergebnis dieser allerdings sehr unsicheren Betrachtung ist zu betonen: *Die Figurenaxe mufs sich im Falle* 3) *senken.* Hierbei kann es nicht ausbleiben, dafs der Kreisel schliefslich mit seinen oberen Partien die Unterlage berührt und nach einigen unregelmäfsigen Auslaufsbewegungen zur Ruhe kommt.

Hinsichtlich des Grenzfalles 2) $v = V$ wollen wir uns kurz fassen. Dieser kann sich nur vorübergehend und, da wir die den Fall definierende Gleichung als Bedingung sowohl für die Gröfse wie für die Richtung der Geschwindigkeiten v und V auffassen wollten, nur unter besonderen Umständen einstellen. Da in diesem Grenzfalle der Stützpunkt an der Unterlage überhaupt nicht gleitet, so ist die eventuell vorhandene Reibung als eine Reibung der Ruhe (vgl. § 2) zu bezeichnen. Man hat alsdann nach Coulomb $W \leqq \mu_0 Mg$, wo μ_0 den Reibungskoeffizienten der Ruhe bedeutet. Insbesondere ist es möglich, dafs die ruhende Reibung gleich Null wird, wenn nämlich der Schwerpunkt, dessen Beschleunigung auch jetzt nach Richtung und Gröfse, gleich W/M sein mufs, in Ruhe ist, wenn also der Schwerpunktskreis sich auf einen Punkt zusammengezogen hat. In diesem Falle ist es denkbar, dafs der Kreisel seine Präcession ausführt, genau so wie auf einer idealen glatten Ebene, die wir im Anhange zu Kapitel VI voraussetzten, dafs also die Figurenaxe weder steigt noch fällt. Eine solche Bewegung könnte sogar beliebig lange andauern, wenn nicht andere hierbei aufser Betracht gelassene Einflüsse (rollende Reibung, Luftwiderstand) die Bedingungen des Falles 2) stören und den Übergang zu dem Fall 3) bedingen würden.

Die Unterscheidung der vorangestellten drei Fälle $V > v$, $V = v$, $V < v$ haben wir einer Note von Archibald Smith*) entnommen, in welcher überdies namentlich der Einflufs der besonderen Form des Auflagerendes diskutiert wird. Um unsere früheren Reibungsbetrachtungen in diese Fallunterscheidung einzuordnen, bemerken wir, dafs beim Kreisel mit festgehaltenem Punkte O natürlich $v = 0$ ist. Hier befinden wir uns also notwendig unter der Bedingung des Falles 1). Dementsprechend fanden wir früher, dafs vermöge der gleitenden Reibung die Figurenaxe des Kreisels mit festem Punkte sich allemal aufrichten müsse. Eine Behandlung des vorliegenden Reibungsproblems findet sich, soweit es die Drehung des Kreisels um seinen Schwerpunkt angeht, auch in dem bekannten Buche von Jellett**), jedoch mit dem Unterschiede, dafs

---

*) Note on the theory of the spinning top. Cambridge Mathematical Journal Vol. 1 (1846) pag. 47.

**) Theorie der Reibung, deutsch von Lüroth und Schepp. Leipzig 1890, Kapitel 8, pag. 198.

Hosted by Google

hier die Richtung des Gleitens allein nach der Geschwindigkeit V beurteilt und das Vorhandensein der Geschwindigkeit v übersehen wird. Indem also Jellet gewissermafsen die Geschwindigkeit v gleich Null setzt, befindet er sich gleichfalls unter der Bedingung des Falles 1) und zeigt dementsprechend durch Rechnungen, die unserer obigen qualitativen Überlegung als Stütze dienen können, dafs die Figurenaxe sich aufrichten müsse. Nimmt man andrerseits an, dafs der Kreisel nach unten hin in eine absolut scharfe konische Spitze ausläuft, so wird der Stützpunkt ein Punkt der Figurenaxe, nämlich eben diese Spitze sein; alsdann ist bei reiner Rotation um die Figurenaxe $V = 0$ und wir befinden uns stets im Falle 3). Infolgedessen würde bei absolut zugeschärfter Auflagestelle die Figurenaxe unter allen Umständen durch die Reibung gesenkt werden.

Die hier gegebene Behandlung ist sowohl nach theoretischer wie nach experimenteller Seite hin reichlich unvollständig. So haben wir es nach theoretischer Seite überhaupt vermieden, die mit Reibungsgliedern behafteten Differentialgleichungen der Bewegung aufzuschreiben, weil wir uns bei der Unsicherheit der physikalischen Grundlagen keinen der Mühe entsprechenden Nutzen für das Verständnis des wirklich Beobachteten aus eingehenderen analytischen Entwickelungen versprachen. Nach experimenteller Seite haben wir uns mit der Aufzeichnung der Bahnkurve begnügt, welche der Unterstützungspunkt auf der Unterlage beschreibt, dagegen haben wir genauere Messungen über die zu jeder Bahnkurve gehörige Impulsgröfse, über die Abhängigkeit der Bewegung von den Anfangsbedingungen, von der Form der Auflagefläche etc. unterlassen müssen. Das letztere Versäumnis scheint uns im vorliegenden Falle schwerer zu wiegen, wie das erstere; wie wir denn allgemein wiederholentlich betonen möchten, dafs das Verständnis der wirklichen Bewegungsvorgänge, sofern dabei Reibungseinflüsse vorherrschend sind, mindestens ebenso sehr durch Beobachtung wie durch Rechnung zu fördern ist.

Kapitel VIII.

Anwendungen der Kreiseltheorie.

Abschnitt A. Astronomische Anwendungen.

§ 1. Die Präcession der Erdaxe, im Anschlufs an eine Idee von Gaufs behandelt.

Entsprechend der dominierenden Stellung, welche die astronomischen Anwendungen in der älteren mathematischen Litteratur einnehmen, ist das Problem der Rotationserscheinungen des Erdkörpers von hervorragendem Einflufs auf die Entwickelung der Kreiseltheorie überhaupt gewesen, wie sich unter Anderem in der auch von uns übernommenen Nomenclatur: reguläre Präcession, Nutation, Knotenlinie erweist. Fast die sämtlichen Namen der mathematischen Klassiker, allen voran Newton, dann Euler, d'Alembert, Laplace, Lagrange, Poisson, finden wir mit der Geschichte dieses Problems verknüpft.

Die Theorie der astronomischen Präcession ist sehr einfach, wenn man sich auf eine erste Annäherung beschränkt, sehr kompliziert, wenn man eine erschöpfende Behandlung anstrebt. Der letztere Standpunkt wird in den Lehrbüchern der Astronomie*) eingenommen, auf den ersteren müssen wir uns im wesentlichen stellen. Lediglich um dem nicht-astronomischen Leser einen Einblick in die mühsamen und bewundernswert gründlichen Methoden der Astronomie zu verschaffen, wollen wir zum Schlufs dieses Abschnittes einige Resultate der genaueren Theorie hersetzen.

Die Schwierigkeit wächst ganz aufserordentlich, wenn wir den Boden der abstrakten Dynamik verlassen und den Erdkörper nicht mehr als absolut starr ansehen. Die Diskussionen, die dann auftreten, sind heute noch keineswegs abgeschlossen. Wir werden diese Dinge für den folgenden Abschnitt aufsparen und zunächst an der *Annahme der Starrheit* festhalten.

---

*) Wir beziehen uns im Folgenden auf Tisserand, Mécanique céleste, t. II, Chap. 22—27. In § 194, pag. 442 berichtet Tisserand über die Geschichte des Problems und den Anteil der oben genannten Klassiker an seiner Erforschung.

Hosted by Google

Die Methode, der wir uns bedienen werden, ist einem von Gaufs angegebenen Verfahren zur Berechnung der säkularen Störungen der Planetenbahnen nachgebildet. Sie hat den Vorzug grofser Anschaulichkeit und liefert die einzelnen Bestandteile der Lösung schrittweise nach der Reihenfolge ihrer Wichtigkeit. Auf das vorliegende Problem scheint sie bisher nicht angewandt zu sein. Gaufs selbst leitet seine Methode durch die Bemerkung ein, dafs „die Säkularveränderungen einer Planetenbahn durch die Störung eines anderen Planeten dieselben sind, der störende Planet mag seine elliptische Bahn nach Keplers Gesetzen wirklich beschreiben, oder seine Masse mag auf den Umfang der Ellipse in dem Mafse verteilt angenommen werden, dafs auf Stücke der Ellipse, die sonst in gleich grofsen Zeiten beschrieben werden, gleich grofse Anteile an der ganzen Masse kommen“.

Diesen Gedanken wollen wir uns zu eigen machen und erweitern: Wir wollen nicht nur die Masse des störenden, sondern später (§ 2) auch die des gestörten Körpers, wo dieses wünschenswert ist, längs seiner Bahn verteilen, die wir dann als starren Ring behandeln, und werden nicht nur die säkularen, sondern auch, bei Zugrundelegung einer anderen Massenverteilung, die periodischen Störungen (§ 3) zu finden lernen.

So wie Gaufs seine Methode auseinandergesetzt hat, dient sie zur *genauen* Bestimmung der säkularen Störungen (wenigstens derjenigen erster Ordnung). Indem wir auf die von Gaufs beabsichtigte Genauigkeit verzichten, werden wir sie dadurch vereinfachen, dafs wir zunächst von der Excentricität der Bahn, d. h. hier der Sonnen- und Mondbahn absehen, diese also als kreisförmig voraussetzen. Damit fällt aber zugleich die in dem Gaufsischen Citat vorgesehene Ungleichförmigkeit der Massenverteilung fort, welche ja der ungleichförmigen Bewegung auf der Ellipse entsprechen sollte, und macht einer gleichförmigen Verteilung auf der Kreisperipherie Platz.

Der wichtigste Teil der Rotationserscheinungen der Erde ist die *Präcessionsbewegung.* Die kinematischen Verhältnisse derselben sind uns im Groben schon von früher her (pag. 50) bekannt: Die Erdaxe bildet mit der Normalen zur Ekliptik einen Winkel von $23\frac{1}{2}^{0}$ (genauer zur Zeit $23^{0}\,27'\,7''$, welche Zahl aber selbst langsam veränderlich ist) und dreht sich unter diesem Winkel um die besagte Normale in ca. 26 000 Jahren einmal herum. Zusammen mit der täglichen Umdrehung der Erde stellt diese Axenbewegung eine reguläre Präcession

*) Determinatio attractionis etc., Ges. W. Bd. 3, pag. 331 und 357. Es ist dies dieselbe Abhandlung, welche die einzige direkte Mitteilung von Gaufs über seine Theorie der elliptischen Integrale enthält.

Hosted by Google

im früheren Sinne dar u. zw. eine retrograde: Betrachten wir nämlich den Vorgang von derjenigen Seite der Ekliptik aus, nach welcher der Nordpol der Erde hinweist, so findet die Drehung der Erde um ihre Figurenaxe entgegen dem Sinne des Uhrzeigers, die Drehung der Erdaxe um die Normale der Ekliptik im Sinne des Uhrzeigers statt (s. die nebenstehende Figur; die drei Pfeile, welche bez. der Figurenaxe der Erde F, der Normalen N und der Ebene E der Ekliptik beigegeben sind, deuten die Richtung der Erdrotation, der Präcession der Erdaxe und der scheinbaren Sonnenbewegung an); der schmale Polhodiekegel, dessen Gröfse pag. 50 ermittelt wurde, rollt im Innern des Herpolhodiekegels ab (vgl. Fig. 8 von pag. 52 sowie Fig. 100a).

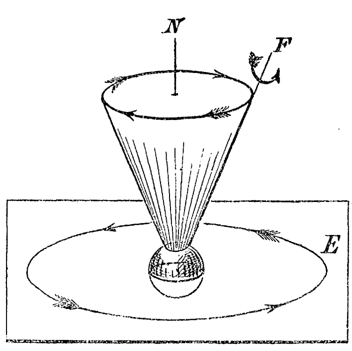


Fig. 95.

Diese Verhältnisse ebenso wie die Zahl 26000 sind der Beobachtung natürlich nicht direkt zugänglich. Letztere bezieht sich vielmehr auf die Schnittpunkte der Ekliptik mit der Äquatorebene, welche bekanntlich *Frühlings- und Herbst-Äquinoktialpunkte* (*Tag- und Nachtgleichen-Punkte*) heifsen und deren Verbindungsgerade die Knotenlinie K ist. Aus der Präcessionsbewegung der Erdaxe folgt nun, dafs sich auch diese Punkte im Sinne des Uhrzeigers, d. h. entgegen dem Sinne der scheinbaren Sonnenbewegung um die Normale der Ekliptik herumbewegen und zwar, wie die Beobachtung zeigt, in jedem Jahre um den Betrag von ca. 50″. Hieraus berechnet sich rückwärts die angegebene ungefähre Periode von 26 000 Jahren. Es ist nämlich die Zeit eines vollen Umganges der Äquinoktialpunkte, also auch die Zeit, in der die Erdaxe die Normale der Ekliptik einmal umkreist, gleich

$$\frac{360^0}{50''} = \text{ca. } 26\,000 \text{ Jahren.}$$

Wir fragen nun, wie weit diese Erscheinung durch die bisherige Theorie des schweren symmetrischen Kreisels erklärt werden kann. Dafs es sich um nichts anderes, als eine Wirkung der allgemeinen Gravitation auf die am Äquator wulstförmig aufgetriebene, rotierende Erdmasse handelt, hat schon Newton*) erkannt und damit einen der wichtigsten und bewunderswertesten Belege seiner Theorie geschaffen.

Da die ins Spiel kommenden Anziehungskräfte nur von der gegenseitigen Lage der Himmelskörper abhängen, dürfen wir uns den Schwer-

*) Philosophiae naturalis principia mathematica. 1687. Tom. III, Prop. XXI, Theor. XVII.

Hosted by Google

punkt der Erde als fest und die übrigen Himmelskörper relativ gegen die Erde bewegt denken. Von diesen werden wir nur diejenigen Körper zu berücksichtigen brauchen, welche entweder durch ihre überwiegende Gröfse oder durch ihre geringe Entfernung von der Erde ausgezeichnet sind, d. h. nur die Sonne und den Mond. Zur vollständigen Behandlung der Rotationserscheinungen der Erde wäre es erforderlich, die wechselnde Gröfse der Anziehungskraft infolge der wechselnden Entfernung beider Körper von der Erde und die wechselnde Richtung der Kraft infolge des Fortschreitens der Körper auf ihren Bahnen zu berücksichtigen. In dieser Allgemeinheit werden wir auf das Problem im dritten Paragraphen zurückkommen. Wir werden uns dort das zeitlich veränderliche Potential der Sonnen- und Mondanziehung $V(t)$ in eine trigonometrische Reihe nach der Zeit t entwickelt denken und die den einzelnen Perioden des Sonnenumlaufs, des Umlaufs der Mondknoten etc. entsprechenden periodischen Glieder für sich betrachten. Das konstante Glied jener Reihe liefert im Besonderen die *säkulare Einwirkung* von Sonne und Mond auf die Erde, welches als Folgeerscheinung die uns zunächst interessierende Präcessionsbewegung der Erdaxe ergiebt. Indem wir an dieser Stelle auf jene allgemeinere Betrachtung nur hinweisen, wollen wir uns nun des anschaulichen Gaufsischen Verfahrens bedienen, welches gerade den in Frage kommenden säkularen Teil aus der gesamten Anziehungswirkung aussondert.

Wir denken uns also die Masse von Sonne und Mond auf ihren relativen Bahnen gegen die Erde ausgebreitet, und zwar gleichförmig ausgebreitet, da wir diese Bahnen als Kreise voraussetzen wollten. Der Radius der Kreise entspricht dem mittleren Erdabstand von Sonne und Mond. Wir haben auf diese Weise statt der wirklichen Sonnen- und Mondanziehung die Anziehung eines unendlich dünnen „Sonnen- und Mondringes“ von gleichförmiger Dichte zu untersuchen. Ferner wollen wir fürs Erste von der Neigung der Mondbahn gegen die Ekliptik, welche bekanntlich ungefähr 5^0 beträgt, absehen und uns den Mondring in die Ebene des Sonnenringes hineingedreht denken (s. Fig. 96, wo den fraglichen Ringen die in der Astronomie üblichen Zeichen für Sonne ☉, Mond ☾ und Erde ♁ beigegeben sind). Auch über die Beschaffenheit der Erde wollen wir vereinfachende Annahmen machen. Wie verabredet setzen wir sie als starr und aufserdem als Rotationskörper um die Nord-Südpol-Axe von den Trägheitsmomenten C und A voraus, wobei wegen der Aufbauchung am Äquator $C > A$ ist. Für die Berechnung sämtlicher Trägheitswirkungen kommt es nun auf die besondere Form der Erde in keiner Weise an; jeder andere Körper von denselben Trägheitsmomenten C, A, A an die

Hosted by Google

Stelle der Erde gesetzt, würde sich hinsichtlich aller Trägheitswirkungen bei der Rotation genau so verhalten wie die Erde. Aber mehr als das: Wir behaupten, dafs es auch bei der Berechnung der Anziehungs-

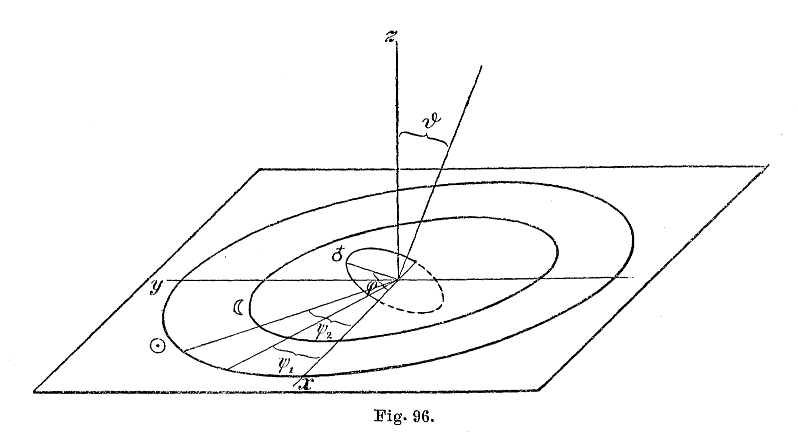


Fig. 96.

wirkungen von Sonne und Mond lediglich auf die Gröfse der Trägheitsmomente ankommt, sofern wir uns mit einer gewissen Näherung begnügen.

Zum Beweise denken wir uns das Anziehungspotential der wirklichen Erde auf einen äufseren, hinreichend entfernten Punkt P, z. B. einen Punkt des Sonnen- oder Mondringes hingeschrieben. Dasselbe hat die Form $\sum \frac{m}{r}$, wo m ein Massenelement der Erde ist und die Summation sich auf die ganze Erdmasse erstreckt. Hier wird man $1/r$ nach Potenzen der Verhältnisse X/r_0, Y/r_0, Z/r_0 entwickeln, wobei unter XYZ die Koordinaten des Massenelementes m verstanden werden, als Koordinaten-Anfangspunkt der Mittelpunkt (Schwerpunkt) der Erde gedacht wird und r_0 den Abstand des Punktes P vom Erdmittelpunkte bedeutet. Diese Reihe konvergiert sehr schnell, weil die genannten Verhältnisse in unserem Falle höchstens gleich dem Verhältnis Erdradius durch Radius der Mondbahn sind. Man wird daher, wenn man keine grofse Genauigkeit anstrebt, die Reihe mit den Gliedern niedrigster Ordnung abbrechen dürfen. Die Glieder erster Ordnung verschwinden bei der Summation über die Erde, falls man als Koordinatenanfang den Schwerpunkt gewählt hat. Die Glieder zweiter Ordnung weisen nach Ausführung der Summation als Koeffizienten die Gröfsen $\Sigma m X^2$, $\Sigma m XY, \ldots$, d. h. die Trägheitsmomente und Trägheitsprodukte (oder Centrifugalmomente) der Erde auf. Läfst man insbesondere die Koordinatenaxen mit den Hauptträgheitsaxen zusammenfallen, so reduziert sich die Zahl der quadratischen Glieder auf drei und ihre Koeffi-

Hosted by Google

zienten werden die drei Hauptträgheitsmomente. Daraus folgt aber, daſs in erster Annäherung, d. h. bei Berücksichtigung lediglich der Glieder niedrigster Ordnung, alle Körper von gleicher Lage der Hauptaxen und gleicher Gröſse der Hauptträgheitsmomente sich auch hinsichtlich der Gravitationswirkungen gleich verhalten müssen. Wir können also auch in dieser Hinsicht für die Erde einen beliebigen anderen Körper substituieren, falls nur das Trägheitsellipsoid desselben mit dem der Erde identisch ist.

Für viele Zwecke ist es üblich und nützlich, sich die Erde durch ein ideales Rotationsellipsoid ersetzt zu denken. In unserem Falle ist aber eine andere Wahl vorzuziehen: wir denken uns eine vollkommene, homogene Kugel, welche am Äquator mit einem gleichförmig mit Masse belegten Gürtel versehen ist. Es sei a das Trägheitsmoment der Kugel für einen ihrer Durchmesser und m die auf unserem Gürtel, dem „Erdringe", ausgebreitete Masse. Wir haben es nun so einzurichten, daſs diese Kombination, Kugel und Ring, dieselben Hauptträgheitsmomente C und A besitze, wie die wirkliche Erde, um in ihr einen für unsere Zwecke vollkommenen Ersatz der wirklichen Erde zu haben. Es ist aber das Trägheitsmoment des Ringes um die Nord-Süd-Axe gleich mR^2, das um eine äquatoriale Axe gleich $\frac{1}{2} mR^2$, unter R den Erdradius verstanden. Mithin haben wir zu bewirken, daſs

$$mR^2 + a = C,$$
$$\frac{1}{2} mR^2 + a = A$$

wird; wir haben also zu wählen:

$$(1) \qquad m = \frac{2(C - A)}{R^2}, \quad a = 2A - C.$$

Weiter ist aus Symmetrierücksichten klar, daſs die Kugel vom Trägheitsmomente a bei der Berechnung des Drehmomentes der anziehenden Wirkung von Sonnen- und Mondring nicht in Frage kommt, daſs wir vielmehr nur den Erdring zu berücksichtigen haben. Ferner lehrt die mechanische Anschauung ohne Weiteres, daſs Sonnen- und Mondring in gleicher Weise bestrebt sein werden, den Erdring in die Ebene der Ekliptik hineinzudrehen. Die betr. Drehkraft hat die Knotenlinie zur Axe und wirkt, von derjenigen Seite der Knotenlinie gesehen, welche den Frühlings-Tag- und Nachtgleichen-Punkt trägt, um diese Axe entgegen dem Sinne des Uhrzeigers, gerade so wie die Schwerkraft bei einem symmetrischen Kreisel, dessen Schwerpunkt unter dem Stützpunkte liegt. Wir wünschen die Gröſse dieser Drehkraft zu berechnen.

Hosted by Google

Sei m_1 die Masse, r_1 der Radius des Sonnenringes und ψ_1 ein in der Ekliptik etwa von der Knotenlinie aus gezählter Winkel, welcher die einzelnen Punkte des Sonnenringes unterscheidet (s. Fig. 96). Die analoge Bedeutung mögen m_2, r_2, ψ_2 für den Mondring haben. Endlich sind dieselben Gröſsen für den um den Erdäquator herumgelegten Erdring: m (s. oben), R (Erdradius) und φ (ein in der Äquatorebene von der Knotenlinie aus gezählter Winkel).

Der Winkel zwischen Erdring und Ekliptik heiſse ϑ ($= 23^1/_2{}^0$ ca.). Wir legen rechtwinklige Koordinaten x, y, z zu Grunde, indem wir die z-Richtung mit der Normalen der Ekliptik, die x-Richtung mit der Knotenlinie zusammenfallen lassen; dann wird für den Sonnen- und Mondring:

$$x_1 = r_1 \cos\psi_1, \quad y_1 = r_1 \sin\psi_1, \quad z_1 = 0,$$
$$x_2 = r_2 \cos\psi_2, \quad y_2 = r_2 \sin\psi_2, \quad z_2 = 0,$$

während wir für den Erdring haben:

$$x = R\cos\varphi, \quad y = R\sin\varphi\cos\vartheta, \quad z = R\sin\varphi\sin\vartheta.$$

Um das Anziehungspotential des Sonnenringes auf den Erdring zu bilden, berechnen wir

$$\frac{1}{r} = \{(x_1-x)^2+(y_1-y)^2+(z_1-z)^2\}^{-\frac{1}{2}} = \{r_1{}^2+R^2-2Rr_1 s\}^{-\frac{1}{2}},$$
$$s = \frac{xx_1+yy_1+zz_1}{Rr_1} = \cos\psi_1\cos\varphi + \sin\psi_1\sin\varphi\cos\vartheta,$$

und entwickeln $\frac{1}{r}$ nach Potenzen der kleinen Gröſse $\frac{R}{r_1}$, indem wir nur die Glieder bis zur zweiten Potenz incl. hinschreiben:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1}\left(1 + \frac{Rs}{r_1} + \frac{3}{2}\left(\frac{Rs}{r_1}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{R}{r_1}\right)^2 + \cdots\right).$$

Dieser Ausdruck ist nach ψ_1 und φ, d. h. über den Sonnen- und Erdring zu integrieren. Dabei wird

$$\int_0^{2\pi} s\,d\psi_1 = 0, \quad \int_0^{2\pi} s^2\,d\psi_1 = \pi(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\cos^2\vartheta),$$
$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} s^2\,d\psi_1 = \pi^2(1+\cos^2\vartheta).$$

Das gesuchte Potential lautet daher, unter f die Gravitationskonstante verstanden:

$$V_1 = f\int\!\!\int\frac{dm_1\,dm}{r} = f\frac{m_1 m}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi} d\psi_1 \int_0^{2\pi}\frac{1}{r}\,d\varphi$$
$$= f\frac{m_1 m}{r_1}\left(1 + \frac{3}{8}\frac{R^2}{r_1{}^2}(1+\cos^2\vartheta) - \frac{1}{2}\frac{R^2}{r_1{}^2} + \cdots\right).$$

Hosted by Google

Dasselbe hängt, wie wir sehen, nur von dem Winkel ϑ ab; also wirkt die Anziehung nur auf eine Änderung des Winkels ϑ, d. h. auf eine Drehung um die Knotenlinie hin, wie wir schon oben erkannten. Die Gröfse dieser Drehkraft ist dabei in erster Annäherung, d. h. bei der schon vorher genannten Vernachlässigung der höheren Potenzen von $\frac{R}{r_1}$:

(2) $$\frac{\partial V_1}{\partial \vartheta} = -\frac{3}{4} f \frac{m_1 m R^2}{r_1^{\,3}} \sin\vartheta \cos\vartheta.$$

Endlich drücken wir die Masse m des Erdringes durch die Trägheitsmomente C und A des Erdkörpers aus (s. Gl. (1)) und erhalten:

(2′) $$\frac{\partial V_1}{\partial \vartheta} = -\frac{3}{2} f \frac{m_1 (C-A)}{r_1^{\,3}} \sin\vartheta \cos\vartheta.$$

Ebenso ergiebt sich das vom Mondringe herrührende Drehmoment zu

(2″) $$\frac{\partial V_2}{\partial \vartheta} = -\frac{3}{2} f \frac{m_2 (C-A)}{r_2^{\,3}} \sin\vartheta \cos\vartheta.$$

Die genannte Drehkraft ist daher gleich der Summe dieser beiden Ausdrücke, d. h. gleich

$$P \cos\vartheta \sin\vartheta,$$

wenn zur Abkürzung

(3) $$P = -\frac{3}{2} f (C-A) \left\{ \frac{m_1}{r_1^{\,3}} + \frac{m_2}{r_2^{\,3}} \right\}$$

gesetzt wird. Wir haben somit im vorliegenden Falle für die äufsere Drehkraft einen ganz ähnlichen Wert ($P \sin\vartheta \cos\vartheta$, $P < 0$) gefunden, wie früher beim schweren symmetrischen Kreisel, dessen Schwerpunkt unterhalb des Stützpunktes lag ($P \sin\vartheta$, $P < 0$).

Wir machen uns nun klar, *dafs unter dem Einflufs dieser Drehkraft die reguläre Präcession ähnlich wie früher eine mögliche Bewegungsform darstellt.* Gleichzeitig merken wir an, dafs sie ebensowenig wie früher, die allgemeinste mögliche Bewegungsform giebt. (Die Frage, ob es sich bei der Erde um die besondere *reguläre* Präcession oder um die allgemeine *pseudoreguläre* Präcession handelt, bildet den eigentlichen Gegenstand des folgenden geophysikalischen Abschnittes. Indem wir den Leser auf diesen verweisen, werden wir im gegenwärtigen Abschnitt die Bewegung der Erde und ebenso die des Mondringes als reguläre Präcession behandeln.) Dabei stützen wir uns am einfachsten auf das d'Alembertsche Prinzip (Kap. III, § 4), nach welchem bei jeder möglichen oder „natürlichen“ Bewegung des Kreisels die Trägheitswirkung der äufseren Drehkraft dauernd das Gleichgewicht hält. Die Trägheitswirkung des symmetrischen Kreisels bei der regulären Präcession wurde pag. 175 zu

(4) $$K = -C\mu\nu \sin\vartheta - (C-A)\nu^2 \sin\vartheta \cos\vartheta$$

Hosted by Google

gefunden; dieses Moment hatte die Knotenlinie zur Axe, ebenso wie im vorliegenden Falle die äufsere Drehkraft $P \sin\vartheta \cos\vartheta$. Das besagte Prinzip verlangt also:

$$K + P \sin\vartheta \cos\vartheta = 0. \tag{5}$$

In Gleichung (4) bedeutet ν die Präcessionsgeschwindigkeit, d. h. die Winkelgeschwindigkeit, mit der sich die Erdaxe um die Normale der Ekliptik dreht; μ ist die Winkelgeschwindigkeit der Erde bei ihrer täglichen Umdrehung, gemessen von der Knotenlinie aus. Als Unbekannte haben wir die Gröfse ν anzusehen. Unsere Gleichung liefert für dieselbe zwei Werte (wie früher bei der Präcessionsbewegung des symmetrischen Kreisels, pag. 178); da P (s. u.) sehr klein ist, wird der eine dieser Werte ebenfalls sehr klein, der andere von der Gröfsenordnung von μ. In unserem Falle kommt nur der erstere Wert für die Präcessionsgeschwindigkeit in Betracht, da die Beobachtungen unzweideutig zeigen, dafs ν erheblich kleiner als μ ist. Gleichzeitig berechtigt uns eben diese Kleinheit des Verhältnisses $\nu : \mu$ in Gleichung (4) das zweite Glied gegen das erste zu vernachlässigen und Gleichung (5) einfacher folgendermafsen zu schreiben:

$$C\mu\nu = P \cos\vartheta. \tag{5'}$$

Hieraus ergiebt sich als theoretischer Wert für ν:

$$\nu = \frac{P\cos\vartheta}{C\mu} = -\frac{3}{2}\frac{f}{\mu}\frac{C-A}{C}\left\{\frac{m_1}{r_1^{\,3}} + \frac{m_2}{r_2^{\,3}}\right\}\cos\vartheta. \tag{6}$$

Die rechte Seite läfst sich für die numerische Rechnung bequemer gestalten, wenn wir sie mit Hülfe des dritten Keplerschen Gesetzes umformen. Der präciseste Ausdruck desselben ist bekanntlich die Gleichung

$$f\frac{(m+m')}{a^3} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2;$$

hier bedeuten m und m' die beiden Massen des Zweikörperproblems, a die halbe grofse Axe der Keplerschen Ellipse, T die Umlaufszeit. Wenn wir von der Excentrizität absehen, wird a mit dem mittleren Abstande r identisch. Für die Bewegung der Erde um die Sonne ergiebt sich hieraus, da die Masse der Erde gegen die der Sonne ohne Weiteres vernachlässigt werden darf:

$$f\frac{m_1}{r_1^{\,3}} = \left(\frac{2\pi}{T_1}\right)^2 \tag{7}$$

und für die Bewegung des Mondes um die Erde

$$f\frac{M+m_2}{r_2^{\,3}} = \left(\frac{2\pi}{T_2}\right)^2 \quad \text{oder} \quad f\frac{m_2}{r_2^{\,3}} = \frac{m_2}{M+m_2}\left(\frac{2\pi}{T_2}\right)^2. \tag{7'}$$

Gleichung (6) schreibt sich daraufhin folgendermafsen:

$$\nu = -6\pi^2\frac{C-A}{\mu C}\left(\frac{1}{T_1^{\,2}} + \frac{m_2}{M+m_2}\frac{1}{T_2^{\,2}}\right)\cos\vartheta. \tag{6'}$$

Aus dieser Formel wollen wir nun einige numerische Schlüsse ziehen. Zunächst läfst sich der von der Sonne herrührende Bestandteil der Präcession (ν_1) mit dem von dem Monde herrührenden (ν_2) vergleichen. Wir haben nämlich ersichtlich

$$\frac{\nu_1}{\nu_2} = \left(\frac{M}{m_2} + 1\right) \frac{T_2^{\,2}}{T_1^{\,2}}.$$

Hier ist $T_2 : T_1$ das Verhältnis des (siderischen) Mondumlaufs zum (siderischen) Jahre, d. h. ungefähr gleich $27\,^1/_3 : 365\,^1/_4$. Für das Verhältnis der Erdmasse zur Mondmasse werden wir den Wert 82 zu Grunde legen. Infolge dessen ergiebt sich

$$\frac{\nu_1}{\nu_2} = 0{,}47 \quad \text{oder} \quad \frac{\nu_2}{\nu_1} = 2{,}13.$$

Der Beitrag des Mondes zur Präcessionserscheinung ist also wegen seiner geringen Entfernung trotz seiner geringen Masse mehr als doppelt so grofs, wie der der Sonne.

Berechnen wir nun die beiden Bestandteile einzeln. Wir haben

$$\text{(8)} \qquad \nu_1 = -\,6\pi^2 \frac{C-A}{C} \frac{\cos\vartheta}{\mu\, T_1^{\,2}}, \quad \nu_2 = 2{,}13 \cdot \nu_1.$$

Es ist aber μ, die Winkelgeschwindigkeit der Erdumdrehung, gleich $-\,2\pi$ dividiert durch die Länge des Sterntages*), also μT_1 gleich $-\,2\pi$ multipliziert mit der Anzahl der Sterntage, die auf ein Jahr kommen. Diese Anzahl ist bekanntlich um 1 gröfser wie die Anzahl der Sonnentage. Somit wird $\mu T_1 = -\,2\pi \cdot 366\,^1/_4$. (Das negative Zeichen rührt daher, dafs die Drehung der Erde entgegen dem Sinne des Uhrzeigers stattfindet.) Wir müssen ferner den Wert von $\frac{C-A}{C}$ kennen. Indem wir uns eines gewissen Zirkels schuldig machen (s. § 4), wollen wir dafür den Wert $\frac{1}{305}$ acceptieren. Nehmen wir als Zeiteinheit das Jahr an, so ergiebt sich schliesslich, in Bogensekunden ausgedrückt:

$$\text{(9)} \qquad \nu_1 = 3\pi \cdot \frac{\cos 23{,}5^0}{305 \cdot 366\,^1/_4} = 16''.$$

*) Diese Angabe ist nicht ganz genau. Da nämlich die Winkelgeschwindigkeit μ ebenso wie der Eulersche Winkel φ, dessen zeitlicher Differentialquotient sie ist, von der Knotenlinie aus zu messen ist und diese sich, eben wegen der Präcession, entgegen dem Sinne der Erdrotation verschiebt, so wird μ in Wirklichkeit etwas gröfser ausfallen. Die obige Angabe bezieht sich eigentlich auf die wahre Umdrehungsgeschwindigkeit r, die dritte Komponente des Drehungsvektors (p, q, r). Da aber $r = \varphi' + \cos\vartheta \cdot \psi'$, da ferner $\varphi' = \mu$, $\psi' = \nu$ ist, so wird die Differenz zwischen r und μ gleich $\nu \cos\vartheta$, welche Gröfse wegen der Kleinheit von ν für unsere Zwecke nicht in Betracht kommt.



Die Knotenlinie dreht sich also wegen der Sonnenanziehung allein im Laufe eines Jahres um 16″ vorwärts.

Ferner ergiebt sich nach Gl. (8)

$$\nu_2 = 2{,}13 \cdot 16'' = 34''. \tag{9'}$$

Wegen der Mondanziehung allein dreht sich also die Knotenlinie während eines Jahres um 34″. Der Gesamtbetrag der Präcession ist mithin

$$\nu_1 + \nu_2 = 50''. \tag{10}$$

Soviel über die Erklärung und die ungefähre Gröſsenbestimmung der Präcession. Zum Vergleich mit Späterem wollen wir noch die Bewegung der Erdaxe durch Angabe der Eulerschen Winkel ψ und ϑ beschreiben. Dem bisherigen Grade der Annäherung entspricht die folgende Darstellung:

$$\begin{cases} \psi = \psi_0 + 50'' \cdot t, \\ \vartheta = 23^0\, 27'\, 7''; \end{cases} \tag{11}$$

die Gröſse ψ_0 bleibt hierin unbestimmt; sie hängt davon ab, von welchem Punkte der Ekliptik wir den Winkel ψ messen wollen.

§ 2. Der Rückgang der Mondknoten. Erste Erweiterung der Gauſsischen Methode.

Die Mondbahn fällt bekanntlich nicht genau mit der Ebene der Ekliptik zusammen, wie wir bisher annahmen, sondern bildet mit ihr einen Winkel von ca. 5^0 (genauer gesagt einen Winkel, der zwischen $5^0\,0'$ und $5^0\,18'$ schwankt). Ihre Schnittpunkte mit dieser Ebene sind die *Mondknoten*, die Verbindungslinie derselben heiſst die *Knotenlinie des Mondes.* Diese Knotenlinie führt nun unter dem Einfluſs der Sonnenanziehung eine, im Sinne der Mondbewegung gerechnet, rückläufige Bewegung aus; sie dreht sich um die Normale der Ekliptik ebenso wie die Knotenlinie der Erde im Sinne des Uhrzeigers, aber mit erheblich gröſserer Geschwindigkeit, nämlich in ca. $18\frac{2}{3}$ Jahren einmal um.

Wir können auch diese Knotenbewegung in Zusammenhang mit der Kreiseltheorie bringen und können ihren zahlenmäſsigen Wert von da aus bestimmen. Allerdings müssen wir dabei wesentliche Punkte aus der Theorie des Mondes als bekannt voraussetzen. Wir müssen nämlich von vornherein wissen, daſs die von der Sonne hervorgerufene hauptsächliche Störung der Mondbahn in einer Bewegung ihrer Knoten bei Unveränderlichkeit ihrer Neigung gegen die Ekliptik besteht. Wir müssen ferner wissen, daſs die (bekanntlich ziemlich groſse) Excen-

Hosted by Google

trizität der Mondbahn, von der wir im Folgenden notgedrungen absehen werden, die Gröſse der Knotenbewegung nicht erheblich beeinfluſst, so daſs die Knotenbewegung einerseits und die von der Excentrizität herrührenden Störungen der Mondbahn andrerseits für sich berechnet werden können. In unserer Betrachtung fehlt also, mathematisch gesprochen, der Existenzbeweis für die Mondknotenbewegung; was wir aus der Kreiseltheorie entnehmen können, ist lediglich die Berechnung der Gröſse dieser Bewegung unter Voraussetzung ihrer Existenz.

Wir halten im Folgenden an unserer früheren Vorstellung eines Sonnen- und Mondringes fest, die wir uns beide als starr und kreisförmig denken. Der von uns konstruierte „Erdring", dessen Anziehung wir nachträglich gleichfalls berücksichtigen werden, ist von zu geringer Masse, um für unsere jetzigen Zwecke merklich in Betracht zu kommen, so daſs wir uns zunächst auf die anziehende Wirkung des Sonnenringes beschränken werden. Entsprechend der Bewegung des Mondes um die Erde denken wir uns den Mondring mit der betr. Umlaufsgeschwindigkeit als starres Ganzes kontinuierlich in sich verschoben. Wir haben dann das folgende einfache Problem der Kreiseltheorie vor uns: *Der in Rotation befindliche Mondring steht unter dem Einfluſs der Anziehung des Sonnenringes, die ihn in die Ebene der Ekliptik hineinzuziehen sucht; er beschreibt unter dem Einfluſs derselben um die Normale der Ekliptik eine reguläre Präcession; welches ist seine Präcessionsgeschwindigkeit?*

Bei dieser Formulierung sind wir in der Anwendung der Gauſsischen Methode über Gauſs selbst einen Schritt hinausgegangen. Während nämlich Gauſs nur die Masse des störenden (des anziehenden) Körpers auf seiner Bahn verteilt, haben wir auch die Masse des gestörten (des angezogenen) Körpers durch eine auf dessen Bahn ausgebreitete kontinuierliche Massenbelegung ersetzt. Während es aber bei der anziehenden Masse, dem Sonnenringe, gleichgültig ist, ob wir uns dieselbe in Bewegung oder in Ruhe denken, ist es bei der angezogenen Masse, dem Mondringe, wesentlich, daſs wir seine Bewegung (in Gestalt einer Verschiebung des Ringes in sich) berücksichtigen. Denn diese Bewegung ist es gerade, die nach den Grundsätzen der Kreiseltheorie die Mondbahn in den Stand setzt, ihre Neigung gegen die Ekliptik gegenüber dem von dem Sonnenringe ausgeübten Drehmomente zu behaupten.

Wir bilden zunächst das Anziehungspotential des Sonnenringes auf den Mondring und leiten daraus die um die Knotenlinie des Mondringes wirkende Drehkraft ab. Sie lautet nach Gleichung (2) des vorigen Paragraphen:

$$\frac{\partial V}{\partial \vartheta_2} = -\frac{3}{4} f \frac{m_1 m_2 r_2^2}{r_1^3} \sin \vartheta_2 \cos \vartheta_2; \tag{1}$$



in der That brauchen wir nur die auf den Erdring sich beziehenden Gröſsen m, ϑ und R in der genannten Gleichung durch die auf den Mondring bezüglichen m_2, $\vartheta_2 = 5^0$ und r_2 zu ersetzen. Schreiben wir hierfür $P_2 \sin \vartheta_2 \cos \vartheta_2$, so wird mit Rücksicht auf Gl. (7) des vorigen Paragraphen:

$$(2) \qquad P_2 = -\frac{3}{4} f \frac{m_1 m_2 r_2^2}{r_1^3} = -\frac{3}{4} m_2 r_2^2 \left(\frac{2\pi}{T_1}\right)^2 = -\frac{3\pi^2}{T_1^2} C_2,$$

wo jetzt $C_2 = m_2 r_2^2$ das Trägheitsmoment des Mondringes um seine Figurenaxe bezeichnet.

Eine mögliche Präcessionsbewegung des Mondringes von langer Periode wird wieder hinreichend genau durch die Gleichung (5′) des vorigen Paragraphen definiert, welche wir, unter N die unbekannte Präcessionsgeschwindigkeit, unter M die Drehgeschwindigkeit des Mondringes verstanden, so zu schreiben haben:

$$(3) \qquad C_2 \mathsf{M} \mathsf{N} = P_2 \cos \vartheta_2;$$

sie ergiebt

$$(4) \qquad \mathsf{N} = -\frac{3\pi^2}{T_1^2 \mathsf{M}} \cos \vartheta_2.$$

Nun bedeutet M die Winkelgeschwindigkeit des Mondringes in Bezug auf seine Knoten; sie ist gleich derjenigen Winkelgeschwindigkeit, mit welcher, von der Erde aus gesehen, der Mond in seiner Bahn gegen die Mondknoten fortschreitet. Die betr. Umlaufszeit heiſst die drakonitische, sie ist gleich 27,2 Tagen*). Mithin wird

$$\mathsf{M} = -\frac{2\pi}{27{,}2} \quad \text{und} \quad \mathsf{M} T_1 = -2\pi \frac{365{,}25}{27{,}2}.$$

Nehmen wir wieder als Zeiteinheit das Jahr, so wird in Gradmaſs ausgedrückt

$$(5) \qquad \mathsf{N} = \frac{3}{2} \frac{27{,}2}{365{,}25} \cos 5^0 \cdot 180^0 = 20{,}0^0.$$

Dies wäre die Anzahl Grade, welche die Mondknoten in einem Jahre zurücklegen; die volle Umlaufszeit der Mondknoten würde daher betragen:

$$(6) \qquad \frac{360}{\mathsf{N}} = 18 \text{ Jahre.}$$

Der oben angegebene Wert war $18^2/_3$ Jahre oder genauer 6793 Tage; dem entspricht als genauerer Wert von N der Betrag $19^1/_3{}^0$. Der

---

*) Über die Beziehung dieser Winkelgeschwindigkeit zur wahren oder siderischen Winkelgeschwindigkeit des Mondes ist dasselbe zu sagen, wie oben über die Beziehung zwischen μ und r. Bezeichnen wir die siderische Winkelgeschwindigkeit (d. h. die Gröſse -2π dividiert durch den siderischen Monat) mit R, so gilt wieder $R = \mathsf{M} + \mathsf{N} \cos 5^0$.

Hosted by Google

Unterschied kann uns bei der Rohheit unserer Vorstellung vom Mondringe, bei der wir von der Excentrizität der Mondbahn absahen, nicht wunder nehmen.

Wir wollen noch ergänzungsweise den Einfluſs der *Erdanziehung* auf die Bewegung der Mondknoten, wenigstens in grober Annäherung, bestimmen. Es ist klar, daſs die Erde nur insofern die Ebene der Mondbahn stören kann, als sie von der Kugelgestalt abweicht, daſs also bei der im vorigen Paragraphen besprochenen Zerlegung der Erde in eine „Erdkugel" und einen „Erdring" nur der Erdring von der Masse m (Gl. (1) daselbst) zu berücksichtigen ist. Dieser Erdring m sucht nun ebenso wie der Sonnenring den Mondring in seine Ebene hineinzudrehen, also hier in die Ebene des Erdäquators. Wir schlieſsen wie oben, daſs unter dem Einfluſs dieses Drehmomentes und vermöge der eigenen Umdrehungsgeschwindigkeit des Mondringes die reguläre Präcession um die Normale der genannten Ebene, also hier um die Nord-Süd-Axe der Erde, eine mögliche Bewegungsform des Mondringes sei, wobei wir von der im vorigen Paragraphen untersuchten Eigenbewegung der Erdaxe absehen. Wir wollen die Präcessionsgeschwindigkeit und die Zeitdauer dieser Präcession bestimmen. Indem wir finden, was aus der geringen Masse des Erdringes vorherzusehen war, daſs diese Präcessionsgeschwindigkeit sehr klein, die Präcessionsdauer also sehr lang wird, verglichen mit der entsprechenden Geschwindigkeit und Zeitdauer bei der durch die Sonne hervorgerufenen Mondknotenbewegung, zeigt sich, daſs durch die Einwirkung der Erde die Mondknotenbewegung nur in geringer Weise und in säkularer Form abgeändert wird und daſs wir bei der vorhergehenden Berechnung derselben die Erdanziehung vernachlässigen durften. Die Art dieser (sehr geringfügigen) Abänderung besteht dabei nicht in einer einfachen Beschleunigung oder Verzögerung der durch die Sonne bewirkten Knotenbewegung, sondern sie verändert auch die Neigung der Mondbahn gegen die Ekliptik, da wie bemerkt die von der Erde bewirkte Präcessionsbewegung um eine andere Axe erfolgt, wie die durch die Sonne bewirkte.

Das Drehmoment des Erdringes auf den Mondring hängt von dem Winkel der Neigung des Mondringes gegen die Äquatorebene der Erde ab. Dieser Winkel wechselt wegen der durch die Sonne bewirkten Knotenbewegung und schwankt in $18^2/_3$ Jahren um $\pm 5^0$. Es ist am einfachsten und liegt am nächsten, jenen Neigungswinkel durch seinen Mittelwert zu ersetzen, d. h. durch den Winkel $\vartheta = 23{,}5^0$, unter dem die Äquatorebene der Erde gegen die Ekliptik geneigt ist. Indem wir dieses thun, sehen wir also wie im ersten Paragraphen von der Neigung

der Mondbahn gegen die Ekliptik ab, denken uns vielmehr den Mondring in die Ekliptik hineingedreht.

Das Drehmoment der Erdanziehung auf den Mondring können wir nun direkt aus der Gl. (2″) des vorigen Paragraphen entnehmen. Die dortige Formel bedeutete das Drehmoment, welches der in die Ekliptik hineingedrehte Mondring auf den Erdring ausübte. Gerade so grofs ist aber das jetzt in Frage stehende Drehmoment. Setzen wir dasselbe gleich $P_2' \sin\vartheta \cos\vartheta$, so wird nach der genannten Gleichung:

$$P_2' = -\frac{3}{2} f \frac{m_2 (C-A)}{r_2^3}.$$

Wir vergleichen das Produkt $P_2' \cos\vartheta$ mit dem Produkte $P_2 \cos\vartheta_2$, unter P_2 den in Gl. (2) dieses Paragraphen angegebenen Wert verstanden. Nach Gl. (3) dieses Paragraphen verhält sich nämlich diejenige Winkelgeschwindigkeit, mit der die Mondknoten um die Nord-Süd-Axe der Erde infolge der Anziehung des Erdringes umlaufen würden, zu derjenigen Geschwindigkeit, mit der sie infolge der Sonnenanziehung in der Ekliptik umlaufen, wie $P_2' \cos\vartheta$ zu $P_2 \cos\vartheta_2$. Nennen wir die beiden Geschwindigkeiten N' bez., wie oben, N, so haben wir

$$\frac{\mathsf{N}'}{\mathsf{N}} = \frac{P_2' \cos\vartheta}{P_2 \cos\vartheta_2} = \frac{2(C-A)}{m_1 r_2^2} \frac{r_1^3}{r_2^3} \frac{\cos\vartheta}{\cos\vartheta_2}.$$

Nach dem dritten Keplerschen Gesetz (Gl. (7) und (7′) aus § 1) dürfen wir setzen

$$\frac{r_1^3}{r_2^3} = \frac{m_1}{M+m_2} \frac{T_1^2}{T_2^2};$$

und erhalten daher:

$$\frac{\mathsf{N}'}{\mathsf{N}} = \frac{2(C-A)}{(M+m_2) r_2^2} \frac{T_1^2}{T_2^2} \frac{\cos\vartheta}{\cos\vartheta_2} = 2\frac{C-A}{C} \frac{C}{(M+m_2) r_2^2} \frac{T_1^2}{T_2^2} \frac{\cos\vartheta}{\cos\vartheta_2}.$$

Hier werde noch im Zähler des Ausdrucks ein Näherungswert für C eingesetzt; sehen wir nämlich die Erde vorübergehend als eine Kugel von gleichförmiger Dichte an, so dürfen wir nach einer bekannten Formel $C = \frac{2}{5} MR^2$ annehmen, so dafs sich schliefslich ergiebt:

$$\frac{\mathsf{N}'}{\mathsf{N}} = \frac{4}{5} \frac{C-A}{C} \frac{M}{M+m_2} \frac{R^2}{r_2^2} \frac{T_1^2}{T_2^2} \frac{\cos\vartheta}{\cos\vartheta_2}.$$

Die sämtlichen Faktoren dieses Ausdrucks sind bekannte Zahlen. Es ist z. B. das Verhältnis R/r_2 gleich ca. 1/60, während das Verhältnis $M/M+m_2$ hinreichend genau gleich 1 genommen werden kann. Mit Benutzung der schon früher angegebenen sonstigen Zahlenwerte ergiebt sich

$$\frac{\mathsf{N}'}{\mathsf{N}} = \frac{4}{5} \frac{1}{305} \left(\frac{1}{60}\right)^2 \left(\frac{365{,}25}{27{,}3}\right)^2 \frac{\cos 23{,}5^0}{\cos 5^0} = 1{,}2 \cdot 10^{-4}.$$

Hosted by Google

Die Geschwindigkeit N' ist also aufserordentlich klein gegen die Geschwindigkeit N. Umgekehrt ist die zu N' gehörige Präcessionsdauer aufserordentlich grofs gegen die Periode der Mondknotenbewegung in der Ekliptik, welche $18^2/_3$ Jahre beträgt. Jene Präcessionsdauer würde nämlich sein:

$$\frac{18^2/_3 \cdot 10^4}{1,2} = 156\,000 \text{ Jahren.}$$

Die Gröfse dieser Zahl zeigt unmittelbar, dafs unserer Betrachtung nur die Bedeutung einer *Abschätzung*, nicht die einer *zuverlässigen Berechnung* zukommt. Denn einerseits ändern sich während des genannten Zeitraumes die Elemente der Mondbahn in bedeutendem und nicht vorherzubestimmendem Mafse, während sie in unserer Rechnung als konstant angenommen wurden. Andrerseits und namentlich ändert sich in jenem Zeitraume die Lage des Erdringes im Raume wegen der Knotenbewegung der Erde völlig, während wir doch in unserer Rechnung die Stellung des Erdringes und das von ihm ausgeübte Drehmoment als unveränderlich voraussetzen mufsten. Diese Voraussetzung ist nur für einen Zeitraum zulässig, der klein ist gegen die Präcessionsdauer (26 000 Jahre) der Erdknoten, dagegen völlig unhaltbar für den hier gefundenen Zeitraum, der sich sogar gröfser als 26000 Jahre ergeben hat.

Trotzdem wird durch die vorstehende Rechnung soviel bewiesen, als wir ergänzungsweise zu beweisen wünschten: dafs nämlich die von dem Erdringe bewirkte Mondknotenbewegung zu vernachlässigen und dafs lediglich die Sonnenanziehung als mafsgebender Faktor hierbei zu berücksichtigen ist.

§ 3. Die astronomische Nutation der Erdaxe. Verallgemeinerung der Gaufsischen Methode auf periodische Störungen.

Indem wir uns zu der von Bradley 1747 entdeckten *Nutation der Erdaxe* wenden, betonen wir vorab, dafs diese „astronomische" Nutation mit der früher als Nutation der Kreiselaxe bezeichneten Bewegung in *kinetischer* Hinsicht nichts gemein hat. Die Nutation der allgemeinen Kreiseltheorie (vgl. besonders Kap. V, § 2) rührt daher, dafs der Anfangszustand der Bewegung im Allgemeinen nicht genau auf die reguläre Präcession abgepafst ist und dafs dementsprechend selbst beim Fehlen aller äufseren Kräfte die Figurenaxe im Raume im Allgemeinen einen Kegel beschreibt. Die astronomische Nutation dagegen hat ihren Ursprung darin, dafs auf die sich drehende Erde periodisch veränderliche Kräfte einwirken, welche natürlich eine in gleichem Zeitmafs erfolgende periodische Bewegung der Erdaxe be-

Hosted by Google

dingen. Indem wir an eine in der gesamten Mechanik ebenso wichtige wie bekannte Unterscheidung anknüpfen, können wir kurz so sagen: *Die frühere Nutation war eine freie, die jetzige ist eine erzwungene Schwingung.*

Die Ähnlichkeit beider Bewegungen, welche die gleiche Wahl der Bezeichnung rechtfertigen möge, ist vielmehr nur *kinematischer* Natur. In beiden Fällen handelt es sich um eine gegen die Periode der Präcession sehr kurze Schwingung. Die Periode der freien Nutation in der allgemeinen Kreiseltheorie beträgt $2\pi A/N$, die der Präcession $2\pi N/P$ (s. z. B. pag. 305, Gl. (13) und (15)), das Verhältnis beider Perioden ist daher die oft genannte Gröfse AP/N^2, die wir in der Regel als kleine Zahl (z. B. $< 1/100$) voraussetzen durften. Andrerseits rührt die astronomische Nutation von der Bewegung der Mondknoten her, hat daher wie diese die Periode von $18^2/_3$ Jahren; die Periode der Präcession der Erdaxe wurde zu 26000 Jahren berechnet; das Verhältnis beider Perioden ist daher auch hier sehr klein, sogar $< 1/1000$.

Um die Theorie der astronomischen Nutation an unsere bisherigen Betrachtungen anschliefsen zu können, müssen wir zunächst unsere von Gaufs übernommene Methode abermals erweitern. In ihrer ursprünglichen Form dient diese Methode nur zur Berechnung der *säkularen Störungen.* Wir werden aber sehen, dafs sie bei geringer Modifikation auch die *periodischen* liefern wird.

Formulieren wir zunächst das Problem der Erdrotation in allgemeinster Weise. Da haben wir auf der einen Seite die Erde, auf der anderen Seite Sonne und Mond, die ihre als bekannt anzusehenden relativen Bahnen um die Erde beschreiben und dementsprechend wechselnde Anziehungen ausüben. Die Gesamtheit der Anziehungswirkungen findet man am einfachsten aus dem *Anziehungspotential* durch Ableitung desselben nach den Koordinaten. Das Potential wird dabei, wie immer bei Störungsaufgaben, aus den relativen Lagen der fraglichen Körper *unter vorläufiger Absehung von den im Verlaufe der Rechnung selbst zu findenden Störungen* berechnet. Da die Störungen sich in der Regel im Verhältnis zur Hauptbewegung als klein ergeben, wird hierdurch nur ein kleiner Fehler entstehen. Wollte man dagegen die gestörte Bewegung selbst bei der Berechnung des Anziehungspotentials zu Grunde legen, so würde man neben den sog. Störungen erster Ordnung, auf die wir im folgenden allein abzielen, zugleich auch die „Störungen zweiter Ordnung" ermitteln. Auch wenn man die letzteren zu kennen wünschte, würde sich immer ein schrittweises Vorgehen und eine vorläufige Beschränkung auf die Störungen erster Ordnung empfehlen. In unserem

Hosted by Google

Falle haben wir unter der ungestörten Bewegung der Erde ihre gleichmäſsige Rotation um die gegen die Ekliptik geneigte Figurenaxe zu verstehen.

Dieses Potential V der Sonnen- und Mondanziehung auf die Erde wird man nun naturgemäſs in nicht-periodische und periodische Bestandteile spalten. Die periodischen Bestandteile der Sonnenanziehung V_1 werden zur Periode das Jahr, die der Mondanziehung V_2 teils den Monat, teils den Umlauf der Knoten etc. haben. Die *harmonische Analyse* liefert ein allgemeines methodisches Mittel, um diese Bestandteile von einander zu sondern. Bekanntlich findet man die Koeffizienten der trigonometrischen Reihe in der Form bestimmter Integrale. So ist der *unperiodische Teil von* V_1 gleich $\frac{1}{T_1}\int V_1(t)\,dt$, erstreckt über die Zeit eines vollen Sonnenumlaufs. Diese Formel läſst sich aber deuten als Potential der in geeigneter Weise mit Masse belegten relativen Sonnenbahn. Es sei dm das Massenelement, welches wir auf dem mit der Geschwindigkeit $\frac{ds}{dt}$ durchlaufenen Bahnelemente ds anbringen. Da das Potential $V_1(t)$ der ganzen Sonnenmasse m_1 entspricht, wird das Potential des genannten Massenelementes gleich $\frac{dm}{m_1}V_1(t)$ sein und das gesamte Potential der mit Masse versehenen Sonnenbahn $\frac{1}{m_1}\int V_1(t)\,dm$. Damit Übereinstimmung herrscht zwischen diesem Potential und dem genannten Koeffizienten der trigonometrischen Entwickelung, muſs die Massenverteilung so eingerichtet werden, daſs auf jedes Element der Bahn das Massenelement

$$dm = \frac{m_1\,dt}{T_1} \tag{1}$$

kommt. Die gesamte auf der Bahn aufgetragene Masse ist hiernach genau die gesamte Sonnenmasse m_1. Wir haben damit genau den ursprünglichen Gauſsischen Ansatz. Wird überdies die Bahn als kreisförmig, die Geschwindigkeit also als gleichförmig vorausgesetzt, so ist die Massenverteilung eine gleichförmige. Dies war unser Standpunkt bei der obigen Behandlung der Präcession, welche in der That von dem konstanten oder durchschnittlichen Teile der Sonnen- und Mondanziehung herrührt.

Betrachten wir nun die *periodischen Teile.* Indem wir wieder auf die Sonne argumentieren, sei T_1/n die betr. Periode, unter n eine ganze Zahl verstanden. Die Koeffizienten der beiden Terme von dieser Periode in der trigonometrischen Entwickelung sind:

$$\frac{2n}{T_1}\int V_1(t)\cos 2\pi\frac{nt}{T_1}\,dt, \qquad \frac{2n}{T_1}\int V_1(t)\sin 2\pi\frac{nt}{T_1}\,dt. \tag{2}$$



Wir fassen sie wieder auf als Anziehung der mit Masse belegten Sonnenbahn, wobei aber jetzt auf das Bahnelement ds die Masse $m_1 \frac{2n}{T_1} \frac{\cos}{\sin} 2\pi \frac{nt}{T_1} dt$ kommt, unter t und dt die Zeit resp. das Zeitintervall verstanden, zu der resp. in dem das Element ds von der Sonne durchlaufen wird. Die gesamte zur Verteilung kommende Masse ist jetzt Null, da wir neben positiver auch gleich viel „negative" Masse verwenden müssen. Die Dichte ist, selbst bei kreisförmiger Gestalt der Bahn, nicht gleichförmig sondern harmonisch variabel. Die nachstehenden schematischen Figuren mögen diese Verhältnisse im Falle $n = 0$ und $n = 2$ veranschaulichen.

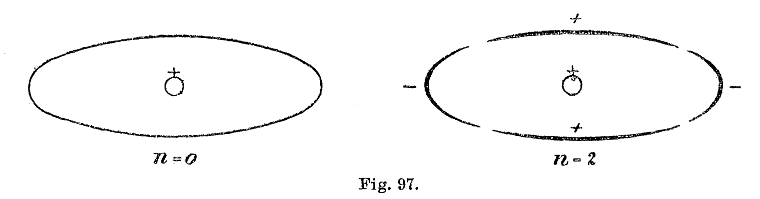


Fig. 97.

Die betr. auf den Erdkörper wirkenden periodischen Drehkräfte ergeben sich aus den berechneten trigonometrischen Koeffizienten durch Ableitung nach den räumlichen Koordinaten und Multiplikation mit $\frac{\sin}{\cos} \frac{2\pi nt}{T_1}$. Sie werden Störungen der Erdaxe von derselben Periode T_1/n hervorrufen. Auf die Berechnung derselben gehen wir hier nicht ein; sie kann nach dem Muster der weiter unten für die astronomische Nutation zu gebenden Entwickelungen erfolgen. Praktisch kommt von solchen Störungen nur diejenige in Betracht, welche die Periode $T_1/2$ hat, sowie die entsprechende von der Mondanziehung herrührende Störung von der Periode $T_2/2$. Auch bei diesen Gliedern übersteigt die Amplitude der Schwankung nur an einer Stelle den Betrag $1''$ (s. die Formeln am Schlusse des nächsten Paragraphen). Die Amplituden der übrigen Glieder von den Perioden $T_1, T_1/3, \cdots, T_2, T_2/3, \cdots$ sind so klein, daſs sie selbst für die Bedürfnisse der astronomischen Genauigkeit verschwinden.

Anders diejenigen Störungen, welche die Periode des Umlaufs der Mondknoten besitzen.

Sehen wir zunächst zu, wie sich bei ihnen unsere Methode gestaltet.

So wie wir oben durch gleichzeitige Inbetrachtnahme sämtlicher von Sonne und Mond durchlaufenen Örter ihrer Bahnen den Sonnen- und Mondring erzeugten, so werden wir jetzt, ausgehend von dem gegen die Ekliptik geneigten Mondring, indem wir uns die sämtlichen

Hosted by Google

Örter vorstellen, die er bei seiner Präcessionsbewegung einnimmt, eine „Mondringfläche“ erhalten. Diese durch Rotation des Mondringes um die Normale der Ekliptik entstehende Mondringfläche ist ersichtlich eine doppelt überdeckte*) Kugelzone vom Radius r_2 und der Höhe $2r_2 \sin 5^0$. Die beiden folgenden Figuren deuten die Massenverteilung in den Fällen $n = 0$ und $n = 1$ an, mit der wir unsere Mondringfläche auszustatten haben. Es möge dabei ausdrücklich hervorgehoben werden, daſs die Absicht bei der Einführung unserer Mondringfläche und der Verzeichnung der folgenden Figuren keine andere ist wie diejenige, die das Gauſsische Verfahren überhaupt verfolgt: den Sinn der Rechnungen an einem geometrischen Substrat zu veranschaulichen; die Rechnungen selbst werden dadurch im Grunde nicht vereinfacht, sondern sind genau identisch mit denjenigen, die wir auch bei rein analytischem Vorgehen auszuführen haben würden.

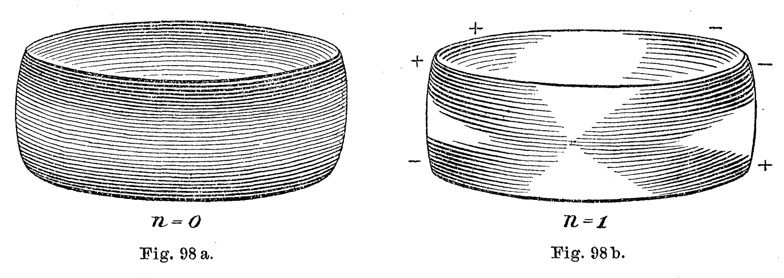


Fig. 98a. Fig. 98b.

a) *Im Falle* $n = 0$ (säkulare Störung) ist die Massenverteilung so zu wählen, daſs auf jedes Element der Mondringfläche eine Masse $d\mu$ kommt, die nach Analogie mit Gl. (1) gleich ist dem Produkt aus der Masse des dies Element überstreichenden Elementes der Mondringfläche in das Verhältnis dt/T, d. h. in das Verhältnis der Dauer des Überstreichens zu der ganzen Periode der Mondknoten. Wir wollen

*) Wir denken uns die Kugelzone *doppelt überdeckt*, d. h. aus *zwei Schalen bestehend*, die längs ihres oberen und unteren Randes zusammenhängen, weil jede Stelle der Kugelzone von dem rotierenden Mondringe *zweimal* überstrichen wird, einmal von dem in Fig. 99 gezeichneten vorderen, das andere Mal von dem in dieser Figur nicht angedeuteten hinteren Halbbogen. Am einfachsten wird die Vorstellung, wenn wir, der Kugelzone eine gewisse Körperlichkeit zuschreibend, die äuſsere Oberfläche derselben als die eine, die innere Oberfläche als die andere Schale auffassen und festsetzen, daſs der Mondring in jeder seiner Lagen am oberen bez. unteren Rande der Kugelzone von der einen auf die andere Schale übertritt. Damit steht die Wahl unserer Koordinaten α, β im Einklange: wenn wir im Folgenden α und β von 0 bis 2π integrieren, so überstreichen wir damit jede Stelle der Kugelzone doppelt, also jede der beiden Schalen einmal; der einen Schale entsprechen dabei die Werte der Koordinaten $-\pi/2 < \alpha < +\pi/2$, $0 < \beta < 2\pi$, der anderen Schale die Werte $+\pi/2 < \alpha < +3\pi/2$, $0 < \beta < 2\pi$.

Hosted by Google

in der Ebene des Mondringes einen Winkel α messen, indem wir etwa die Knotenlinie des Mondes OM (vgl. Fig. 99) als $\alpha = 0$ rechnen; jeder Punkt P des Mondringes ist dann durch den Centriwinkel $\alpha = MOP$ charakterisiert. Andrerseits wollen wir den Winkel, den die Mondknotenlinie OM gegen einen willkürlichen festen Anfangsstrahl OA in der Ekliptik bildet, mit β bezeichnen; ψ sei der Winkel, den die Knotenlinie der Erde mit demselben Strahl OA bildet. Die Winkel α, β stellen dann schiefwinklige sphärische Koordinaten auf

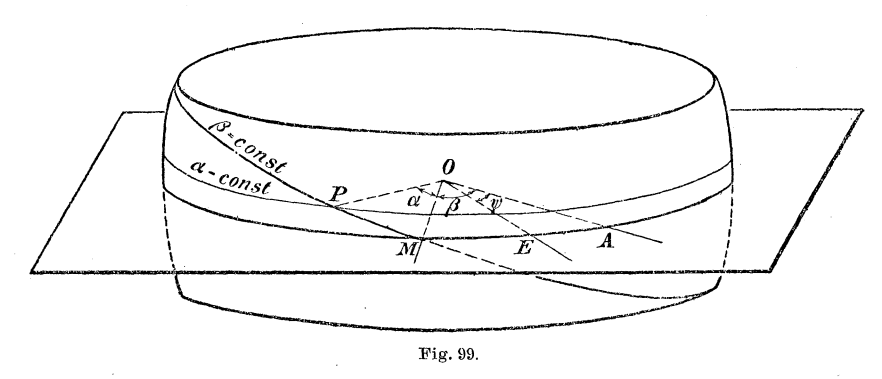


Fig. 99.

unserer Kugelzone dar, durch welche die Lage eines jeden Punktes der Kugelfläche fixiert werden kann und durch welche die Kugelzone in parallelogrammatische Elemente eingeteilt wird. Die auf ein solches Element entfallende Masse $d\mu$ ist nun gleichzusetzen der Masse des Mondringelementes, welches zu dem Winkel $d\alpha$ gehört, nämlich $m_2\, d\alpha/2\pi$, multipliziert in das oben genannte Verhältnis dt/T, welches bei gleichförmigem Umlauf der Mondknoten gleich ist $d\beta/2\pi$; man hat also

$$(3) \qquad d\mu = \frac{m_2}{4\pi^2}\, d\alpha\, d\beta.$$

Die gesamte zur Verteilung kommende Masse, die sich aus $d\mu$ durch Integration nach α und β je zwischen 0 und 2π ergiebt, ist natürlich gleich der Masse des Mondringes m_2.

Die Dichte der Verteilung, d. h. die Masse pro Flächeneinheit der Mondringfläche (zusammen für beide Schalen gerechnet) ist, wie man aus der geneigten Lage des Mondringes leicht versteht, nicht gleichförmig angeordnet, sondern häuft sich an den Rändern der Mondringfläche (für $\alpha = \pm\,\pi/2$) unendlich an. Längs der Breitenkreise ist dagegen die Dichte konstant. In Fig. 98a wurde versucht, diese Verhältnisse durch die Stärke der Schraffierung anzudeuten.

b) *Im Falle* $n = 1$ (periodische Störung) ist die auf der Mondringfläche zu supponierende Massenverteilung auch längs der Breitenkreise

Hosted by Google

nicht gleichförmig, sondern harmonisch variabel. Es tritt nämlich (vgl. die Formeln (2) für die Koeffizienten der trigonometrischen Reihe) zu der vorher bestimmten Masse der Faktor $2\cos\beta$ bez. $2\sin\beta$ hinzu. Mithin wird jetzt

$$d\mu = \frac{m_2}{2\pi^2} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\,\beta\, d\alpha\, d\beta. \tag{4}$$

Die gesamte zur Verteilung kommende Masse, die wieder durch Integration von $d\mu$ nach α und β zwischen 0 und 2π gewonnen wird, ist jetzt gleich Null.

Auch jetzt häuft sich die Dichte, die wir als algebraische Summe der auf die Flächeneinheit beider Schalen entfallenden Masse berechnen, nach den Rändern hin an und ist in benachbarten Oktanten der Kugelzone entgegengesetzt gleich. In Fig. 98b wurden diese Verhältnisse teils durch die Stärke der Schraffierung, teils durch Beifügung der Vorzeichen angedeutet.

Nachdem somit die Figuren 98 erläutert sind, bilden wir uns aus den gefundenen Massenbelegungen die zugehörigen Potentiale; und zwar soll das der Belegung (3) entsprechende Potential U, die den Belegungen (4) entsprechenden Potentiale w_1 und w_2 heifsen (w_1 zu $\cos\beta$, w_2 zu $\sin\beta$ gehörig). Diese Potentiale sind nichts anderes als die ersten Koeffizienten in der nach der Mondknotenperiode fortschreitenden Entwickelung des vom Monde auf die Erde ausgeübten Anziehungspotentiales $V_2(t)$; letzteres drückt sich nämlich durch U, w_1, w_2 sowie die Mondknotengeschwindigkeit N folgendermafsen aus:

$$V_2(t) = U + w_1 \cos \mathsf{N}t + w_2 \sin \mathsf{N}t + \cdots,$$

wofür wir auch abkürzend schreiben:

$$V_2(t) = U + W + \cdots, \qquad W = w_1 \cos \mathsf{N}t + w_2 \sin \mathsf{N}t.$$

Das konstante Glied U gehört also zu dem Werte $n = 0$ des Stellenzeigers der Entwickelung, das zeitlich veränderliche Glied W fafst die beiden zu dem Werte $n = 1$ des Stellenzeigers gehörigen Terme der Entwickelung zusammen.

Aus dem Werte von U können wir nichts wesentlich Neues erfahren, vielmehr müssen wir auf den schon im ersten Paragraphen berechneten Anteil des Mondes an der Präcessionsbewegung der Erde zurückfallen. Wir führen diese Rechnung nur deshalb nochmals durch, um uns zu überzeugen, dafs die früher vernachlässigte Neigung der Mondbahn gegen die Ekliptik die Präcessionserscheinung nur unwesentlich beeinflufst. Aus dem Werte von W dagegen wird sich die Erklärung und Vorausberechnung der astronomischen Nutation ergeben.



a) *Der Fall* $n = 0$. Das Potential eines Elementes $d\mu$ der Mondringfläche auf ein Element dm des Erdringes ist, unter f die Gravitationskonstante verstanden, $f\,d\mu\,dm/r$; daher wird das Potential der ganzen Mondringfläche auf den Erdring:

$$U = f\iint \frac{d\mu\,dm}{r}. \tag{5}$$

Sind x, y, z bez. x_2, y_2, z_2 die Koordinaten eines Punktes des Erdringes bez. des Mondringes, so setzen wir wie früher

$$x = R\cos\varphi, \quad y = R\sin\varphi\cos\vartheta, \quad z = R\sin\varphi\sin\vartheta.$$

Fällt ferner die Mondknotenlinie gerade mit der Erdknotenlinie zusammen, so können wir, bezogen auf das gleiche Koordinatensystem, schreiben:

$$x_2 = r_2\cos\alpha, \quad y_2 = r_2\sin\alpha\cos 5^0, \quad z_2 = r_2\sin\alpha\sin 5^0.$$

Diese Koordinaten entsprechen der besonderen Lage $\beta = \psi$ des Mondringes (vgl. Fig. 99). Bei beliebigem β bleibt der Wert von z_2 der angegebene, die Koordinaten x_2, y_2 aber entstehen aus den vorstehenden nach der Regel der Koordinatentransformation, wobei als Drehwinkel der Winkel $\beta - \psi$ eingeht. Es wird nämlich allgemeingültig:

$$\begin{aligned}
x_2 &= r_2(\cos\alpha\cos(\beta-\psi) - \sin\alpha\cos 5^0\sin(\beta-\psi)),\\
y_2 &= r_2(\cos\alpha\sin(\beta-\psi) + \sin\alpha\cos 5^0\cos(\beta-\psi)),\\
z_2 &= r_2\sin\alpha\sin 5^0.
\end{aligned}$$

Wir berechnen uns hiernach

$$r^2 = (x-x_2)^2 + (y-y_2)^2 + (z-z_2)^2 = R^2 + r_2{}^2 - 2Rr_2 s,$$

worin s bedeutet:

$$\left\{\begin{aligned}
s = \frac{xx_2 + yy_2 + zz_2}{Rr_2} &=\\
\cos\varphi(\cos\alpha\cos(\beta-\psi) &- \sin\alpha\cos 5^0\sin(\beta-\psi))\\
+ \sin\varphi\cos\vartheta(\cos\alpha\sin(\beta-\psi) &+ \sin\alpha\cos 5^0\cos(\beta-\psi))\\
+ \sin\varphi\sin\vartheta\sin\alpha\sin 5^0.&
\end{aligned}\right. \tag{6}$$

Durch Entwickelung nach Potenzen von r_2 folgt

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_2}\left(1 + \frac{R}{r_2}s - \frac{1}{2}\frac{R^2}{r_2{}^2} + \frac{3}{2}\frac{R^2}{r_2{}^2}s^2 + \cdots\right). \tag{7}$$

Wir integrieren diesen Ausdruck nach $d\mu$ und dm, indem wir $d\mu$ aus (3) entnehmen und dm gleich $\frac{m}{2\pi}d\varphi$ einsetzen. Zunächst wird $\int s\,d\varphi = 0$; ferner liefern von den Gliedern auf der rechten Seite von (7) das erste und dritte Beiträge zu unserem Potential, die von den

Hosted by Google

die Lage des Erdringes bestimmenden Winkeln ϑ und ψ frei sind. Da wir später das Potential nach diesen Winkeln zu differenzieren haben werden, fallen auch diese Glieder heraus. Wir schreiben daher die ersten drei Glieder ebenso wie die höheren Glieder der Entwickelung nicht hin und setzen:

$$U = \cdots + \frac{3}{16} f \frac{m m_2}{\pi^3} \frac{R^2}{r_2{}^3} \cdot \int d\alpha \int d\beta \int d\varphi\, s^2 + \cdots.$$

Man rechnet nun leicht aus, dafs

$$\int d\alpha \int d\beta \int d\varphi\, s^2 = \pi^3 \{ (1 + \cos^2\vartheta)(1 + \cos^2 5^0) + 2 \sin^2\vartheta \sin^2 5^0 \}.$$

Mithin wird, wenn wir noch für die Masse des Erdringes ihren Wert aus Gl. (1) von § 1 einführen:

$$U = \frac{3}{8} f \frac{m_2 (C - A)}{r_2{}^3} \{ (1 + \cos^2\vartheta)(1 + \cos^2 5^0) + 2 \sin^2\vartheta \sin^2 5^0 \}.$$

Das zugehörige Drehmoment auf den Erdring wird nun durch Differentiation nach ϑ gefunden und lautet:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \vartheta} &= -\frac{3}{4} f \frac{m_2 (C - A)}{r_2{}^3} \{ 1 + \cos^2 5^0 - 2 \sin^2 5^0 \} \sin\vartheta \cos\vartheta \\ &= -\frac{3}{2} f \frac{m_2 (C - A)}{r_2{}^3} \left\{ 1 - \frac{3}{2} \sin^2 5^0 \right\} \sin\vartheta \cos\vartheta. \end{aligned}$$

Dieser Wert läfst sich unmittelbar mit dem im ersten Paragraphen Gl. (2″) für dasselbe Drehmoment abgeleiteten Werte vergleichen. Er unterscheidet sich von jenem, wie man sieht, nur durch Hinzutreten des Faktors

$$1 - \frac{3}{2} \sin^2 5^0 = 1 - 0{,}012.$$

Für die numerische Rechnung spielt dieser Unterschied aber keine Rolle, sofern wir wie im ersten Paragraphen nur die ganzen Sekunden der jährlichen Präcession anzugeben wünschen. Deshalb würde die weitere Behandlung genau so wie dort zu erfolgen haben und wir können alle früheren Resultate auch mit Rücksicht auf die Neigung der Mondbahn als hinreichend genau bestätigen.

b) *Der Fall* $n = 1$. Auch hier gehen wir von der Formel (5) aus, wobei wir aber jetzt unter $d\mu$ die durch (4) definierten Massenverteilungen verstehen und die ihnen entsprechenden Potentiale, wie verabredet, w_1 und w_2 nennen. dm ist wie oben gleich $\frac{m}{2\pi} d\varphi$, für $\frac{1}{r}$ ist die Entwickelung (7) einzutragen. Indem wir wieder diejenigen Glieder unterdrücken, die bei der Integration nach φ oder bei der späteren Differentiation nach ϑ und ψ verschwinden, schreiben wir:

$$\left.\begin{matrix} w_1 \\ w_2 \end{matrix}\right\} = \cdots + \frac{3}{8} f \frac{m m_2}{\pi^3} \frac{R^2}{r_2{}^3} \int {\cos \atop \sin} \beta\, d\beta \int d\alpha \int d\varphi\, s^2 + \cdots.$$

Führen wir zunächst die Integration nach α und φ aus, so erhalten wir aus (6):

$$\int d\alpha \int d\varphi\, s^2 = \pi^2 \{ \cos^2(\beta - \psi) + \cos^2 5^0 \sin^2(\beta - \psi) + \cos^2 \vartheta \sin^2(\beta - \psi) + (\cos\vartheta \cos 5^0 \cos(\beta - \psi) + \sin\vartheta \sin 5^0)^2 \};$$

multiplizieren wir dieses mit $\cos\beta$ oder $\sin\beta$ und integrieren nach β, so fallen alle diejenigen Terme fort, welche nach Auflösung von $\frac{\cos}{\sin}(\beta - \psi)$ von ungerader Dimension in $\frac{\cos}{\sin}\beta$ sind. Als einziger nichtverschwindender Term bleibt übrig

$$2\pi^2 \sin\vartheta \cos\vartheta \sin 5^0 \cos 5^0 \int \frac{\cos}{\sin}\beta \cos(\beta - \psi)\, d\beta$$
$$= 2\pi^3 \sin\vartheta \cos\vartheta \sin 5^0 \cos 5^0 \frac{\cos}{\sin}\psi.$$

Mithin wird:

$$\left.\begin{matrix} w_1 \\ w_2 \end{matrix}\right\} = \frac{3}{4} f \frac{m m_2 R^2}{r_2^3} \sin\vartheta \cos\vartheta \sin 5^0 \cos 5^0 \frac{\cos}{\sin}\psi.$$

Damit ist das Potential der Mondringfläche für die beiden durch Fig. 98b schematisch dargestellten Massenbelegungen oder, wie wir auch sagen können, diejenigen beiden Koeffizienten der trigonometrischen Entwickelung gefunden, welche zu Gliedern von der vollen Periode des Mondknoten-Umlaufs gehören. Die Summe dieser Glieder, welche nach Verabredung W heifsen sollte, wird nun

$$(8) \qquad W = \frac{3}{4} f \frac{m m_2 R^2}{r_2^3} \sin\vartheta \cos\vartheta \sin 5^0 \cos 5^0 \cos(\mathsf{N}t - \psi).$$

Wir formen diesen Ausdruck ein wenig um, indem wir einerseits die Definition von m (Gl. (1) von § 1), andrerseits das dritte Keplersche Gesetz (Gl. (7') von § 1) berücksichtigen und erhalten:

$$(9) \qquad W = \frac{3}{2} \frac{m_2}{M + m_2} \left(\frac{2\pi}{T_2}\right)^2 (C - A) \sin\vartheta \cos\vartheta \sin 5^0 \cos 5^0 \cos(\mathsf{N}t - \psi).$$

Aus dem Potential W leiten wir nunmehr die Drehmomente ab, die auf den Erdring wirken. Da W sowohl von ϑ wie von ψ abhängt, erhalten wir ein Drehmoment, welches um die Knotenlinie der Erde wirkt, durch Differentiation nach ϑ, ein anderes, welches um die Normale der Ekliptik wirkt, durch Differentiation nach ψ. Es ergiebt sich nämlich

$$(10) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial W}{\partial \vartheta} = \dfrac{3}{2} \dfrac{m_2}{M + m_2} \left(\dfrac{2\pi}{T_2}\right)^2 (C - A) \cos 2\vartheta \sin 5^0 \cos 5^0 \cos(\mathsf{N}t - \psi), \\ \dfrac{\partial W}{\partial \psi} = \dfrac{3}{4} \dfrac{m_2}{M + m_2} \left(\dfrac{2\pi}{T_2}\right)^2 (C - A) \sin 2\vartheta \sin 5^0 \cos 5^0 \sin(\mathsf{N}t - \psi). \end{cases}$$

Wir sehen uns nun vor das folgende Kreiselproblem gestellt: *Die Erde steht unter dem Einflufs der eben genannten Drehmomente; welches*



ist ihre Bewegung? Natürlich haben wir bei der weiteren Behandlung dieses Problems nicht mehr, wie bei der Berechnung des Anziehungspotentiales, von dem Erdring allein, sondern von dem gesamten Erdkörper zu handeln.

Das hiermit definierte Kreiselproblem unterscheidet sich von allen früheren Fragen in zweifacher Hinsicht: einerseits ist zu dem Drehmoment um die Knotenlinie, welches auch im Falle des gewöhnlichen schweren Kreisels vorlag, ein solches um die „Vertikale“ (hier die Normale zur Ekliptik) hinzugetreten. Andrerseits sind beide Drehmomente nicht nur mit der Lage des Kreisels sondern auch mit der Zeit veränderlich. Das Zeitmaſs dieser Veränderlichkeit bestimmt offenbar auch das Zeitmaſs, in welchem die Erde jenen Drehmomenten folgt. Während also bei der in der allgemeinen Kreiseltheorie untersuchten *freien* Nutation die Schwingungsperiode durch Massenverteilung und Bewegungszustand des Kreisels selbst bedingt war, ist die Periode der jetzt zu besprechenden *erzwungenen* Nutation durch den Wechsel der äuſseren Kräfte vorgeschrieben und stimmt in unserem Falle mit der Periode der Mondknotenbewegung überein.

Im Allgemeinen kann man sagen, daſs das Problem der erzwungenen Schwingungen, wenn man von besonderen Vorkommnissen (Resonanz etc.) absieht, ein einfacheres ist wie das der freien Schwingungen, eben deshalb weil die Periode der Schwingungen nicht erst aus der Natur des schwingenden Systems erschlossen zu werden braucht, sondern von vornherein bekannt ist. Wenn das Problem in unserem Falle etwas kompliziert aussieht, so liegt dies nur an dem zusammengesetzten Charakter der wirkenden Kräfte. Übrigens ist der Weg, den wir einschlagen werden, vorbildlich für die Behandlung jeder Art erzwungener Schwingungen, falls dieselben hinreichend klein ausfallen. Den erzwungenen Schwingungen können sich allemal noch freie Schwingungen überlagern, wovon wir indessen im vorliegenden Falle absehen dürfen, da wir auf die Möglichkeit solcher freier Schwingungen im nächsten Abschnitt ausführlich zu sprechen kommen.

Mathematisch gesprochen bedeutet das Zurückstellen der freien Schwingungen, daſs wir uns mit einem *partikulären* Integral des vorgelegten Bewegungsproblems begnügen wollen, nämlich mit demjenigen Integral, welches rein periodisch im Zeitmaſs des Kraftwechsels veränderlich ist und eben deshalb die *erzwungene* Schwingung heiſst. Das *allgemeine* Integral entsteht hieraus durch Hinzufügung der allgemeinsten *freien* Schwingung, d. h. derjenigen allgemeinen Lösung, welche dem kräftefreien Falle entspricht, und zwar in Strenge, wenn das Problem durch lineare Differentialgleichungen festgelegt ist, mit

einem gewissen Grade der Annäherung, wenn, wie im vorliegenden Falle, die Differentialgleichungen des Problems unter Vernachlässigung kleiner Gröfsen auf lineare Gleichungen zurückgeführt werden können.

Bei der Berechnung der erzwungenen Schwingungen des Erdkörpers werden wir uns der *Lagrangeschen Gleichungen in den Koordinaten* ϑ, ψ, φ bedienen. Auf der rechten Seite dieser Gleichungen stehen die Komponenten der äufseren Kraft nach jenen Koordinaten, d. h. in unserem Falle:

$$\frac{\partial W}{\partial \vartheta}, \quad \frac{\partial W}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial W}{\partial \varphi} = 0.$$

Der Ausdruck der lebendigen Kraft heifst bekanntlich

$$T = \frac{A}{2}(\vartheta'^2 + \sin^2\vartheta\,\psi'^2) + \frac{C}{2}(\varphi' + \cos\vartheta\,\psi')^2$$

und liefert:

$$\frac{\partial T}{\partial \vartheta} = A\sin\vartheta\cos\vartheta\,\psi'^2 - C(\varphi' + \cos\vartheta\,\psi')\sin\vartheta\,\psi', \qquad \frac{\partial T}{\partial \psi} = \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \vartheta'} = [\Theta] = A\vartheta', \qquad \frac{\partial T}{\partial \psi'} = [\Psi] = A\sin^2\vartheta\,\psi' + C\cos\vartheta(\varphi' + \cos\vartheta\,\psi'),$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi'} = [\Phi] = C(\varphi' + \cos\vartheta\,\psi').$$

Die Lagrangeschen Gleichungen lauten nun:

$$A\vartheta'' - A\sin\vartheta\cos\vartheta\,\psi'^2 + C(\varphi' + \cos\vartheta\,\psi')\sin\vartheta\,\psi' = \frac{\partial W}{\partial \vartheta},$$

$$\frac{d}{dt}(A\sin^2\vartheta\,\psi' + C\cos\vartheta(\varphi' + \cos\vartheta\,\psi')) = \frac{\partial W}{\partial \psi},$$

während die dritte Gleichung liefert: $[\Phi] = \text{const.}$ Da $[\Phi] = Cr$ ist, wo r die Umdrehungsgeschwindigkeit der Erde um ihre Figurenaxe und $2\pi/r$ die Dauer des Sterntages ist, so wird auch r konstant und mithin die Länge des Sterntages durch die in Rede stehenden Mondstörungen nicht beeinflufst.

Wir führen die Winkelgeschwindigkeit $r = \varphi' + \cos\vartheta\,\psi'$ in die vorstehenden Gleichungen ein und schreiben dieselben einfacher:

$$A\vartheta'' - A\sin\vartheta\cos\vartheta\,\psi'^2 + C\sin\vartheta\,r\psi' = \frac{\partial W}{\partial \vartheta},$$

$$\frac{d}{dt}(A\sin^2\vartheta\,\psi' + C\cos\vartheta\,r) = \frac{\partial W}{\partial \psi}.$$

Jetzt berücksichtigen wir, dafs die Winkeländerungen ψ' und ϑ' erfahrungsgemäfs aufserordentlich viel langsamer erfolgen und eine aufserordentlich viel kleinere Amplitude haben, wie die Umdrehung r, dafs daher r sehr grofs sein wird gegen φ' und ϑ'. Dementsprechend werden wir alle Glieder linkerhand, welche nicht r als Faktor besitzen, streichen und die vorigen Gleichungen folgendermafsen vereinfachen:

Hosted by Google

$$C \sin \vartheta \, r \, \psi' = \frac{\partial W}{\partial \vartheta},$$
$$- C \sin \vartheta \, r \, \vartheta' = \frac{\partial W}{\partial \psi}.$$

Setzen wir rechterhand die Werte aus (10) ein, so ergiebt sich:

$$\psi' = \frac{3}{2} \frac{m_2}{M + m_2} \left(\frac{2\pi}{T_2}\right)^2 \frac{C - A}{Cr} \sin 5^0 \cos 5^0 \frac{\cos 2\vartheta}{\sin \vartheta} \cos(\mathsf{N}t - \psi),$$
$$\vartheta' = - \frac{3}{2} \frac{m_2}{M + m_2} \left(\frac{2\pi}{T_2}\right)^2 \frac{C - A}{Cr} \sin 5^0 \cos 5^0 \cos \vartheta \sin(\mathsf{N}t - \psi).$$

Hier können wir abermals eine Vereinfachung eintreten lassen, indem wir auf der rechten Seite die in erster Näherung gefundenen Werte für ψ und ϑ (s. Gl. (11) aus § 1), nämlich $\psi = \psi_0 + 50'' t = \psi_0 + \nu t$, $\vartheta = 23^0 27' 7'' = \vartheta_0$ eintragen. Die Integration nach t läſst sich dann leicht ausführen und liefert:

$$(11) \quad \begin{cases} \vartheta = \frac{3}{2} \frac{m_2}{M + m_2} \left(\frac{2\pi}{T_2}\right)^2 \frac{C - A}{Cr} \frac{\sin 5^0 \cos 5^0}{\mathsf{N} - \nu} \cos \vartheta_0 \cos(\mathsf{N}t - \nu t - \psi_0), \\ \psi = \frac{3}{2} \frac{m_2}{M + m_2} \left(\frac{2\pi}{T_2}\right)^2 \frac{C - A}{Cr} \frac{\sin 5^0 \cos 5^0}{\mathsf{N} - \nu} \frac{\cos 2\vartheta_0}{\sin \vartheta_0} \sin(\mathsf{N}t - \nu t - \psi_0). \end{cases}$$

In diesen Gleichungen ist die theoretische Darstellung der astronomischen Nutation gewonnen. Wie wir sehen ist sowohl der Winkel ϑ wie der Winkel ψ einer harmonischen Schwankung unterworfen, deren Periode mit der der Mondknoten $2\pi/\mathsf{N}$ zusammenfällt. (Wir können nämlich die Winkelgeschwindigkeit ν der Erdknoten gegen die der Mondknoten N ohne Weiteres vernachlässigen.) Um die numerischen Werte der Amplituden zu finden, welche bez. a und b heiſsen mögen, berechnen wir zunächst:

$$\frac{b}{a} = 2 \operatorname{ctg} 2\vartheta_0 = 1{,}9.$$

Ferner wird, wegen der früher angegebenen Werte, wenn wir das Jahr als Zeiteinheit nehmen:

$$\frac{M}{m_2} = 82, \quad \frac{C - A}{C} = \frac{1}{305}, \quad T_2 = \frac{27^1/_3}{365^1/_4}, \quad r = -2\pi \cdot 366^1/_4, \quad \mathsf{N} = \frac{2\pi}{18^2/_3},$$

also die Amplitude von ϑ, in Sekunden ausgedrückt:

$$a = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{83} \cdot \frac{(365^1/_4)^2}{366^1/_4} \cdot \frac{18^2/_3}{(27^1/_3)^2} \cdot \frac{0{,}087 \cdot 0{,}917}{305} \cdot \frac{360 \cdot 60 \cdot 60}{2\pi} = 9''.$$

Hieraus folgt

$$b = 1{,}9 \cdot a = 17''.$$

Am Himmelsgewölbe beschreibt die Erdaxe hiernach eine kleine Ellipse, die nach ihrem Entdecker die Bradleysche Ellipse heiſst. Die groſse Axe derselben beträgt $a = 9''$; sie ist nach dem Pole der Ekliptik



hingerichtet. Die kleine Axe wird, wie eine elementargeometrische Überlegung zeigt, $b \sin\vartheta_0 = 7''$.

Wir wollen schliefslich die am Schlusse des ersten Paragraphen gegebene Darstellung der Erdaxenbewegung (Gl. (11) von pag. 643) durch Hinzufügung von Nutationsgliedern vervollständigen. Sie lautet alsdann:

$$(12) \qquad \begin{cases} \psi = \psi_0 + 50'' t + 17'' \sin(\mathsf{N}t - \psi_0), \\ \vartheta = 23^0 27' + 9'' \cos(\mathsf{N}t - \psi_0). \end{cases}$$

§ 4. Schlufsbemerkungen zum Problem der Präcession und Nutation. Die Bestimmung der Mondmasse und der Elliptizität der Erde.

Mit den bisherigen Korrektionen ist aber die Sache noch lange nicht abgethan. Zunächst kann man den Einflufs der Mondknotenbewegung weiter verfolgen und Glieder von der Periode $\frac{4\pi}{\mathsf{N}}$, $\frac{6\pi}{\mathsf{N}}$ etc. berechnen. Die ersteren werden in der Praxis wirklich berücksichtigt, obgleich ihre Amplituden nur den zehnten bez. fünften Teil einer Sekunde betragen. Sodann aber wäre die Excentrizität der Sonnen- und namentlich die der Mondbahn und deren Apsidenbewegung zu berücksichtigen, durch welche nicht nur die periodischen Glieder, sondern auch der säkulare Präcessionsterm beeinflufst wird. Die hieraus resultierende Korrektion der Präcessionsgeschwindigkeit beträgt abermals weniger als 1″.

Ferner wollen wir hier nochmals auf die oben besprochenen aber nicht durchgerechneten Einflüsse hinweisen, welche von der wechselnden Stellung von Sonne und Mond in ihrer Bahn herrühren und welche zur Periode einen aliquoten Teil des Sonnen- oder Mondumlaufs haben.

Endlich ist zu bedenken, dafs alle Elemente, welche in unsere Rechnungen eingehen, säkularen Änderungen unterworfen sind, so die Excentrizität der Sonnenbahn, die Lage der Ekliptik am Fixsternhimmel etc., Änderungen, welche man üblicher Weise in eine nach Potenzen von t fortschreitende Reihe entwickelt. Hieraus folgt insbesondere, dafs auch die Präcessionsgeschwindigkeit nicht einfach der Zeit proportional ist, sondern ihrerseits durch eine Potenzreihe in t dargestellt wird. Allerdings ist schon der Koeffizient von t^2 in dieser Reihe äufserst klein, ca. $10^{-4} \cdot 1''$; trotzdem genügt sein Vorhandensein, um Resultate, welche sich auf eine längere Reihe von Jahren beziehen und nur aus dem ersten Gliede (νt) gezogen sind, wie z. B. die am Anfang dieses Abschnittes gegebene Berechnung der Periode von 26 000 Jahren, einigermafsen illusorisch erscheinen zu lassen.

Bei Berücksichtigung dieser verschiedenen Einflüsse werden die Formeln für die Bewegung der Erdaxe wesentlich komplizierter. Die



Präcession wird nicht mehr eine gleichförmige, sondern wegen der zuletzt genannten Verhältnisse eine etwas beschleunigte oder verzögerte sein. Aufserdem wird sich der bisher besprochenen hauptsächlichen Nutation eine Reihe sekundärer Nutationen, z. B. eine Nutation von der halben Periode der Mondknoten, von der halben Periode des Sonnen- und Mondumganges etc. überlagern. Um ein Bild von den so entstehenden Formeln zu geben, setzen wir als Gegenstück zu den Näherungsformeln vom Schlusse des vorigen Paragraphen die folgende vollständigere Beschreibung der Erdaxenbewegung her. Dieselbe ist, mit Abänderung der Bezeichnungen dem Werke von Tisserand*) entnommen; der Ursprung und die Bedeutung der einzelnen Terme wird nach dem Vorhergehenden klar sein:

$$\begin{aligned}\psi = {} & 50'',37140\, t - 0'',00010881\, t^2 \\ & - 17'',251 \sin \mathsf{N} t + 0'',207 \sin 2\mathsf{N} t \\ & - 1'',269 \sin \frac{4\pi t}{T_1} - 0'',204 \sin \frac{4\pi t}{T_2}, \\ \vartheta = {} & 23^0\, 27'\, 32'',0 + 0'',00000719\, t^2 \\ & + 9'',223 \cos \mathsf{N} t - 0'',090 \cos 2\mathsf{N} t \\ & + 0'',551 \cos \frac{4\pi t}{T_1} + 0'',089 \cos \frac{4\pi t}{T_2}.\end{aligned}$$

Auch diese vollständigere Formel beansprucht nicht, exakt zu sein, und darf ebensowenig wie unsere frühere Darstellung auf beliebig lange Zeiträume ausgedehnt werden. Ihr Zweck ist vielmehr nur der, unter den heutzutage gültigen Werten der astronomischen Konstanten die Vorausbestimmung der Lage der Erdaxe für einen den Bedürfnissen des rechnenden Astronomen genügenden Zeitraum zu ermöglichen. Andere Autoren**) geben noch längere Formeln an.

Zum Schlusse dieses Abschnittes haben wir noch einen gewissen Zirkelschlufs zu besprechen, den wir uns im Vorangehenden bei den numerischen Rechnungen zu Schulden kommen lassen mufsten und auf den bereits pag. 642 hingewiesen wurde. Es handelt sich um das *Verhältnis Erdmasse zu Mondmasse* M/m_2 und um die sog. *Elliptizität der Erde* (vgl. wegen der Benennung § 8 des vorigen Kap.), d. h. das Verhältnis $(C-A)/A$. Während wir im Vorstehenden gewisse Zahlenwerte für diese Gröfsen zu Grunde legten, um daraus die Gröfse der

---

*) l. c. tome 2, § 192, Gl. (m) und (n). Übrigens haben wir zwei der Tisserandschen Glieder unterdrückt, welche im Vorstehenden keine Erklärung gefunden haben.

**) Z. B. Th. Oppolzer, Bahnbestimmung der Kometen und Planeten, Leipzig 1870 und 1882, Bd. I, erster Teil.

Hosted by Google

Präcessionsgeschwindigkeit und die Amplituden der Nutation zu berechnen, liegt in Wirklichkeit die Sache so, daſs die zuverlässigsten Zahlenwerte jener beiden Verhältnisse eben aus der Beobachtung von Präcession und Nutation gefolgert werden. Damit entfällt dann logischer Weise die Möglichkeit, die Präcession und Nutation vorauszuberechnen. Außerdem liegt auch noch die physikalische Voraussetzung zu Grunde, daſs man die Erde für die hier berechneten Wirkungen als starr ansehen darf, worauf wir im folgenden Abschnitt zurückkommen.

Wir sahen oben, daſs sowohl in den theoretischen Ausdruck der Präcessionsgeschwindigkeit ν (Gl. (6') von pag. 641) wie in den Ausdruck der Nutationsamplituden a und b (Gl. (11) von pag. 660) die beiden Gröſsen $(C-A)/C$ und M/m_2 eingehen. Entnehmen wir also den Beobachtungen zwei möglichst genaue Werte, beispielsweise von ν und a, so haben wir zwei Gleichungen zur Bestimmung der beiden Unbekannten $(C-A)/C$ und M/m_2. Man findet auf solche Weise als die heutzutage vertrauenswürdigsten Werte dieser beiden Unbekannten*)

$$\frac{C-A}{C} = \frac{1}{304{,}9}, \quad \frac{M}{m_2} = 81{,}58.$$

Dem entsprechen die oben benutzten abgekürzten Zahlenwerte $1/305$ und 82. Für die sog. Elliptizität ergibt sich mit derselben Näherung $(C-A)/A = 1/304$.

Übrigens stimmen die auf anderen Wegen hierfür erhaltenen Zahlen (z. B. aus der Gradmessung der Erde, aus den Störungen der Mondbahn durch die Erde und der Erdbahn durch den Mond) mit den angegebenen Zahlen soweit überein, als man es bei der gröſseren Unsicherheit dieser letzteren Bestimmungsweisen erwarten kann.

B. Geophysikalische Anwendungen.

§ 5. Die Eulersche Periode der Polschwankungen, theoretische Behandlung.

Es ist uns von früher her wohlbekannt, daſs unter dem Einfluſs der Schwere die *reine Präcessionsbewegung* des Kreisels einen Ausnahmefall darstellt, daſs diese Bewegung im Allgemeinen von periodischen Schwankungen der Kreiselaxe überlagert wird, welche aller-

*) Vgl. S. Newcomb, Fundamental Constants of Astronomy. Washington 1895, pag. 133.

Hosted by Google

dings bei hinreichend starkem Eigenimpuls in der Regel unmerklich klein werden. Diese Schwankungen wurden *Nutationen* schlechtweg genannt; wir werden sie jetzt zum Unserschied von den im vorigen Abschnitt besprochenen Nutationen als *freie Nutationen* bezeichnen. Aus der Zusammensetzung dieser freien Nutationen mit der gleichförmigen Präcession entstand unsere „*pseudoreguläre Präcession*".

Es drängt sich uns nun die Frage auf: Ist die im vorigen Abschnitt berechnete Präcession der Erdaxe von Schwankungen begleitet, welche nicht von den äufseren Kräften erzwungen sind, sondern die freien Schwingungen des Systems darstellen? oder, kürzer gesagt: *Ist die Rotationsbewegung der Erde*, wenn wir von allen erzwungenen Schwankungen absehen, *eine reguläre oder eine pseudoreguläre Präcession?*

Die Beantwortung dieser Frage erfordert das Zusammenwirken von Theorie und Beobachtung. Wir geben zunächst die Theorie.

Das Wort Erdaxe ist zweideutig. Man bezeichnet damit einerseits die *Figurenaxe* der Erde, d. h. diejenige Hauptträgheitsaxe der Erde, welche ungefähr mit der Verbindungslinie von Nord- und Südpol zusammenfällt, also eine *im Erdkörper feste* Axe; andrerseits meint man damit die *augenblickliche Rotationsaxe* der Erddrehung, also eine Gerade, welche genau den instantanen Nord- und Südpol verbindet und daher instantan *im Raume fest* ist. Dafs beide Bedeutungen nicht zusammenfallen, ist gerade der Gegenstand der folgenden Erörterungen, bei denen wir zwischen Figuren- und Rotationsaxe wohl zu unterscheiden haben.

Die Bewegungen der *Figurenaxe* bei der pseudoregulären Präcession wurden pag. 291 erörtert. Sie wurden in den Winkeln ϑ und ψ durch die folgenden angenäherten Gleichungen bestimmt (s. pag. 303, Gl. (11)):

$$(1) \qquad \begin{cases} \cos\vartheta = \cos\vartheta_0 + a\sin\vartheta_0 \sin\frac{N}{A}t, \\ \psi = \frac{P}{N}t + \frac{a}{\sin\vartheta_0}\cos\frac{N}{A}t, \end{cases}$$

wo a durch die pag. 296 definierte Größe n' sich folgendermaßen ausdrückte:

$$(1') \qquad a = \frac{n'}{N\sin\vartheta_0} - \frac{AP}{N^2}\sin\vartheta_0.$$

Die ersten Glieder der rechten Seiten von (1) geben den Präcessionsbestandteil der Bewegung und kommen für das Folgende nicht in Betracht. Wir bemerken nur, dafs die Gröfse P, die beim Kreisel gleich MgE war, im Falle der Erde durch $P\cos\vartheta_0$ zu ersetzen ist, wo P durch den Ausdruck (3) von pag. 640 bestimmt ist. Die zweiten Glieder liefern die freie Nutation und interessieren uns hier ausschliefslich. Sie be-


Hosted by Google

deuten eine *kreisförmige Schwingung* (vgl. pag. 305), d. h. der Durchschnitt der Figurenaxe mit dem Himmelsgewölbe beschreibt, wenn man von der Präcessionsbewegung und den im vorigen Paragraphen betrachteten erzwungenen Schwankungen absieht, einen kleinen Kreis am Himmel. Die scheinbare Gröſse des Radius beträgt a und hängt von der Anfangslage des Impulses ab, auf welche sich die Gröſse n' in Gl. (1′) bezieht. ϑ_0 bedeutet die mittlere Neigung der Figurenaxe gegen die Normale zur Ekliptik während dieser Kreisschwingung. Die Schwingungsperiode τ, d. h. die Zeit, in der der Kreis einmal durchlaufen wird, ist durch die Gleichung bestimmt

$$\frac{2\pi}{\tau} = \frac{N}{A} = \frac{C}{A} r,$$

wo r, die Winkelgeschwindigkeit der Erdumdrehung, gleich 2π dividiert durch die Länge des Sterntages ist. Nehmen wir letzteren zur Zeiteinheit, so wird $r = 2\pi$ und $\tau = A/C$. *Die Schwingungsperiode ist also,* da C nur wenig gröſser ist als A, *ein wenig kleiner als ein siderischer Tag.*

Dies Resultat war vorherzusehen. Wenn nämlich die Figurenaxe mit der Rotationsaxe nicht zusammenfällt, wird erstere um letztere auf einem Kreiskegel herumgeführt. Stände nun die Rotationsaxe völlig still, so würde die Periode genau einen Tag betragen; wechselt sie langsam ihren Platz, so weicht die Periode nur wenig von einem Tage ab.

Indessen läſst sich die somit als möglich nachgewiesene nahezu eintägige Schwankung der Figurenaxe durch die Beobachtung nicht feststellen, weil sich die Beobachtung am Himmel notwendig auf den Wechsel der Rotationsaxe bezieht. Zu letzterer wenden wir uns jetzt.

Dabei werden wir zu unterscheiden haben zwischen dem *Wechsel der Rotationsaxe gegen den Raum* und ihrem *Wechsel relativ gegen den Erdkörper.* Ersterer wird bestimmt durch die Komponenten $\pi, \varkappa, \varrho$, letzterer durch die Komponenten p, q, r des Drehungsvektors, welche beide durch die Gl. (7) und (8) von pag. 45 mit den Eulerschen Winkeln φ, ψ, ϑ in Beziehung gesetzt sind. Die $\pi, \varkappa, \varrho$ sind die Koordinaten der Punkte der *Herpolhodie,* die p, q, r die der *Polhodie.*

Die Werte der $\pi, \varkappa, \varrho$ lauteten

$$(2) \qquad \begin{cases} \pi = \vartheta' \cos\psi + \varphi' \sin\vartheta \sin\psi, \\ \varkappa = \vartheta' \sin\psi - \varphi' \sin\vartheta \cos\psi, \\ \varrho = \psi' + \cos\vartheta\, \varphi'; \end{cases}$$

sie beziehen sich auf ein im Raume festes Koordinatensystem $x, y, z,$


Hosted by Google

dessen dritte Axe in unserem Falle mit der Normalen der Ekliptik zusammenfällt, (weil wir von dieser aus den Winkel ϑ messen), und dessen erste Axe der in der Ekliptik gelegene Strahl $\psi = 0$ ist (nach allgemeiner Festsetzung über die Messung des Winkels ψ). Es ist aber bequemer ein Koordinatensystem zu benutzen, dessen dritte Axe mit der mittleren Lage der Figurenaxe zusammenfällt, also gegen die Normale der Ekliptik um den Winkel ϑ_0 geneigt ist. Die erste Axe des neuen Systems möge mit der ersten Axe des alten Systems übereinstimmen. Bezeichnen wir die Koordinaten des Drehungsvektors in diesem neuen System mit π_1, $\varkappa_1$, ϱ_1, so wird ersichtlich

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \pi, \\ \varkappa_1 &= \quad \varkappa \cos\vartheta_0 + \varrho \sin\vartheta_0, \\ \varrho_1 &= -\varkappa \sin\vartheta_0 + \varrho \cos\vartheta_0. \end{aligned}$$

Setzen wir aus (2) ein, so ergiebt sich

$$(3)\quad \begin{cases} \pi_1 = \vartheta' \cos\psi + \varphi' \sin\vartheta \sin\psi, \\ \varkappa_1 = \quad \vartheta' \cos\vartheta_0 \sin\psi - \varphi'(\sin\vartheta\cos\vartheta_0\cos\psi - \sin\vartheta_0\cos\vartheta) + \psi' \sin\vartheta_0, \\ \varrho_1 = -\vartheta' \sin\vartheta_0 \sin\psi + \varphi'(\sin\vartheta_0\sin\vartheta\cos\psi + \cos\vartheta_0\cos\vartheta) + \psi' \cos\vartheta_0. \end{cases}$$

Nun ist zu berücksichtigen, dafs nach (1) $\vartheta - \vartheta_0$ und ψ, sowie die Differentialquotienten ϑ' und ψ' kleine Gröfsen sind; lassen wir aufserdem den uns hier nicht interessierenden Präcessionsterm Pt/N fort, so werden alle jene Gröfsen von der Ordnung der Nutationsamplitude a. Wir können nämlich, indem wir $\cos\vartheta$ entwickeln, statt (1) schreiben:

$$(4)\quad \begin{cases} \vartheta - \vartheta_0 = -a \sin\left(\dfrac{N}{A}t\right), & \vartheta' = -\dfrac{aN}{A}\cos\left(\dfrac{N}{A}t\right), \\ \sin\vartheta_0\,\psi = \quad a\cos\left(\dfrac{N}{A}t\right), & \sin\vartheta_0\,\psi' = -\dfrac{aN}{A}\sin\left(\dfrac{N}{A}t\right). \end{cases}$$

In den Gleichungen (3) sollen nur die Glieder niedrigster Ordnung der kleinen Gröfsen beibehalten werden. Wir setzen daher $\cos\psi = 1$, $\sin\psi = \psi$, $\sin\vartheta \sin\psi = \sin\vartheta_0 \cdot \psi$, $\vartheta' \sin\psi = 0$ etc. und erhalten:

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \vartheta' + \varphi' \sin\vartheta_0 \cdot \psi, \\ \varkappa_1 &= -\varphi'(\vartheta - \vartheta_0) + \psi' \sin\vartheta_0, \\ \varrho_1 &= \varphi' + \psi' \cos\vartheta_0. \end{aligned}$$

Des Weiteren bemerken wir, dafs $\varphi' + \cos\vartheta_0\psi'$ nach den Gleichungen (7) von pag. 45 gleich der Winkelgeschwindigkeit r der Erdumdrehung, also gleich 2π ist, wenn wir wieder den Sterntag als Zeiteinheit wählen. Die letzte Gleichung lautet daher $\varrho_1 = 2\pi$; in den beiden ersten Gleichungen dürfen wir direkt $\varphi' = 2\pi$ nehmen,

Hosted by Google

weil hier φ' mit den kleinen Grölsen ψ und $\vartheta - \vartheta_0$ multipliziert erscheint. Somit folgt:

$$\pi_1 = \vartheta' + 2\pi \sin \vartheta_0 \psi,$$
$$\varkappa_1 = -2\pi(\vartheta - \vartheta_0) + \psi' \sin \vartheta_0,$$
$$\varrho_1 = 2\pi.$$

Indem wir nun die Werte von ψ, ψ' etc. aus (4) eintragen und berücksichtigen, dafs $N = Cr = 2\pi C$ ist, erhalten wir schliefslich die folgende *Darstellung der Herpolhodie*:

$$(5) \qquad \begin{cases} \pi_1 = -2\pi a \dfrac{C-A}{A} \cos 2\pi \dfrac{C}{A} t, \\ \varkappa_1 = -2\pi a \dfrac{C-A}{A} \sin 2\pi \dfrac{C}{A} t, \\ \varrho_1 = 2\pi. \end{cases}$$

Wir erkennen hieraus: *Die Rotationsaxe beschreibt im Raume einen Kreiskegel um die Richtung unserer dritten Koordinatenaxe ϱ, d. h. um die mittlere Lage der Figurenaxe. Die Zeitdauer, in der sie diesen Kreiskegel einmal durchläuft, ist wieder $\tau = A/C$, also wenig kleiner wie ein Sterntag.*

Wir können auch sagen, dafs in der gleichen Zeit der Schnittpunkt der Rotationsaxe mit dem Himmelsgewölbe einen Kreis durchläuft. Der scheinbare Radius desselben, gemessen durch denjenigen Winkel, unter dem er von der Erde gesehen wird, beträgt (bei Vertauschung der trigonometrischen Tangente mit dem Bogen):

$$\frac{\sqrt{\pi_1^2 + \varkappa_1^2}}{\varrho_1} = a \frac{C-A}{A}.$$

Dieser Radius ist erheblich kleiner wie der scheinbare Radius a desjenigen Kreises, den der Schnittpunkt der Figurenaxe mit dem Himmelsgewölbe beschreibt. Wir fanden nämlich (vgl. pag. 663)

$$(6) \qquad \frac{C}{C-A} = 305, \quad \text{also} \quad \frac{A}{C-A} = 304.$$

Die Schwankung der Rotationsaxe im Raume beträgt also kaum den 300ten Teil derjenigen der Figurenaxe. Da sich nun, wie wir sehen werden, aus den Beobachtungen ergiebt, dafs die Winkelgröfse a hart an der Grenze des Beobachtbaren liegt, so wird sich die Winkelgröfse $a\dfrac{C-A}{A} = a/304$ der Beobachtung völlig entziehen. *Man wird also für alle praktischen Fragen annehmen dürfen, dafs die Rotationsaxe im Raume völlig stille steht.*

Natürlich ist die obige Darstellung der Herpolhodiekurve nicht völlig exakt, weil wir erstens höhere Glieder weggelassen und zweitens


Hosted by Google

die Präcessionsterme vernachlässigt haben. Hätten wir letztere mit berücksichtigt, so hätten wir statt des Kreises am Himmelsgewölbe eine sehr eng verschlungene Cykloide bekommen.

Interessanter ist das Studium der *Polhodie*. Ihre Koordinaten p, q, r sind durch die Gleichungen (7) von pag. 45 gegeben:

$$\begin{aligned} p &= \vartheta' \cos\varphi + \psi' \sin\vartheta \sin\varphi, \\ q &= -\vartheta' \sin\varphi + \psi' \sin\vartheta \cos\varphi, \\ r &= \varphi' + \cos\vartheta\, \psi'. \end{aligned}$$

Die letzte Koordinate ist konstant, nämlich bei unserer Wahl der Zeiteinheit gleich 2π. In den beiden ersten Gleichungen setzen wir für ϑ' und ψ' die Werte aus (4) ein, schreiben, unter Vernachlässigung kleiner Gröſsen höherer Ordnung, $\sin\vartheta = \sin\vartheta_0$, $\varphi = 2\pi t$, $N = 2\pi C$ und erhalten:

$$\begin{aligned} p &= -2\pi a \frac{C}{A}\left(\cos 2\pi \frac{C}{A} t \cos 2\pi t + \sin 2\pi \frac{C}{A} t \sin 2\pi t\right), \\ q &= 2\pi a \frac{C}{A}\left(\cos 2\pi \frac{C}{A} t \sin 2\pi t - \sin 2\pi \frac{C}{A} t \cos 2\pi t\right), \\ r &= 2\pi \end{aligned}$$

oder:

$$(7) \qquad \begin{cases} p = -2\pi a \dfrac{C}{A} \cos 2\pi \dfrac{C-A}{A} t, \\ q = -2\pi a \dfrac{C}{A} \sin 2\pi \dfrac{C-A}{A} t, \\ r = 2\pi. \end{cases}$$

Dies ist die gesuchte *Darstellung der Polhodie*. Sie zeigt uns, *daſs die Rotationsaxe auch im Erdkörper einen Kreiskegel beschreibt und zwar um die Figurenaxe der Erde. Der Winkel an der Spitze desselben* zwischen der Figurenaxe und den Erzeugenden des Kegels ist (bei Vertauschung der trigonometrischen Tangente mit dem Bogen):

$$\frac{\sqrt{p^2+q^2}}{r} = a\frac{C}{A}.$$

Dieser Winkel ist also $C/(C-A) = 305$ mal gröſser wie der entsprechende Winkel des Herpolhodiekegels. *Die Zeit, in der die Rotationsaxe den Polhodiekegel einmal durchläuft,* beträgt dabei $A/(C-A) = 304$ Sterntage oder rund 10 Monate. Diese Zeit heiſst die *Eulersche Periode* oder der *Eulersche Cyklus*, weil bereits Euler*) die nötigen theoretischen Vorarbeiten zur Berechnung dieser Periode geliefert hat.

*) Mechanica sive motus scientia. Petersburg 1736, dritter Teil, Kap. XVI, § 839 ff. Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum, Greifswald 1765, Kap. XII, §§ 711, 717—732. Der numerische Wert 304 scheint allerdings bei Euler noch nicht vorzukommen.

Hosted by Google

Natürlich sind auch die Gleichungen (7) nicht ganz vollständig, insofern wir bei ihrer Ableitung von den Präcessionsgliedern abgesehen haben; wollten wir letztere mit berücksichtigen, so würden zu den obigen Werten der p und q noch gewisse leicht angebbare Glieder von sehr kleinem Betrage und von der Periode eines Sterntages hinzukommen.

Übrigens lassen sich die obigen Werte der p und q auch unmittelbar aus den Eulerschen Gleichungen entnehmen, wenn man bedenkt, daſs die in Rede stehende Bewegung eine freie Nutation ist, und dementsprechend bei ihrer Berechnung von den äuſseren Kräften (Sonnen- und Mondanziehung) abstrahiert. Die Eulerschen Gleichungen lauten dann (vgl. pag. 140) für $A = B$ und $r = \text{const.} = 2\pi$:

$$A\frac{dp}{dt} = 2\pi(A - C)\,q, \quad A\frac{dq}{dt} = 2\pi(C - A)\,p$$

und geben integriert (vgl. pag. 151, Gl. (6')):

$$p + iq = c\,e^{2\pi i \frac{C-A}{A} t}.$$

Man braucht schlieſslich nur in einen reellen und imaginären Teil aufzulösen, um im Wesentlichen (nämlich bis auf die abgeänderte Bezeichnung der Integrationskonstanten) die Gleichungen (7) wiederzufinden.

Es ist nützlich, diese Verhältnisse im Sinne Poinsots durch die Figur des Polhodie- und Herpolhodiekegels zu veranschaulichen und mit derjenigen Figur zu vergleichen, welche in gleicher Weise die Verhältnisse bei der (durch Sonnen- und Mondanziehung erzwungenen) Präcession der Erdaxe darstellt. Dies geschehe in den Fig. 100a und b.

In Fig. 100a (erzwungene Präcession) findet die Bewegung der Erdaxe um die Normale der Ekliptik (N) in dem mehrfach genannten ungefähren Zeitraum von 26 000 Jahren statt. Der Winkel an der Spitze des Herpolhodiekegels (eigentlich Winkel zwischen der Normalen *N und* der *Rotationsaxe,* wofür wir aber ohne irgend einen Fehler auch den Winkel zwischen der Normalen N und der *Figurenaxe* nehmen können) beträgt $23\frac{1}{2}{}^{0}$. Die Öffnung des Polhodiekegels wurde pag. 49 berechnet und nach Gl. (2) daselbst gefunden zu $\sin 23\frac{1}{2}{}^{0} / 365 \cdot 26\,000$ = ungefähr 0,01″; die Kleinheit des Polhodiekegels wurde a. a. O. durch die Angabe veranschaulicht, daſs er auf der Erdoberfläche einen um den Nordpol beschriebenen Kreis von nur 27 cm. Radius ausschneidet. Wir haben also einen *ziemlich weiten Herpolhodiekegel und einen äuſserst spitzen Polhodiekegel.* In Fig. 100a konnten wir natürlich nicht annähernd das wirkliche quantitative Verhältnis beider Kegel zum Aus-

Hosted by Google

druck bringen; vielmehr ist der Polhodiekegel verhältnismäfsig fast 10^6 mal zu breit gezeichnet. Wir haben uns vorzustellen, dafs der in der Erde feste und an der Erdumdrehung teilnehmende Polhodiekegel sich in einem Tage, von F aus gesehen *entgegen* dem Uhrzeigersinne, einmal umdreht und dabei ohne zu gleiten im Innern des Herpolhodiekegels abrollt. Wegen seiner aufserordentlichen Kleinheit durch-

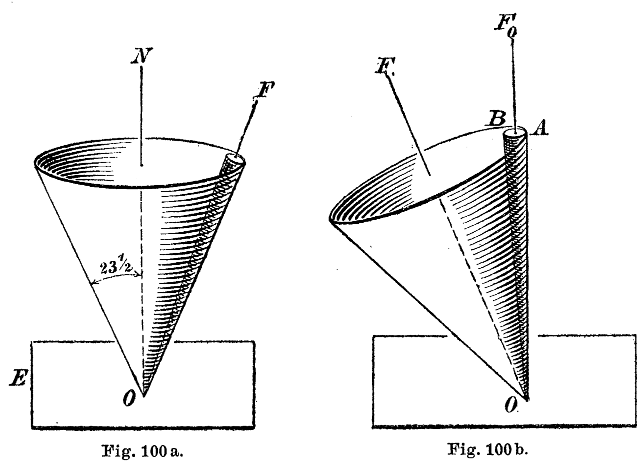


Fig. 100 a. Fig. 100 b.

mifst er den Mantel des Herpolhodiekegels erst in 26 000 Jahren einmal. Der Sinn des Abrollens ergibt sich aus dem Umdrehungssinne des Polhodiekegels und erfolgt in der Figur von rechts über vorn nach links, also von N gesehen *im* Uhrzeigersinne.

Wir betrachten nun Fig. 100 b (freie Nutation). Die Bewegung findet hier um die mittlere Lage der Figurenaxe statt (die in der Figur vertikal gezeichnete Gerade OF_0, im Gegensatz zu der augenblicklichen Lage der Figurenaxe OF). Der Winkel an der Spitze des Polhodiekegels beträgt nach Obigem $a\,\frac{C}{A}$, der des Herpolhodiekegels $a\,\frac{C-A}{A}$; das Verhältnis beider wurde gleich 305 gefunden. *Jetzt ist also der Herpolhodiekegel erheblich spitzer wie der Polhodiekegel;* auch hier konnte das zahlenmäfsige Verhältnis beider Kegel in der Figur nicht zum richtigen Ausdruck gebracht und mufste der Herpolhodiekegel verhältnismäfsig viel zu stumpf gezeichnet werden. Nach unseren Formeln hängt die absolute Gröfse der Kegelöffnungen von der Gröfse a ab, über die nur die Beobachtungen Aufschlufs geben können. Wir sind also einstweilen über die wirkliche Gestalt von Polhodie- und Herpolhodiekegel im Unklaren und haben daher in Fig. 100 b dem Polhodiekegel etwa diejenige Gröfse gegeben, wie sie dem Herpolhodiekegel in Fig. 100 a zukommt. In Wirklichkeit wird, da die Beobachtungen

Hosted by Google

einen äufserst kleinen Wert von a ergeben, auch der Polhodiekegel äufserst spitz und der Herpolhodiekegel dementsprechend noch 300 mal spitzer. Fig. 100b kann daher nur eine grobe qualitative Veranschaulichung der Verhältnisse geben. Wir müssen uns nun vorstellen, dafs der relativ weite Polhodiekegel, der den engen Herpolhodiekegel umfafst, mit der Geschwindigkeit der Erdumdrehung rotiert und dabei ohne zu gleiten auf dem Herpolhodiekegel abrollt. Der Drehsinn des Polhodiekegels ist wieder, von F gesehen, dem Uhrzeigersinne *entgegengesetzt*. Daraus folgt, dafs das Abrollen, von F_0 aus gesehen, ebenfalls *entgegen* dem Uhrzeigersinne erfolgt. Die Berührungslinie beider Kegel stellt uns die Lage der Rotationsaxe sowohl im Raume wie in der Erde dar. *Sie läuft im Raume in etwas weniger wie einem Sterntage um.* Wenn nämlich die Berührungslinie nach einmaliger Durchmessung des Herpolhodiekegels wieder in ihre ursprüngliche Lage auf dem Herpolhodiekegel (OA der Figur) zurückgekehrt ist, befindet sie sich in Deckung mit derjenigen Erzeugenden OB des Polhodiekegels, die wir erhalten, indem wir den auf dem Polhodiekegel gemessenen Bogen AB gleich dem Umfange des Herpolhodiekegels im Abstande OA von O machen. Der Strahl OA, als Erzeugende des Polhodiekegels betrachtet, ist infolgedessen noch nicht in seine Anfangslage zurückgekehrt; die Zeitdauer des Umlaufs der Rotationsaxe auf dem Herpolhodiekegel wird daher etwas kleiner als die Zeitdauer, in der ein Strahl des Polhodiekegels einmal umläuft, welche ihrerseits gleich einem Sterntage ist. *Auf dem Polhodiekegel andrerseits läuft die Rotationsaxe erheblich langsamer um.* Da sie nämlich während eines Sterntages um wenig mehr als das Stückchen AB auf dem Polhodiekegel im Sinne der Erddrehung vorgerückt ist, dauert es eine erhebliche Anzahl von Sterntagen, bis sie den ganzen Umfang des Polhodiekegels durchmessen hat. Diese Anzahl wurde oben als Eulerscher Cyklus bezeichnet und gleich 304 gefunden. Nach der Figur in Übereinstimmung mit unseren obigen Rechnungen wird das Verhältnis zwischen der Umlaufszeit der Rotationsaxe in der Erde und derjenigen im Raume gleich dem Verhältnis des Umfanges des Polhodiekegels zu demjenigen des Herpolhodiekegels, in gleichem Abstand von der Spitze der Kegel gemessen.

In unseren Rechnungen sowohl wie in unseren Zeichnungen haben wir aus guten Gründen die Behandlung der erzwungenen Präcession von der der freien Nutation abgesondert und die erzwungenen Nutationen überhaupt bei Seite gelassen (die man ebenfalls mit Poinsotschen Vorstellungen begleiten könnte).

In Wirklichkeit findet natürlich eine Überlagerung dieser verschie-

Hosted by Google

denen Bewegungen und damit eine Überlagerung der Formeln und in gewissem Sinne eine Überlagerung der Figuren statt. Leider verliert die Poinsotsche Vorstellung der abrollenden Kegel für eine derartige zusammengesetzte Bewegung ihren Hauptvorzug, den der unmittelbaren Anschaulichkeit. Wollten wir uns nämlich Präcession und Nutation in *einer* Figur darstellen und durch *ein* Paar abrollender Kegel verwirklichen, so müſsten wir den Herpolhodiekegel mit auſserordentlich kleinen und kurzen Wellungen versehen, in welche entsprechende Wellungen des Polhodiekegels eingreifen. Für das anschauliche Verständnis des Vorganges wird hierdurch aber nichts gewonnen.

Schlieſslich gehen wir im Interesse der folgenden Diskussionen von dem uns nunmehr bekannten Polhodiekegel bei der freien Nutation zu demjenigen Kreise über, den der Polhodiekegel auf der Erdoberfläche ausschneidet. Wir unterscheiden den Durchschnitt der Rotationsaxe mit der Erdoberfläche, den „instantanen Erdpol", von dem Durchschnitt der Figurenaxe mit der Erdoberfläche, dem „geometrischen Erdpol". Unser Kreis ist der geometrische Ort des instantanen Pols, sein Mittelpunkt fällt mit dem geometrischen Pole zusammen. Nach der vorangehenden Theorie müssen wir erwarten, daſs der instantane Pol den geometrischen Pol in der Periode des Eulerschen Cyklus, also etwa in 10 Monaten, einmal im Sinne der Erdrotation umkreist. Der vom Erdmittelpunkte aus gesehene Radius des Kreises beträgt nach Obigem $a\frac{C}{A}$.

Wir werden im folgenden Paragraphen darüber zu berichten haben, in welcher Weise sich eine derartige Bewegung des instantanen Pols in den Beobachtungen der Polschwankungen bemerklich macht. Überschlagen wir hier nur noch die Chancen der Beobachtungsmöglichkeit, so sehen wir, daſs diese jetzt viel günstiger liegen, wie vorher, wo es sich um den Nachweis der räumlichen Bewegung der Rotationsaxe handelte. Denn erstens ist die Periode der Bewegung des instantanen Pols und zweitens ist ihre Gröſse ca. 300 mal so groſs, wie die Periode und Gröſse derjenigen Bewegung, welche der Schnittpunkt der Rotationsaxe am Himmelsgewölbe ausführt. Obschon also, wie wir bemerkten, die frühere Bewegung unmerklich war, so braucht es darum nicht die jetzige zu sein.

§ 6. Der Nachweis der Polschwankungen durch die Beobachtung; die Chandlersche Periode.

In der Beobachtung werden sich die im vorigen Paragraphen als möglich nachgewiesenen Polschwankungen durch eine Veränderlichkeit

Hosted by Google

der *Breite* des Beobachtungsortes verraten. Ob man dabei die Breite als geographische (Komplement desjenigen Winkels, welchen die Lotlinie des Beobachtungsortes mit der Rotationsaxe der Erde bildet) oder als geocentrische (Komplement des Winkels, den die Verbindungslinie des Beobachtungsortes und des Erdmittelpunktes mit der Rotationsaxe einschliefst) definiert, ist gleichgültig. In beiden Fällen handelt es sich um den Winkel einer in der Erde festen Geraden mit der in der Erde variabeln Rotationsaxe. Je nachdem sich die letztere bei ihrer Bewegung dem Beobachtungsorte nähert oder sich von ihm entfernt, wird die Breite des Ortes abnehmen oder wachsen.

In der That sind nun Breitenschwankungen, welche sich nicht durch Beobachtungsfehler erklären liefsen, schon früher zu wiederholten Malen vermutet worden, so von Peters (1842) und Nyrén (1871) an der Sternwarte Pulkowa, von Clerk Maxwell an den Greenwicher Beobachtungen aus dem Jahre 1851 bis 1854. Die Amplitude der Schwankung hielt sich in den Zehnteln einer Sekunde, die Angaben über die Periode waren widersprechend. Zur Sicherheit erhoben wurde das Vorhandensein von Breitenschwankungen aber erst durch die besonders genauen Beobachtungen von Küstner an der Berliner Sternwarte aus dem Jahre 1885. Auf die sehr ausführlichen Arbeiten, in denen Chandler*) das gesamte vorliegende Beobachtungsmaterial einer eingehenden Diskussion unterzog, kommen wir unten zurück.

Neues Licht wurde auf die ganze Frage geworfen, als im Jahre 1891 eine astronomische Expedition nach Honolulu zum Zwecke von Breitenmessungen ausgeschickt wurde, welche mit gleichzeitigen Beobachtungen in Berlin verglichen wurden. Honolulu liegt ungefähr auf dem entgegengesetzten Meridian (171° westlich) von Berlin. Wenn nun die Breitenschwankungen wirklich ihren Grund in dem Wechsel der Rotationsaxe der Erde haben, so müssen sie sich an beiden Stationen in entgegengesetztem Sinne äufsern (vgl. Fig. 101): die Breite in Berlin mufs zunehmen, wenn sie in Honolulu abnimmt, ein Maximum der Breite in Berlin mufs mit einem Minimum in Honolulu zusammenfallen etc. Wie vollständig sich diese Erwartung bestätigt hat, zeigen die beiden

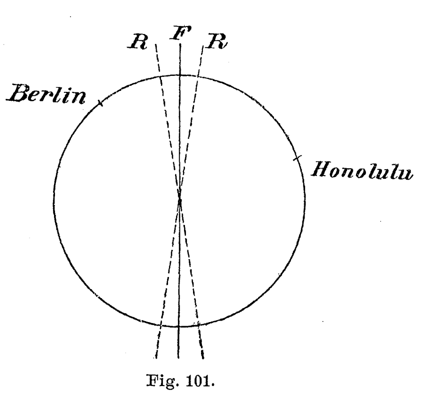


Fig. 101.

*) Astronomical Journal Vol. XI, XII, XV, XIX, XXI, XXII (1891—1902).

Hosted by Google

folgenden Diagramme*) (Fig. 102); in ihnen bedeutet die Abscisse die Zeit während der Jahre 1891 und 1892, die Ordinate giebt die Abweichung der geographischen Breite von ihrem mittleren Werte an, in einem Maſsstabe, der aus den angeschriebenen Zahlen ersichtlich ist. Die Amplitude der Schwankung ist, wie wir sehen, für beide Stationen

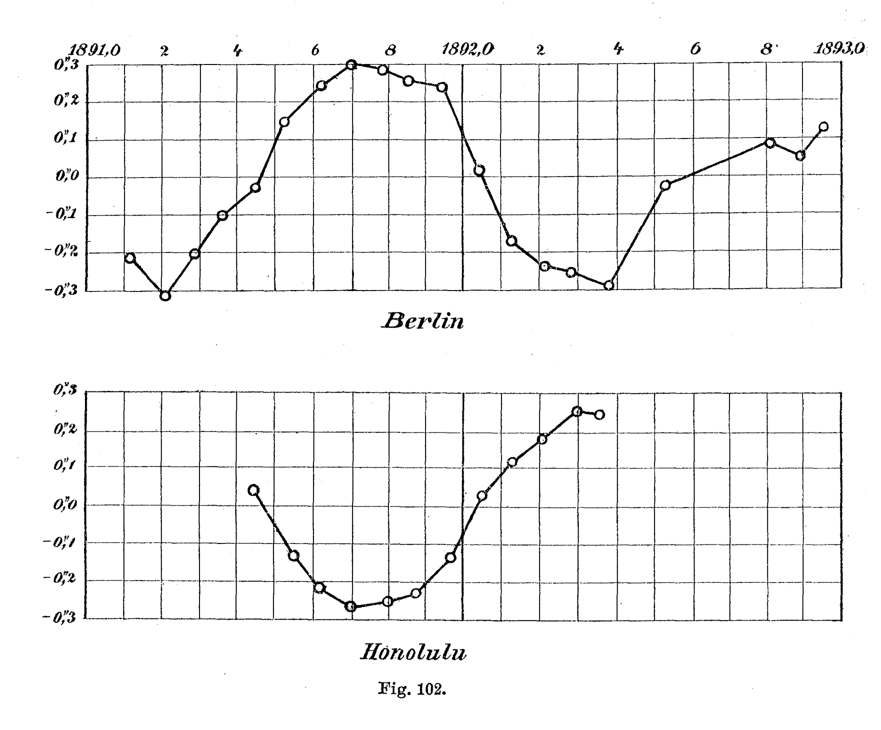


Fig. 102.

ungefähr gleich; sie liegt zwischen 0",2 und 0",3; vor allem aber sehen wir: *die Phase ist für beide Stationen genau entgegengesetzt.* Durch letztere Thatsache ist aufs augenfälligste dargethan, *daſs die Breitenschwankungen ihren Grund in Umlagerungen der Rotationsaxe haben, daſs also diese Axe relativ gegen den Erdkörper gewisse Bewegungen ausführt.*

Offenbar geben zwei auf entgegengesetzten Meridianen gelegene Stationen, wie Berlin und Honolulu, nur eine Komponente der Bewegung wieder, die Komponente nach der durch beide Stationen gelegten Meridianebene. Dagegen werden zur vollständigen Kenntnis der Bewegungen zwei Stationen genügen, deren Meridiane etwa einen rechten Winkel bilden. Wenn mehrere solche Stationen, insbesondere auch

*) Wir entnehmen dieselben den Verhandlungen der 1895 in Berlin abgehaltenen Konferenz der internat. Erdmessung, Berlin 1896, Tafel 4.

Hosted by Google

auf entgegengesetzten Meridianen gelegene, zur Verfügung stehen, so werden ihre Resultate sich gegenseitig kontrollieren können.

Fig. 103 stellt die Lage der Beobachtungsorte dar, auf welche sich die von der permanenten Kommission für internationale Erdmessung angeregte Festlegung der Polschwankungen stützt. Die Mehrzahl der europäischen Stationen liegt gegen die hauptsächlichen amerikanischen Stationen, vom Nordpol gesehen, ungefähr unter rechtem Winkel. Das gesamte Beobachtungsmaterial wird in Potsdam von Th. Albrecht verarbeitet und fortlaufend von dem Centralbureau der internationalen Erdmessung veröffentlicht. Dem letzten Berichte*) entnehmen wir die Figur 104, welche die Beobachtungsergebnisse von 1890 bis 1900 zusammenfaſst.

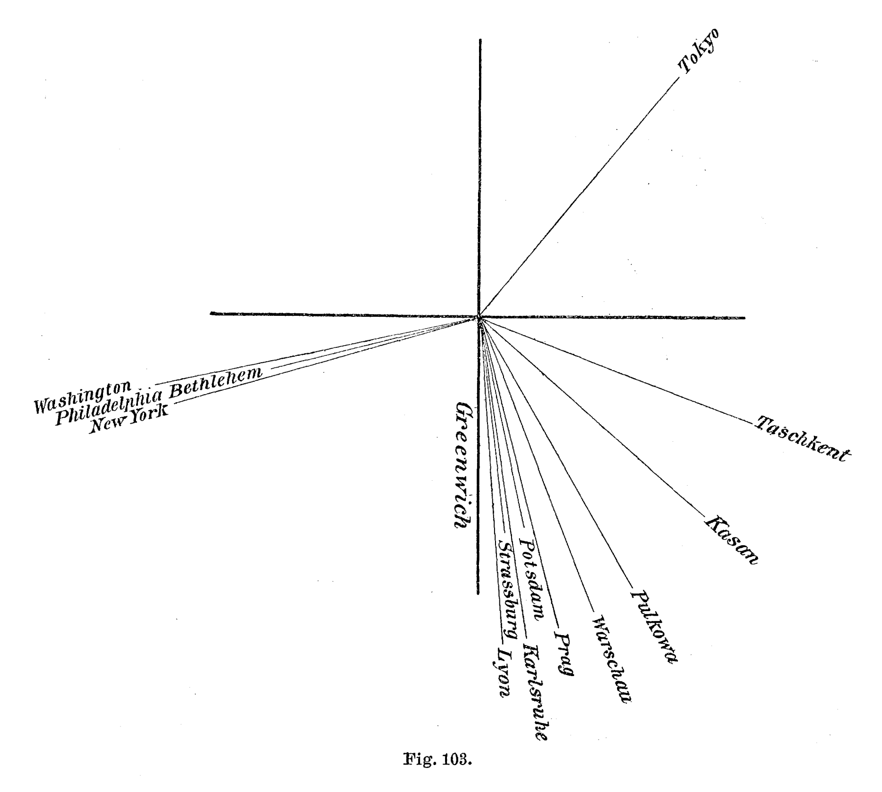


Fig. 103.

Diese Figur stellt den Weg des Poles in dem genannten Zeitraume dar u. zw. ist der Deutlichkeit der Zeichnung wegen der den

*) Berlin 1900. Frühere Mitteilungen in den Verhandlungen der genannten Kommission auf der Konferenz in Lausanne 1896. Vgl. auch für die Jahre nach 1900 Astron. Nachr. Nr. 3808

Hosted by Google

ersten fünf Jahren entsprechende Weg punktiert, der den letzten fünf Jahren entsprechende ausgezeichnet. Die eingeschriebenen Zahlen bedeuten die Daten (Jahre und Jahreszehntel), auf welche die Beobachtungen sämtlicher Stationen reduziert wurden. Der mittlere Fehler der einzelnen Koordinate des instantanen Poles wird zu 0,03″ angegeben. Dieser verhältnismäſsig kleine mittlere Fehler wird aber nur dadurch erzielt, daſs zur Ableitung jeder Koordinate eine groſse Zahl von Einzelbeobachtungen herangezogen wurde, die selbst einen viel gröſseren mittleren Fehler haben. Der Ursprung des benutzten Koordinatensystems entspricht der mittleren Lage des instantanen Poles oder wie wir auch sagen können, dem geometrischen Pol.

Bewegung des Nordpoles der Erdaxe.

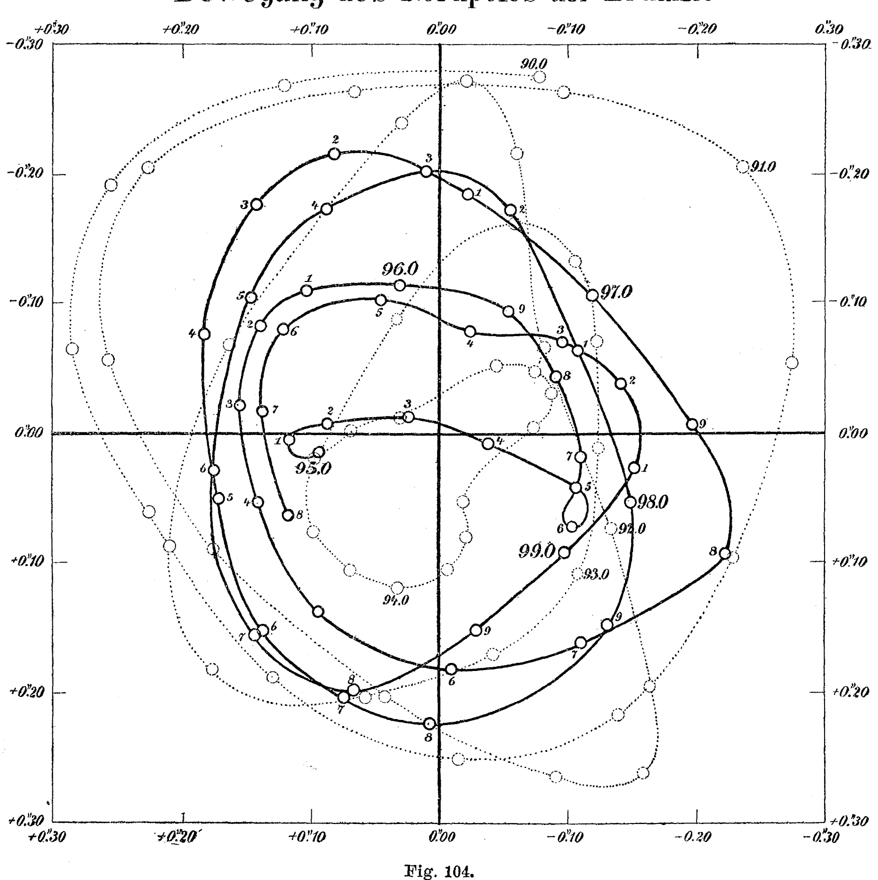


Fig. 104.

Vergleichen wir nun diese Figur mit der vorangehenden Theorie der Polschwankungen.

Da fällt zunächst ins Auge, daſs die Polbahn keinem einfachen mathematischen Gesetze mit Genauigkeit genügt, daſs sie einen scheinbar zufälligen Charakter hat und vielfach gestört ist. Es sind bei der vorliegenden Frage offenbar nicht mehr die einfachen Verhältnisse der Himmelsmechanik maſsgebend, sondern wir befinden uns hier bereits auf dem verschlungenen Gebiete der Geophysik. Nach der abstrakten Theorie des vorigen Paragraphen sollte die Bahnkurve ein *Kreis* sein; davon ist in Wirklichkeit nicht die Rede; nur zu Beginn des Beobachtungszeitraumes wird die Kreisgestalt einigermaſsen approximiert. In der That werden wir bald eine Reihe unberechenbarer Störungen kennen lernen, welche die Polbewegung beeinflussen und von ihrer theoretischen Gesetzmäſsigkeit entfernen.

Dagegen ist zu betonen, daſs der *Sinn der Polbewegung* durchweg mit dem von der Theorie geforderten Sinne der Erdumdrehung übereinstimmt, wenn wir eine vorübergehende Unregelmäſsigkeit ausnehmen, die von 95,0 bis 95,6 reicht. Hier hat entweder eine jener später zu besprechenden temporären Störungen stattgefunden, in einem solchen Grade, daſs durch dieselbe der Polweg in der Figur über den Koordinatenursprung hinübergezogen ist, oder aber die Schleife als solche ist auf Beobachtungsfehler zurückzuführen, was ebenfalls keineswegs ausgeschlossen ist, da schon eine Korrektion der Koordinaten um etwa den angegebenen mittleren Fehler genügt, um die ganze Unregelmäſsigkeit fortzuschaffen.

Was nun die *Amplitude der Polschwankung*, d. h. den Radiusvektor der Polbahn betrifft, so beträgt dieselbe in Gradmaſs im Maximum etwa $1/4''$, im Mittel vielleicht $1/8''$. Die in den Formeln des vorigen Paragraphen unbestimmt gebliebene Gröſse a würde hiernach im Mittel etwa gleich $1/8''$ zu setzen sein. Auf der Erdoberfläche ergiebt sich hieraus als mittlere Entfernung e des geometrischen und des instantanen Poles etwa:

$$e = a \times \text{Erdradius} = \frac{\pi}{180 \cdot 60 \cdot 60} \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{\pi} 10^7 = \text{circa } 4 \text{ m}.$$

In den Jahren 1890 bis 1895 hat diese mittlere Entfernung durchschnittlich abgenommen, von 1895 bis 1898 hat sie zugenommen, von da ab ist sie kleiner geworden, ist aber jetzt (1902) bereits wieder in's Zunehmen übergegangen, wie aus der unsere Figur ergänzenden Publikation in den Astron. Nachr. hervorgeht (vgl. die vorige Anm.).

Das Hauptinteresse konzentriert sich indessen auf die Frage nach der *Periode der Polbewegung*. Hier zeigt sich eine zunächst überraschende Abweichung von der Theorie, die um so bemerkenswerter ist, als sie durchaus gesetzmäſsig zu sein scheint. Während nämlich die Theorie


Hosted by Google

eine Periode von ungefähr 10 Monaten verlangt, ergiebt die Prüfung von Figur 104 eine Periode von etwa 14 Monaten. Wir verfahren, um dies einzusehen, ziemlich roh, aber für unsere Zwecke hinreichend genau wie folgt: Wir denken uns zunächst die offenbar unregelmäfsige Schlinge von 95,0 bis 95,6 nach unten hin auseinandergezogen, so dafs sie mit den anliegenden Kurvenstücken einen dem Uhrzeigersinne entgegengesetzten Umlauf des Koordinatenanfanges gleich den übrigen Umläufen ergiebt und zählen darauf von 90,0 bis etwa 99,4 die Anzahl der Umläufe ab. Es sind dies gerade 8 Umläufe, welche vom Pole in 9,4 Jahren zurückgelegt sind. Mithin beträgt die Dauer eines Umlaufes oder die Periode der Polschwankung

$$\frac{9{,}4}{8} \cdot 12 = 14{,}1 \text{ Monate.}$$

Während wir also die Eulersche zehnmonatliche Periode vorzufinden erwarteten, werden wir durch die Beobachtungen auf eine wesentlich längere Periode hingewiesen.

Das Verdienst, die hier hervorgetretene längere Periode entdeckt zu haben, gebührt dem amerikanischen Astronomen Chandler. Chandler prüfte in den schon zitierten umfangreichen Arbeiten rein rechnerisch ohne theoretische Voreingenommenheit das gesamte Beobachtungsmaterial der Breitenschwankungen von 1840 bis 1891 und wurde dabei auf eine Periode von 427 Tagen = ca. 14 Monaten geführt, eine Periode, welche seitdem im Gegensatz zur *Eulerschen* die *Chandlersche* heifst.

Ohne zunächst auf die theoretische Erklärung dieser Periode einzugehen, wünschen wir uns durch blofse Diskussion der in Fig. 104 niedergelegten Beobachtungen ein Bild davon zu verschaffen, wieweit die Polschwankungen durch die Annahme einer 14-monatlichen Periode dargestellt werden können. Wir werden dabei nicht das äufserst mühsame und gründliche rechnerische Verfahren von Chandler benutzen, sondern ein naheliegendes graphisches Verfahren.

Es sei $w = x + iy$ der Vektor vom Koordinatenursprung nach dem augenblicklichen Orte des instantanen Poles. Würde die Bewegung des Poles vollständig durch *eine* Periode τ_1 (z. B. = 14 Monate) erschöpft, so könnten wir einfach schreiben

$$(1) \qquad w = a e^{2\pi i \frac{t}{\tau_1}} + a' e^{-2\pi i \frac{t}{\tau_1}};$$

wäre die Bewegung überdies eine reine Kreisbewegung, so würde von den beiden Konstanten a und a' die eine (sagen wir a') verschwinden; gleichzeitig würde dann die andere a durch ihren absoluten Betrag den Radius des Kreises bestimmen, auf dem die Bewegung stattfindet.


Hosted by Google

Wir können aber sogleich, den Fall einer allgemeinen elliptischen Polschwingung in Betracht ziehend, a sowohl wie a' als im allgemeinen nicht verschwindende komplexe Gröſsen voraussetzen.

Die Kompliziertheit der Figur 104 zeigt unmittelbar, daſs diese Darstellung durch *eine* Periode nicht ausreicht. Wir machen daher den allgemeineren Ansatz

$$(2) \qquad w = a e^{2\pi i \frac{t}{\tau_1}} + a' e^{-2\pi i \frac{t}{\tau_1}} + b e^{2\pi i \frac{t}{\tau_2}} + b' e^{-2\pi i \frac{t}{\tau_2}} + \cdots,$$

indem wir versuchen, die wirklich beobachtete Bewegung durch Überlagerung zweier (oder mehrerer) Schwingungsbewegungen darzustellen. Es ist sehr leicht, den Bestandteil von der bereits bekannten 14-monatlichen Periode aus der Polbewegung zu eliminieren. Wir bilden zu dem Zwecke nach Gl. (2)

$$\begin{aligned} w_{t+\tau_1} - w_t &= b\left(e^{2\pi i \frac{t+\tau_1}{\tau_2}} - e^{2\pi i \frac{t}{\tau_2}}\right) + b'\left(e^{-2\pi i \frac{t+\tau_1}{\tau_2}} - e^{-2\pi i \frac{t}{\tau_2}}\right) + \cdots \\ &= b\left(e^{2\pi i \frac{\tau_1}{\tau_2}} - 1\right) e^{2\pi i \frac{t}{\tau_2}} + b'\left(e^{-2\pi i \frac{\tau_1}{\tau_2}} - 1\right) e^{-2\pi i \frac{t}{\tau_2}} + \cdots \\ &= c e^{2\pi i \frac{t}{\tau_2}} + c' e^{-2\pi i \frac{t}{\tau_2}} + \cdots, \end{aligned}$$

wo c und c' ebenso wie vorher b und b' unbekannte komplexe Konstante bedeuten. Wenn also in der Polbewegung auſser τ_1 noch eine weitere Periode τ_2 steckt, so muſs sich diese in der von der hauptsächlichen Periode τ_1 befreiten Differenz $w_{t+\tau_1} - w_t$ gerade so ausprägen, wie die Periode τ_1 in w selbst.

Am einfachsten bestimmt man die Differenz $w_{t+\tau_1} - w_t$ durch die folgende *graphische Konstruktion**) an der Polbahn Fig. 104. Es ist $\tau_1 = 14$ Monate $= 1{,}17$ Jahre. Man vergleiche also z. B. den Ort des Poles für den Zeitpunkt 90,0 mit demjenigen für den Zeitpunkt 91,17. Die Verbindungslinie beider Orte giebt uns nach Gröſse, Richtung und Sinn den Vektor $w_{t+\tau_1} - w_t$ für $t = 90{,}0$. Es ist also nur nötig, diese Strecke etwa durch Parallelenlineale aus Fig. 104 in eine neue Figur (105a) zu übertragen. Wir erhalten so einen vom Koordinatenursprung dieser neuen Figur auslaufenden Vektor, von dem nur der Endpunkt markiert und durch die Zahl 90,0 bezeichnet ist. In gleicher Weise

*) Dieses graphische Verfahren dürfte neu und für manche ähnlichen Fälle nützlich sein. Vgl. auch, was die analytischen Regeln zur Auffindung „versteckter Periodizitäten" angeht, den Bericht von H. Burkhardt: Entwickelungen nach oscillierenden Funktionen. Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 10 (1901), pag. 312—332. Neuerdings hat A. Schuster eine allgemeine Methode (Konstruktion eines sog. „Periodographen") angegeben, durch welche die Frage entscheidend gefördert werden dürfte. Vgl. Nature, Bd. 66 (1902), pag. 614—618.


Hosted by Google

verfahren wir mit den beiden Orten 90,1 und 91,27 in Fig. 104 und erhalten dadurch in Fig. 105a einen Punkt, der der Differenz $w_{t+\tau_1} - w_t$ für $t = 90{,}1$ entspricht und mit 1 bezeichnet ist. So fortfahrend leiten wir aus der Polbahn in Fig. 104 eine neue Polbahn ab, die von dem Hauptgliede der Bewegung befreit ist. Diese abgeleitete Polbahn wird, wie man sieht, noch viel verschlungener und unregelmäſsiger als die ursprüngliche. Es muſste daher, sollte die Figur nicht zu undeutlich werden, die abgeleitete Polbahn in zwei Stücke getrennt werden: Fig. 105a giebt den Zeitraum von 90,0 bis 94,0, Fig. 105b den Zeitraum von 94,0 bis 98,0 wieder. Im Ganzen sind somit bei der abgeleiteten Polbahn die Orte zwischen 90,0 und 99,17 verwandt worden.

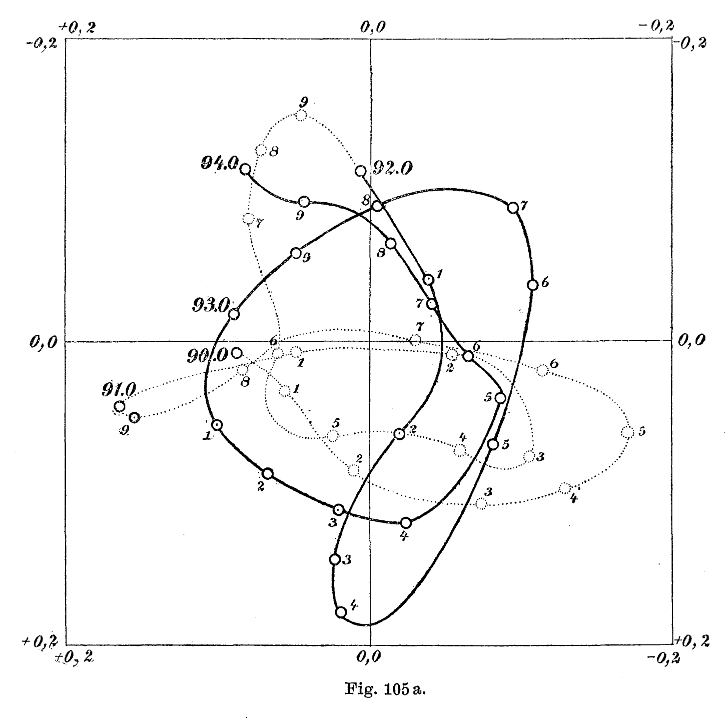


Fig. 105a.

Der Deutlichkeit wegen wurde in beiden Figuren die Hälfte der abgeleiteten Polbahn punktiert, die andere Hälfte ausgezogen.

Zunächst lehrt der Anblick der abgeleiteten Polbahnen, daſs ihre Abmessungen kleiner sind, wie die der ursprünglichen Figur. Während die Ausschläge in Fig. 104 bis nahezu an 0″,30 heranreichen, überschreiten die Ausschläge in den Fig. 105 nur an wenigen Stellen 0″,15. Dies Resultat ist keineswegs selbstverständlich, da sich ja bei der Differenzbildung zwischen $w_{t+\tau_1}$ und w_t die Gröſse der Ausschläge ebensogut vermehren wie vermindern konnte.

Hosted by Google

Wir schließen hieraus, daß in der That eine Periode von 14 Monaten in den Polschwankungen ausgeprägt ist und daß etwa die Hälfte der im Ganzen beobachteten Schwankungen auf eine Bewegung von dieser Periode zurückzuführen ist.

Weiter aber schließen wir aus der schon erwähnten größeren Verschlungenheit der neuen Figuren, *daß die Umstände, welche den nach Abzug der 14-monatlichen Periode verbleibenden Restbetrag der Polschwankungen bedingen, weniger gesetzmäßig und einfach sind, wie diejenigen, welche den Charakter und die Periode der Hauptbewegung bestimmen.* Betrachtet man insbesondere z. B. den Zeitraum von 96,5 bis 97,5 in Fig. 105 b, so wird man den Eindruck gewinnen, als ob

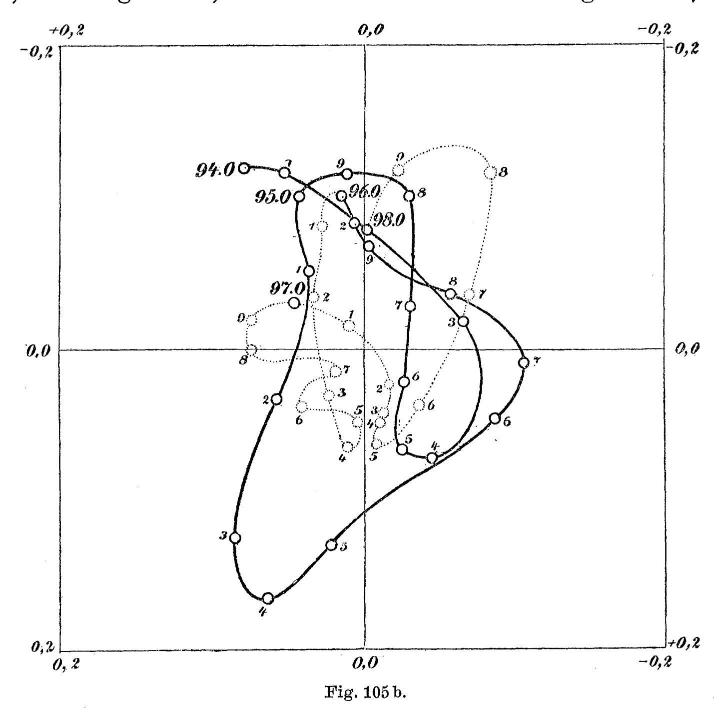


Fig. 105 b.

das Zickzack dieses Bahnstückes regellos verläuft, und wird den Verdacht hegen, daß es möglicherweise ganz auf Beobachtungsfehler zurückzuführen ist. Es kommt hinzu, daß der mittlere Fehler der abgeleiteten Polbahn bei unserer Konstruktion noch etwas größer ausfällt, wie der der ursprünglichen Bahn (0″,03), daß also bei der abgeleiteten Polbahn die Lage der Punkte nur etwa auf 0″,05 bestimmt ist.

Indessen läßt sich eine gewisse Gesetzmäßigkeit auch bei der abgeleiteten Polbahn nicht verkennen. Es fällt auf, daß in beiden

Hosted by Google

Figuren 105 die mit gleichen Zahlen bezeichneten Punkte in der Regel ziemlich dicht bei einander liegen. So befinden sich z. B. die vollen Jahreszahlen sämtlich in dem linken oberen Quadranten der Figuren oder in unmittelbarer Nähe desselben. Um dies noch deutlicher zu machen, könnte man sich in der Fig. 105 die verschiedenen Polygone der Jahreszehntel eintragen, indem man die mit gleichen Ziffern 1, 2, ... bezeichneten Orte des Poles in den verschiedenen Jahren geradlinig verbindet. Alle diese Polygone würden verhältnismäſsig klein ausfallen. Nach Ablauf eines Jahres kommt also der „abgeleitete“ Pol im Groſsen und Ganzen in seine frühere Lage zurück. *In der abgeleiteten Polbahn scheint sich hiernach die Periode eines vollen Jahres auszuprägen.*

Versuchen wir ebenso wie oben bei der 14-monatlichen Periode durch Abzählung der Umläufe das Vorhandensein der jährlichen Periode wahrscheinlich zu machen, so müssen wir in erhöhtem Maſse von der schon dort angewandten Willkür Gebrauch machen, einzelne Schleifen über den Koordinatenursprung herüberzuziehen, um dadurch die Kurve abzuglätten. Betrachten wir z. B. den ausgezogenen Teil beider Figuren von 92,0 bis 96,0, der die verhältnismäſsig deutlichsten Elongationen aufweist. Wir denken uns den Zug von 92,0 bis 92,4 nach links hin über den Mittelpunkt der Figur herübergezogen. Dieser Zug ergiebt dann zusammen mit dem Stücke 92,4 bis 92,8 einen ersten Umlauf des Koordinatenursprungs; einen zweiten ziemlich regelmäſsigen Umlauf haben wir in der Bahn von 92,8 bis 93,8. Indem wir auf die andere Figur übergehen, denken wir uns die Schlinge von 94,0 bis 94,5 nach unten links herabgezogen; alsdann können wir bis 94,9 einen dritten Umlauf zählen. Einen vierten vollen Umlauf liefert die die Zeit von 94,9 bis 96,0. Im ganzen haben wir also, wenn wir die vorgenommenen willkürlichen Verschiebungen der Bahn gelten lassen, in vier Jahren gerade vier Umläufe, also eine jährliche Periodizität der abgeleiteten Bahn.

Dieses Ergebnis ist ebenfalls bereits von Chandler auf Grund seiner rechnerischen Reduktion der Beobachtungen ausgesprochen worden. Auf ähnlicher Grundlage hat später van de Sande Bakhuyzen*) den jährlichen Bestandteil der Polbewegung formelmäſsig darzustellen gesucht. Er findet dabei nach Abzug der 14-monatlichen Polschwankung als mittlere jährliche Polbahn eine Ellipse, deren groſse Axe gleich $0'',104$ ist und gegen den 19ten Meridian östlich von Greenwich gerichtet ist und deren kleine Axe $0'',044$ beträgt. Dieselbe wird, wie auch aus den

---

*) Akademie von Wetenschappen, Amsterdam, August 1900.

Hosted by Google

Figuren 105 zu ersehen ist, in der Richtung von Westen nach Osten durchlaufen; den 19[ten] Meridian passiert der Pol Anfang Oktober.

Es liegt nahe, unser Verfahren zu wiederholen und aus den Figuren 105 durch Elimination der jährlichen Periode eine neue Figur abzuleiten. Bedeutet also jetzt w den in Fig. 105 dargestellten Vektor und τ_2 die Periode eines Jahres, so bilden wir uns auf graphischem Wege wie oben $w_{t+\tau_2} - w_t$ und tragen das Resultat in einer neuen Figur ein. Es wurden dabei nur die ausgezogenen Teile der Figuren 105 (von 92,0 bis 96,0) der weiteren Behandlung zu Grunde gelegt, so daſs die neu entstehende Figur 106 von den Marken 92,0 bis 95,0 reicht, wobei wieder die Hälfte der Figur (von 92,0 bis 93,5) ausgezogen, die andere Hälfte (von 93,5 bis 95,0) punktiert wurde. Wäre eine weitere Periode auſser τ_1 und τ_2 in der Polbewegung enthalten, so müſste diese in unserer Fig. 106 zur Anschauung kommen. Es scheint aber nicht, daſs dem so ist; *vielmehr macht Fig. 106 den Eindruck, als ob es sich hier um einzelne Störungen handelt, die entsprechende einmalige Vorstöſse der Bahn bedingen, und die von einem Zurückweichen in die Ruhelage gefolgt sind.* Einen solchen Vorstoſs haben wir in der Figur bei 92,1, einen zweiten bei 93,2 u. s. w. Wie der Vergleich der Figuren 105 und 106 zeigt, ist eine wesentliche Verkleinerung der Dimensionen durch unser zweites Verfahren nicht mehr eingetreten. Die Realität der 12-monatlichen Periode wird also durch die Gröſse unserer Figuren nicht in dem Sinne verdeutlicht, wie vorher die Realität

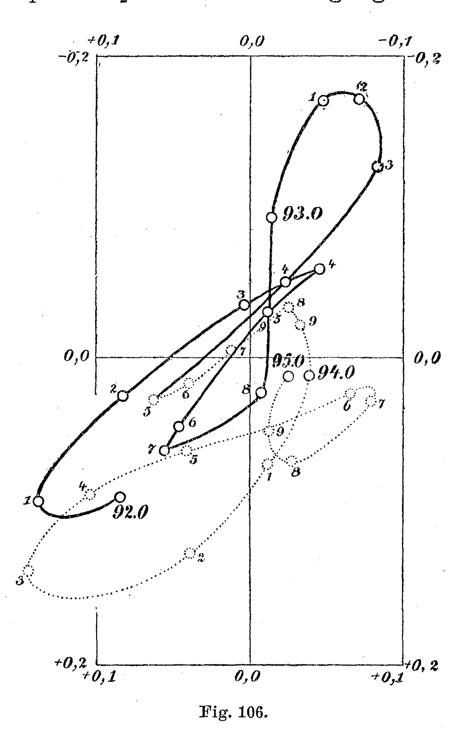


Fig. 106.

der 14-monatlichen Periode. *Wir müssen daraus schlieſsen, daſs die Störungen, welche in Fig. 106 zur Anschauung kommen, etwa von derselben Gröſsenordnung sind, wie die Einflüsse, welche den vorausgesetzten jährlichen Umlauf des Poles bedingen.* Jedenfalls bleibt in der Polbewegung ein erheblicher Restbetrag übrig, welcher weder durch eine 14-monatliche noch durch eine 12-monatliche Schwankung er-

Hosted by Google

klärt wird. Von der 10-monatlichen Eulerschen Schwankung ist überhaupt nichts zu bemerken.

Es ist nicht unmöglich, daſs die hier auf graphischem Wege gezogenen Schlüsse teilweise voreilig sind und daſs sie beim Bekanntwerden weiterer Beobachtungen über Polschwankungen zu modifizieren sein werden. Namentlich muſs die letzte Figur wegen der bei der Wiederholung unseres graphischen Verfahrens sich häufenden Unsicherheiten als ziemlich problematisch gelten. Auch liegt in unserem Ableitungsverfahren eine gewisse Willkür, insofern als wir nicht notwendig die Vektoren w_t und $w_{t+\tau}$ zu vergleichen brauchten, sondern ebensogut die Differenz zwischen $w_{t+2\tau}$ oder $w_{t+3\tau}$ . . . und w_t hätten nehmen können. Die abgeleiteten Figuren würden dann andere geworden sein. Indessen stimmen unsere Ergebnisse mit den rechnerischen Resultaten von Chandler u. A. überein; jedenfalls scheint unser Verfahren für die hier beabsichtigte mehr orientierende wie abschlieſsende Diskussion bei der heutigen Genauigkeit der fraglichen Beobachtungen auszureichen. Bei einer abschlieſsenden Beurteilung des Gegenstandes werden namentlich auch Wahrscheinlichkeitsuntersuchungen darüber, ob eine aufgefundene Periodizität als wirklich oder zufällig anzusehen ist, im Sinne von A. Schuster (vgl. die Anm. auf pag. 679) herangezogen werden müssen.

Was insbesondere das Hauptergebnis dieser Betrachtungen, die 14-monatliche Chandlersche Periode betrifft, so scheint diese auch noch eine gewisse Stütze durch die Erscheinungen der Ebbe und Flut zu finden. Es ist klar, daſs eine Umlagerung der Rotationsaxe wegen der veränderten Centrifugalverhältnisse der Erde die Bewegung der Oceane beeinflussen muſs und daſs eine periodische Umlagerung der Rotationsaxe eine Schwankung des mittleren Meeresniveaus von derselben Periode zur Folge haben müſste, vorausgesetzt, daſs der Einfluſs auf letztere genügend stark ist. Die Herren van de Sande Bakhuyzen*) und Christie**) glauben diese Voraussetzung bejahen und in den holländischen bez. amerikanischen Flutbeobachtungen eine 14-monatliche Variabilität von einigen cm. nachweisen zu können.

Zusammenfassend schlieſsen wir also aus den mitgeteilten Beobachtungen namentlich zweierlei: erstens daſs Polschwankungen zweifellos konstatiert sind, daſs also der Erdpol nicht mehr als „der ruhende Pol in der Erscheinungen Flucht“ angesehen werden kann, zweitens, daſs die Polschwankungen nicht diejenige einfache Gesetzmäſsigkeit

*) Astronom. Nachr. Nr. 3261.

**) Bulletin of the Phil. Soc. of Washington 1895, vol. XII, p. 103.

Hosted by Google

und namentlich nicht diejenige Periode haben, die wir nach den Erörterungen des vorigen Paragraphen erwartet haben würden.

§ 7. Die Erklärung der Chandlerschen vierzehnmonatlichen Periode und die Elastizität der Erde.

Bekanntlich darf die alte Streitfrage, ob das Erdinnere feuerflüssig oder fest sei, heutzutage als in dem Sinne entschieden gelten, daſs sich das Erdinnere, im groſsen und ganzen genommen, wie ein *fester Körper* verhält. Man wird dabei, damit es sich nicht um einen bloſsen Streit um Worte handelt, die Benennungen flüssig und fest zu definieren haben und wird sagen: flüssig soll ein Mittel heiſsen, in dessen Innerem unter gegebenen Umständen relative Verschiebungen der Teile in merklichem Maſse vorkommen können, fest ein Mittel, in dem solche Verschiebungen unmöglich sind. Man kann es dahingestellt sein lassen, ob im letzteren Falle die Verschiebbarkeit der Teile durch eine Art elastischen Zusammenhaltes, (durch Festigkeit im gewöhnlichen Sinne), oder durch einen besonders hohen Grad von Viscosität hervorgerufen wird: auch eine Flüssigkeit von hinreichender Viscosität (z. B. Asphalt) verhält sich gegen äuſsere Einwirkungen von nicht zu langer Dauer merklich wie ein fester Körper und zeigt keine bedeutenden Verschiebungen ihrer Teile gegeneinander. Wir können im Anschluſs an eine in der englischen Litteratur gebräuchliche Ausdrucksweise von *effektiver Festigkeit* sprechen, um damit ein Verhalten zu bezeichnen, welches unter gegebenen Umständen dem eines festen Körpers von bestimmtem Elastizitätsgrade analog ist.

Dagegen soll mit der Angabe, das Erdinnere sei fest, nichts über seinen sonstigen physikalischen Zustand ausgesagt werden. Dieser dürfte bei den auſserordentlichen Temperaturen und Drucken, die im Innern der Erde herrschen, von allem abweichen, was wir sonst von flüssiger oder fester Konstitution wissen. Schon in Laboratoriumsversuchen lassen sich gewisse kritische Zustände schaffen, bei denen die Aggregatzustände stetig ineinander übergehen; der Zustand des Erdinneren liegt aber weit jenseits jener kritischen Grenzen. Der richtige Standpunkt wird offenbar der sein, den Zustand des Erdinneren nicht nach gewagten Analogien und Extrapolationen aus Laboratoriumsversuchen vorauszusagen, sondern aus dem thatsächlichen Verhalten der Erde, wie es sich z. B. bei den Polschwankungen zeigt, auf den durchschnittlichen oder effektiven Zustand zurückzuschlieſsen.

Auch soll mit der Berechnung eines bestimmten Elastizitätsmoduls nicht behauptet werden, daſs die Erde durch und durch die Beschaffenheit eines Körpers von der betr. Elastizität habe. Vielmehr kann man

Hosted by Google

als die heutzutage wahrscheinlichste und herrschende Ansicht diejenige bezeichnen, wonach die Erde *inhomogen* konstituiert ist, nämlich aus einem dichteren und festeren Kern (Eisenkern) und einer weniger dichten und nachgiebigeren Schale (Gesteinsmantel) besteht, welche beide durch eine nicht sehr ausgedehnte Schicht eines zähflüssigen Magmas von einander getrennt werden (vgl. die unten zu nennende Theorie von E. Wiechert). Auch die Möglichkeit einer solchen Inhomogenität wünschen wir durch das Wort „effektive" Elastizität oder Festigkeit einzuschließen. Der zu berechnende Elastizitätsmodul bedeutet alsdann den Wert desselben für einen homogenen elastischen Körper, welcher sich hinsichtlich der hier in Frage kommenden elastischen Wirkungen ebenso verhält wie die wahrscheinlich inhomogene Erde.

Wir beabsichtigen nicht, auf die Diskussionen über das Erdinnere näher einzugehen, sondern heben nur einige Punkte aus der historischen Entwickelung hervor*). Im Interesse der Theorie des Vulkanismus haben die Geologen seit altersher für das feuerflüssige Erdinnere plaidiert. Der erste, der sich mit wissenschaftlichen Gründen dagegen ausgesprochen hat, scheint Hopkins**) gewesen zu sein. Hopkins untersuchte die Präcession und Nutation, die eine mit Flüssigkeit gefüllte Kugelschale zeigen würde, und fand, dafs eine solche sich erheblich anders als die Erde verhalten würde. Die späteren und tiefer gehenden Untersuchungen Lord Kelvins***) ergaben, dafs die Beweisführung von Hopkins mangelhaft war und dafs auch seine Resultate in wesentlichen Punkten zu berichtigen sind. Indem Kelvin statt der Kugelschale eine abgeplattete ellipsoidische Schale betrachtet, zeigt er, dafs sich *bei völlig starrer Schale* in den schnelleren Nutationen (der halbjährigen und namentlich der halbmonatlichen vgl. pag. 651), nicht aber in der Präcession und in der $18\frac{2}{3}$-jährigen Nutation eine Differenz zwischen Beobachtung und Rechnung ergeben würde†), dafs dagegen bei

---

*) Wegen näherer Angaben vgl. die Darstellung in Kap. 15 des vorzüglichen populär-wissenschaftlichen Werkes von G. H. Darwin, The Tides, London 1898, deutsche Ausgabe von A. Pockels, Leipzig 1902, oder die jüngst erschienene Kosmische Physik von Sw. Arrhenius, Leipzig 1903.

**) Researches in physical geology, Philosophical Transactions London R. Soc. 1839, 1840, 1842.

***) Mathematical and Physical Papers, Bd. 3, art. 45 vgl. insbesondere §§ 21—38, zusammengefafst in Popular Lectures, Bd. 3, pag. 238.

†) Hiermit hängt eine Bemerkung Lord Kelvins zusammen, die wir an Modellen der Göttinger mathematischen Sammlung bestätigt haben: Ein Kreisel, dessen Schwungmasse durch ein mit Flüssigkeit gefülltes *abgeplattetes* Rotationsellipsoid ersetzt ist, verhält sich, in Umdrehung um seine Axe versetzt, auf horizontaler Unterlage *stabil* und führt seine Präcessionsbewegung aus, ähnlich

Hosted by Google

einer *einigermaſsen nachgiebigen Schale* alle jene Erscheinungen so verlaufen könnten, wie es der Wirklichkeit entspricht. Die astronomischen Thatsachen widerlegen also nur die Annahme: flüssiges Erdinnere in starrer Schale, eine Annahme, die ja auch aus physikalischen Gründen unhaltbar ist, da wir kein Material kennen, das als dünne Schale ausgebildet völlig unnachgiebig wäre. Andrerseits aber wird die Annahme: flüssiges Erdinnere in nachgiebiger Schale, durch die Erscheinungen der Ebbe und Flut widerlegt. Eine dünne Erdkruste von der elastischen Nachgiebigkeit der uns bekannten Materialien würde nämlich dem deformierenden Einfluſs der Gezeitenkräfte fast ebenso willig folgen wie das Wasser der Meere. Dann aber gäbe es unter dem Einfluſs jener Kräfte keine relative Bewegung des Wassers gegen das Land, sondern nur ein gemeinsames Auf- und Abwogen der Meere und Kontinente, das sich der unmittelbaren Wahrnehmung entziehen würde. Somit bleibt nur die Annahme einer im Durchschnitt effektiv-festen Erde übrig (fest im Sinne der vorausgeschickten Erklärung). Mit dieser Annahme ist das Vorhandensein peripherischer Hohlräume, die mit einer Art Flüssigkeitsmagma ausgefüllt sind, oder auch das Vorhandensein einer ringsum ausgebildeten flüssigen Schicht durchaus verträglich, falls dieselben nur im Verhältnis zu dem effektiv-festen Erdkerne und der festen Erdkruste wenig ausgedehnt sind, wodurch nicht nur den Bedürfnissen der geologischen Theorien, sondern namentlich auch den wichtigen Ergebnissen der Pendelbeobachtungen Rechnung getragen werden kann. (Vgl. auch hierzu die Wiechertsche Theorie des Erdinnern.)

Daſs die Erde zugleich effektiv starr sei, soll damit nicht behauptet werden. Schon Lord Kelvin*) hat versucht, den Grad der elastischen Nachgiebigkeit des Erdkörpers auf Grund der thatsächlichen Höhe der Fluten abzuschätzen. Während, wie wir soeben sagten, bei einer in der Hauptsache flüssigen, also völlig nachgiebigen Erde die Fluthöhe sich auf Null reduzieren müſste, wird bei jedem endlichen Grade von elastischer Nachgiebigkeit die Fluthöhe einen gewissen Bruchteil derjenigen Höhe betragen, die sich auf einer völlig starren Erde ausbilden müſste.

---

wie ein Kreisel aus festem Stoff; (über den Verlauf der kürzeren Nutationen geben die Beobachtungen an unserem Modell keinen deutlichen Aufschluſs). Dagegen erweist sich ein Kreisel, dessen Schwungmasse aus einem mit Flüssigkeit gefüllten *verlängerten* Ellipsoid besteht, unter denselben Verhältnissen als gänzlich *labil.* Da die Erde ein abgeplattetes Rotationsellipsoid ist, so versteht man, daſs sie in ihren Präcessionsbewegungen von denen eines durchaus festen Körpers auch dann nicht wesentlich abweichen würde, wenn sie mit Flüssigkeit gefüllt wäre, vorausgesetzt, daſs die Erdkruste, so wie wir es ohne merklichen Fehler von unserem Modell voraussetzen dürfen, absolut starr wäre.

*) Thomson und Tait, Natural Philosophy II, art. 843.

Kelvin schätzt von hier aus die Nachgiebigkeit der Erde kleiner als diejenige des Glases und etwa gleich derjenigen des Stahles. Einen sehr viel schärferen Anhalt für eine derartige Schätzung werden wir im Folgenden kennen lernen, wo wir uns zur Erklärung der Chandlerschen Periode wenden.

Es ist das Verdienst von S. Newcomb*), erkannt zu haben, daſs die Periode der freien Nutationen mit dem Grade der Nachgiebigkeit des Erdkörpers zusammenhängt. Die Eulersche Periode von 10 Monaten entspricht der Annahme völliger Starrheit; zu jedem endlichen Elastizitätsgrade dagegen berechnet sich eine davon verschiedene und zwar längere Periode. Umgekehrt läſst sich der Chandlerschen Periode ein bestimmter Elastizitätsgrad zuordnen, bei welcher die Periode der freien Nutationen gerade die beobachtete Dauer von 14 Monaten annehmen würde.

In der Litteratur sind diese Verhältnisse am gründlichsten in einer Arbeit von S. S. Hough**) untersucht, der von den elastischen Differentialgleichungen eines rotierenden Sphäroids ausgeht. Wir werden die Resultate von Hough auf sehr viel einfacherem Wege gewinnen, indem wir an einen Satz aus Kap. VII, § 8 (pag. 607) anknüpfen. Dort wurde bereits die Dauer der freien Nutation oder, was dasselbe bedeutet, die Periode der kräftefreien Präcession für einen deformirbaren sphäroidischen Kreisel berechnet, unter der Annahme, daſs lediglich die elastischen Widerstände den durch die Centrifugalwirkung der Umdrehung verursachten Formänderungen entgegenwirken. Diese Annahme trifft bei einem Körper von den Dimensionen der Erde nicht zu, weil hier auch die gegenseitigen Gravitationswirkungen der Teilchen wesentlich zu berücksichtigen sind.

Wir müssen daher Einiges über diese Gravitationswirkungen und über die Art, wie sie sich mit der Wirkung der elastischen Kräfte zusammensetzen, vorausschicken. Wir ordnen die folgenden Erörterungen in eine Reihe von Einzelproblemen.

Erstes Problem. Eine homogene, incompressible Flüssigkeitsmasse steht unter dem Einfluſs der gegenseitigen Gravitation ihrer Teile und würde im Ruhezustande eine Kugel vom Radius R bilden; sie wird in Rotation um eine feste Axe versetzt; die Winkelgeschwindigkeit

---

*) On the dynamics of the Earth's rotation with respect to the periodic variations of Latitude. Monthly Notices Astr. Soc. London (1892), Bd. 52, pag. 336 und Remarks on Mr. Chandlers Law of Variation of Terrestrial Latitude. Astronomical Journal Bd. 11, 12, 19.

**) On the Rotation of an elastic Spheroid, Philos. Transactions R. Soc. London (1896) Bd. 187, pag. 319.



sei ω. Eine mögliche Gleichgewichtsform der Flüssigkeit ist dann ein abgeplattetes Umdrehungsellipsoid, welches die Rotationsaxe zur Symmetrieaxe hat (Mac Laurinsches Ellipsoid). *Die Elliptizität desselben wird, unter der Annahme, dafs dieselbe klein ausfällt, durch die Formel gegeben*

$$\varepsilon_1 = \frac{5}{4}\frac{\omega^2 R}{g}, \tag{1}$$

wo g die Gravitationsbeschleunigung an der Oberfläche unserer Flüssigkeit bedeutet.

Den Verhältnissen der Erde entsprechen die folgenden in Metern und Sekunden ausgedrückten Zahlenwerte:

$$\omega = \frac{2\pi}{24\cdot 60\cdot 60}, \quad R = \frac{2}{\pi}10^7, \quad g = 9{,}81, \quad \frac{\omega^2 R}{g} = \frac{1}{289}, \quad \varepsilon_1 = \frac{1}{231}. \tag{2}$$

Bei der Ableitung der Gl. (1) können wir, wenn wir uns nicht auf die (übrigens sehr bekannten) Formeln für das Potential eines Ellipsoides berufen wollen, mit Vorteil an unsere frühere Vorstellung des „Erdringes“ anknüpfen. Ebenso wie früher die feste Erde ersetzen wir jetzt unsere ellipsoidische Flüssigkeit durch eine Kugel (Radius R, Masse M) und einen in der Äquatorebene des Ellipsoides gelegenen Ring (Radius R, Masse m). Wie wir in § 1 dieses Kapitels sahen, wird das Gravitationspotential der Kombination Kugel + Ring in einem äufseren Punkte bis zu den Gliedern zweiter Ordnung einschliefslich gleich dem Potential irgend einer anderen Massenverteilung von den gleichen Hauptträgheitsmomenten. Die Trägheitsmomente unserer Flüssigkeitsmasse um die Rotationsaxe (z-Axe) bez. um zwei dazu senkrechte Axen (y- und x-Axe) seien C, A, A. Unter der Elliptizität verstehen wir wie früher das Verhältnis*)

$$\varepsilon = \frac{C-A}{A}.$$

Die Masse m des Ringes ist nach Gl. (1) von § 1 folgendermafsen zu wählen:

$$m = \frac{2(C-A)}{R^2} = \frac{2A}{R^2}\varepsilon = \frac{4}{5}M\varepsilon, \tag{3}$$

*) Neben dieser Definition kommt in der Litteratur die folgende vor:

$$\varepsilon = \frac{a-b}{a},$$

wo a die grofse, b die kleine Axe des Ellipsoides bedeutet. Man überzeugt sich leicht mit Rücksicht auf pag. 600, dafs für eine *homogene* Massenverteilung diese Definition bis auf höhere Potenzen von ε mit der unsrigen übereinstimmt.

Hosted by Google

wobei wir für A den Näherungswert $A = \frac{2}{5} MR^2$ eingeführt haben, der das Trägheitsmoment einer Kugel vom Radius R bedeutet.

Ist r der Abstand eines beliebigen äußeren Punktes P vom Mittelpunkte der Flüssigkeitsmasse, so wird das Potential von Kugel und Ring in P

$$V = f\left(\frac{M}{r} + \frac{m}{r}\frac{1}{2\pi}\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 + (R/r)^2 - 2(R/r)s}}\right),$$

die Integration erstreckt über den Umfang des Ringes. Dabei bedeutet s ähnlich wie pag. 639 die Abkürzung

$$s = \frac{xx' + yy' + zz'}{rR},$$

wo x, y, z die Koordinaten von P, x', y', z' die eines Ringpunktes sind. Legen wir die xz-Ebene durch den Punkt P und die xy-Ebene durch den Ring, und nennen Θ den Winkel zwischen OP und OX, so wird

$$x = r\cos\Theta, \quad y = 0, \quad z = r\sin\Theta,$$
$$x' = R\cos\varphi, \quad y' = R\sin\varphi, \quad z' = 0,$$

und daher

$$s = \cos\Theta\cos\varphi.$$

Die Potenzentwickelung der Quadratwurzel liefert ähnlich wie pag. 639:

$$\frac{1}{\sqrt{1 + (R/r)^2 - 2(R/r)s}} = 1 + \frac{R}{r}s + \left(\frac{R}{r}\right)^2\left(\frac{3}{2}s^2 - \frac{1}{2}\right) + \cdots$$

und die Ausführung der Integration

$$(4)\quad \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 + (R/r)^2 - (R/r)s}} = 1 + \left(\frac{R}{r}\right)^2\left(\frac{3}{4}\cos^2\Theta - \frac{1}{2}\right) + \cdots \\ \qquad = 1 + \frac{3}{4}\left(\frac{R}{r}\right)^2\left(\cos^2\Theta - \frac{2}{3}\right) + \cdots. \end{cases}$$

Daher wird das Potential der Anziehung, wenn wir für m den Wert (3) eintragen:

$$V = fM\left(\frac{1}{r} + \frac{4}{5}\frac{\varepsilon}{r} + \frac{3}{5}\varepsilon\frac{R^2}{r^3}\left(\cos^2\Theta - \frac{2}{3}\right) + \cdots\right).$$

Wir suchen den Wert von V für die Oberfläche der Flüssigkeitsmasse, deren Gleichung wir schreiben dürfen:

$$(5)\qquad r = R\left(1 + \varepsilon\left(\cos^2\Theta - \frac{2}{3}\right)\right),$$

(vgl. Gl. (2) von pag. 601, wo wir für den dort definierten mittleren Radius m den Näherungswert R nehmen). Wegen der Kleinheit von ε können wir

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R}\left(1 - \varepsilon\left(\cos^2\Theta - \frac{2}{3}\right)\right)$$

Hosted by Google

schreiben. Diesen Wert tragen wir in das erste Glied des Ausdrucks für V ein; ferner dürfen wir in den folgenden mit ε behafteten und daher als klein zu behandelnden Gliedern des Potentials direkt $r = R$ setzen. Es ergibt sich so:

$$(6) \qquad V = \frac{fM}{R}\left(1 + \frac{4}{5}\varepsilon - \varepsilon\left(1 - \frac{3}{5}\right)\left(\cos^2\Theta - \frac{2}{3}\right) + \cdots\right).$$

Die Oberfläche der rotierenden Flüssigkeit mufs eine Fläche konstanten Druckes sein. Daraus folgt nach den Grundsätzen der Hydrodynamik, dafs auch die potentielle Energie der auf die Masseneinheit der Flüssigkeit wirkenden Kräfte längs der Oberfläche konstant sein mufs. Diese Kräfte sind die Gravitation einerseits und die Centrifugalkraft andrerseits. Die potentielle Energie der letzteren ist, für die Masseneinheit berechnet, in einem beliebigen Punkte des rotierenden Ellipsoides:

$$U = \frac{1}{2}\omega^2(x^2 + y^2) = \frac{1}{2}\omega^2 r^2 \cos^2\Theta,$$

also insbesondere in der Oberfläche des Ellipsoides, wo näherungsweise $r = R$ ist, mit einer kleinen formalen Abänderung:

$$(7) \qquad U = \frac{1}{3}\omega^2 R^2 + \frac{1}{2}\omega^2 R^2\left(\cos^2\Theta - \frac{2}{3}\right).$$

Damit die Summe $V + U$ auf der Oberfläche der Flüssigkeit einen konstanten, d. h. von Θ unabhängigen Wert erhält, ist es notwendig, dafs die Faktoren von $\left(\cos^2\Theta - \frac{2}{3}\right)$ in (6) und (7) entgegengesetzt gleich sind. Dies liefert die Gleichung:

$$(8) \qquad \frac{2}{5}\frac{fM}{R}\varepsilon = \frac{1}{2}\omega^2 R^2,$$

woraus sich ergiebt:

$$\varepsilon = \frac{5}{4}\frac{\omega^2 R^3}{fM}.$$

Führen wir noch die Gravitationsbeschleunigung g an der Oberfläche unserer Flüssigkeitsmasse ein, nämlich $g = fM/R^2$ (näherungsweise), so erhalten wir direkt den oben angegebenen Wert ε_1 aus Gl. (1).

Gl. (1) ist von Clairaut gegeben und bildet eine Grundformel in der Theorie von der Figur der Erde. Sie setzt voraus, dafs die Dichte der Flüssigkeit konstant ist und dafs die Centrifugalwirkung lediglich durch die Gravitation im Gleichgewicht gehalten wird.

Bekanntlich bezeichnet man diejenigen Funktionen von Θ, die in Gl. (4) als Koeffizienten der verschiedenen Potenzen von R/r bei der Entwickelung des reziproken Abstandes zweier Punkte auftreten, als *Kugelfunktionen**). Eine solche Funktion und zwar eine „Kugelfunktion

*) Genauer gesagt als *Kugelflächenfunktionen.* Unter einer *räumlichen Kugelfunktion* versteht man jeden Ausdruck, der homogen in den rechtwinkligen Koordi-

zweiter Ordnung“ ist der obige Ausdruck $\cos^2\Theta - 2/3$. Die vorstehend berechnete Reihe (6) für V stellt, können wir sagen, die Entwickelung des Potentials nach Kugelfunktionen dar. Ferner haben wir in Gl. (7) auch den Ausdruck von U nach Kugelfunktionen geordnet. In der Gleichgewichtsbedingung (8) endlich haben wir die beiden Terme von V und U, welche unsere Kugelfunktion zweiter Ordnung enthalten, mit einander verglichen und gelangten dadurch zur Berechnung der Elliptizität. Wir können diese Gleichgewichtsbedingung schematisch folgendermafsen schreiben, wenn wir mit U_2 und V_2 den betr. Term in der Entwickelung von U und V bezeichnen, wobei wir V_2 für die Elliptizität 1 berechnen und bei der Berechnung von U_2, mit Rücksicht darauf, dafs die Centrifugalkraft eine störende Ursache von kleinem Betrage darstellt, von der Elliptizität überhaupt absehen:

$$(9) \qquad \varepsilon V_2 = U_2, \qquad V_2 = \frac{2}{5}\frac{fM}{R}\left(\cos^2\Theta - \frac{2}{3}\right).$$

Wegen näherer Ausführung der Theorie, insbesondere bei beträchtlichen Werten der Elliptizität, müssen wir auf die Litteratur*) verweisen.

Zweites Problem. Eine homogene elastisch-feste Kugel vom Radius R und der Dichte ϱ wird mit der Winkelgeschwindigkeit ω um einen ihrer Durchmesser gedreht. Sie geht dabei in ein abgeplattetes Umdrehungsellipsoid über, welches die Rotationsaxe zur Symmetrieaxe hat. Das elastische Verhalten des Materials sei dadurch bestimmt, dafs wir den Elastizitätsmodul (E) geben und annehmen, dafs das Material incompressibel sei, dafs also das Poissonsche Verhältnis von Querkontraktion zu Längsdehnung den speziellen Wert 1/2 habe. Die letztere Annahme vereinfacht die Rechnungen und hat auf das Resultat keinen erheblichen Einflufs.

Die Elliptizität des so entstehenden Ellipsoides wird alsdann

$$(10) \qquad \varepsilon_2 = \frac{15}{38}\frac{\varrho\,\omega^2 R^2}{E}.$$

Um auch hier zunächst ein Zahlenbeispiel zu geben, welches sich den Verhältnissen der Erde anschliefst, wählen wir in CGS-Einheiten

$$\varrho = 5{,}5, \qquad \omega = \frac{2\pi}{24\cdot 60\cdot 60}, \qquad R = \frac{2}{\pi}\,10^9$$

---

naten x, y, z ist und der Potentialgleichung $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = 0$ genügt. Aus einer räumlichen Kugelfunktion entsteht eine Kugelflächenfunktion, wenn man in dem Ausdruck der ersteren $x^2 + y^2 + z^2 = \text{const.}$ setzt.

*) H. Lamb, Hydrodynamics, Cambridge 1895, Kap. XII, pag. 580. W. Wien, Hydrodynamik, Leipzig 1900, Kap. VIII, pag. 303. Thomson und Tait, Natural Philosophy II, Cambridge 1895, art. 771, 793 ff. Ausführliche Litteraturangabe bei A. E. H. Love, Encykl. d. math. Wissensch. Bd. IV, Art. 16, Nr. 4.


Hosted by Google

und nehmen E gleich dem Elastizitätsmodul von Stahl, d. h. rund gleich $2{,}2 \cdot 10^6$ (kg Gewicht/cm²) $= 2{,}2 \cdot 981 \cdot 10^9$ CGS-Einheiten. Es wird dann

$$(11) \qquad \frac{\varrho\,\omega^2 R^2}{E} = \frac{1}{184}, \qquad \varepsilon_2 = \frac{1}{465}.$$

Bei der Ableitung der Gl. (10) müssen wir auf die Grundlagen der Elastizitätstheorie zurückgehen.

Sind u, v, w die Verrückungen eines Punktes im Innern der Kugel nach den Koordinatenaxen, welche letztere ebenso wie unter 1) gewählt werden, so gilt zunächst wegen der vorausgesetzten Incompressibilität:

$$(12) \qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Die elastischen Differentialgleichungen nehmen für ein incompressibles, durch Centrifugalwirkungen beanspruchtes Material die Form an:

$$(13) \qquad \begin{cases} \frac{E}{3}\Delta u + \frac{\partial p}{\partial x} + \varrho\frac{\partial U_2}{\partial x} = 0, \\ \frac{E}{3}\Delta v + \frac{\partial p}{\partial y} + \varrho\frac{\partial U_2}{\partial y} = 0, \\ \frac{E}{3}\Delta w + \frac{\partial p}{\partial z} + \varrho\frac{\partial U_2}{\partial z} = 0. \end{cases}$$

Δ bedeutet wie üblich die Abkürzung für den zweiten Differentialparameter, p ist ein von Ort zu Ort wechselnder allseitiger Druck, welcher so zu bestimmen ist, daſs der Bedingung (12) Genüge geleistet wird. U_2 bedeutet den oben definierten mit Θ variabeln Teil des Potentials der Centrifugalkraft (s. Gl. (7)):

$$(7') \qquad U_2 = \frac{1}{2}\omega^2 r^2\left(\cos^2\Theta - \frac{2}{3}\right) = \frac{\omega^2}{6}(x^2 + y^2 - 2z^2).$$

Wie man sieht ist U_2 (vgl. die Anm. zu pag. 691) eine räumliche Kugelfunktion zweiter Ordnung. Von dem in (7) zu U_2 hinzutretenden Terme $\frac{1}{3}\omega^2 r^2$ sehen wir im Folgenden ab, da dieser nur die Gröſse, nicht die Gestalt der Kugel abändern kann und bei einem incompressibeln Material überhaupt ohne Einfluſs ist.

Die Differentialgleichungen (12) und (13) sind noch zu ergänzen durch die Bedingungen dafür, daſs die Kugelfläche eine kräftefreie Oberfläche ist. Sie besagen, daſs die auf jedes Oberflächenelement wirkenden Spannungen nach allen drei Koordinatenrichtungen verschwinden müssen. In den Verrückungen u, v, w geschrieben lautet die Bedingung für die x-Richtung:

$$\left(\frac{2}{3}E\frac{\partial u}{\partial x} + p\right)\cos(n, x) + \frac{E}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\cos(n, y) + \frac{E}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)\cos(n, z) = 0;$$

Hosted by Google

da für die Kugel $\cos(n,x):\cos(n,y):\cos(n,z) = x:y:z$, können wir hierfür schreiben:

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} + x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial v}{\partial x} + z\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{3p}{E}x. \tag{14}$$

Die auf die y- und z-Richtung bezüglichen Bedingungen folgen aus (14) durch cyklische Vertauschung von $(x\,y\,z)$, $(u\,v\,w)$.

Wir behaupten nun, dafs den Gleichungen (12) bis (14) bei geeigneter Wahl der Konstanten α, β, γ durch den folgenden Ansatz genügt wird:

$$\left\{\begin{aligned} u &= \alpha\frac{\partial U_2}{\partial x} + \beta r^2\frac{\partial U_2}{\partial x} + \gamma\frac{\partial}{\partial x}(r^2 U_2),\\ v &= \alpha\frac{\partial U_2}{\partial y} + \beta r^2\frac{\partial U_2}{\partial y} + \gamma\frac{\partial}{\partial y}(r^2 U_2),\\ w &= \alpha\frac{\partial U_2}{\partial z} + \beta r^2\frac{\partial U_2}{\partial z} + \gamma\frac{\partial}{\partial z}(r^2 U_2),\end{aligned}\right. \tag{15}$$

welcher somit die vollständige Lösung des gestellten Problems enthält.

Bei dem folgenden Beweise werden wir des öfteren von den nachstehenden Regeln Gebrauch zu machen haben, welche unmittelbar aus der Definition der Kugelfunktionen und ihrer Homogenität folgen:

$$\Delta U_2 = 0, \qquad \left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}\right)U_2 = 2U_2, \qquad \Delta(r^2 U_2) = 14U_2,$$
$$\Delta\left(r^2\frac{\partial U_2}{\partial x}\right) = 10\frac{\partial U_2}{\partial x} \text{ etc.}$$

Wir tragen den Ansatz (15) zunächst in die Gleichung (12) ein und erhalten:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = (4\beta + 14\gamma)U_2 = 0;$$

hiernach ist

$$\beta = -\frac{7}{2}\gamma \tag{16}$$

zu wählen. Indem wir auf die erste der Gleichungen (13) übergehen, berechnen wir nach (15) und (16):

$$\Delta u = (10\beta + 14\gamma)\frac{\partial U_2}{\partial x} = -21\gamma\frac{\partial U_2}{\partial x}.$$

Es mufs also nach (13) sein:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = (7E\gamma - \varrho)\frac{\partial U_2}{\partial x};$$

entsprechend ergiebt sich

$$\frac{\partial p}{\partial y} = (7E\gamma - \varrho)\frac{\partial U_2}{\partial y}, \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = (7E\gamma - \varrho)\frac{\partial U_2}{\partial z}.$$

Wir schliefsen hieraus, indem wir von der Hinzufügung einer Integrationskonstanten absehen:

$$p = (7E\gamma - \varrho)U_2. \tag{17}$$

Hosted by Google

Schliefslich haben wir die Oberflächenbedingung (14) zu betrachten. Wir bilden zunächst aus (15)

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = \alpha\frac{\partial U_2}{\partial x} + 3\beta r^2\frac{\partial U_2}{\partial x} + 3\gamma r^2\frac{\partial U_2}{\partial x} + 6\gamma x U_2,$$

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial v}{\partial x} + z\frac{\partial w}{\partial x} = \alpha\frac{\partial U_2}{\partial x} + \beta r^2\frac{\partial U_2}{\partial x} + 4\beta x U_2 + 3\gamma r^2\frac{\partial U_2}{\partial x} + 6\gamma x U_2;$$

Gl. (14) verlangt also mit Rücksicht auf (17):

$$(2\alpha + 4\beta r^2 + 6\gamma r^2)\frac{\partial U_2}{\partial x} + (4\beta + 12\gamma)\, x U_2 = -3\left(7\gamma - \frac{\varrho}{E}\right) x U_2.$$

Wir tragen für β den Wert aus (16) ein und schreiben, indem wir die auf die y- und z-Richtung bezüglichen Gleichungen hinzufügen:

$$(2\alpha - 8\gamma r^2)\frac{\partial U_2}{\partial x} + \left(19\gamma - \frac{3\varrho}{E}\right) x U_2 = 0,$$

$$(2\alpha - 8\gamma r^2)\frac{\partial U_2}{\partial y} + \left(19\gamma - \frac{3\varrho}{E}\right) y U_2 = 0,$$

$$(2\alpha - 8\gamma r^2)\frac{\partial U_2}{\partial z} + \left(19\gamma - \frac{3\varrho}{E}\right) z U_2 = 0.$$

Wird nunmehr der Ausdruck (7′) für U_2 eingeführt, so werden die beiden ersten Gleichungen nach Forthebung je eines gemeinsamen Faktors unter sich identisch. Unser Gleichungstripel reduziert sich daher auf das folgende Gleichungspaar:

$$2(2\alpha - 8\gamma r^2) + \left(19\gamma - \frac{3\varrho}{E}\right)(x^2 + y^2 - 2z^2) = 0,$$

$$-4(2\alpha - 8\gamma r^2) + \left(19\gamma - \frac{3\varrho}{E}\right)(x^2 + y^2 - 2z^2) = 0,$$

welches in allen Punkten der Kugeloberfläche $r = R$ erfüllt sein soll. Es ist dieses nur möglich, wenn

(18) $$2\alpha - 8\gamma R^2 = 0, \quad 19\gamma - \frac{3\varrho}{E} = 0.$$

Durch diese Gleichungen zusammen mit Gl. (16) sind die erforderlichen Werte unserer Koeffizienten α, β, γ bestimmt; sie lauten:

(19) $$\gamma = \frac{3}{19}\frac{\varrho}{E}, \quad \beta = -\frac{21}{38}\frac{\varrho}{E}, \quad \alpha = \frac{12}{19}\frac{\varrho}{E}R^2.$$

Gleichzeitig ist durch diese Bestimmung der Beweis für die Richtigkeit des Ansatzes (15) erbracht.

Es ist nun leicht, die Elliptizität des durch die Deformation entstehenden Ellipsoides zu berechnen. Wir bilden zu dem Zwecke den Ausdruck für die radiale Verrückung eines Punktes an der Oberfläche der Kugel, nämlich

$$\delta R = \frac{1}{R}(ux + vy + wz).$$

Hosted by Google

Nach (15) wird:

$$\delta R = \left(\frac{2\alpha}{R} + 2\beta R + 4\gamma R\right) U_2,$$

also wegen (19):

$$\delta R = \frac{15}{19} \frac{\varrho}{E} R U_2. \tag{20}$$

Andrerseits wird diese selbe Verrückung, wenn wir sie aus der Ellipsoidgleichung (5) berechnen:

$$\delta R = r - R = R\varepsilon \left(\cos^2 \Theta - \frac{2}{3}\right). \tag{21}$$

Durch Vergleich von (20) und (21) folgt, wenn wir den Oberflächenwert von U_2 aus Gl. (7′) entnehmen, in der That der in (10) angegebene Wert $\varepsilon = \varepsilon_2$.

Wir wollen noch das Resultat der Vergleichung von (20) und (21) in der folgenden Form darstellen, die uns demnächst von Nutzen sein wird:

$$\varepsilon W_2 = U_2, \quad W_2 = \frac{19}{15} \frac{E}{\varrho} \left(\cos^2 \Theta - \frac{2}{3}\right). \tag{22}$$

W_2 bedeutet eine Kugelflächenfunktion, durch welche das elastische Verhalten unserer Kugel charakterisiert wird. Gl. (22) kann ähnlich wie Gl. (9) als Gleichgewichtsbedingung angesprochen werden, da sie uns angiebt, bei welcher Abplattung die Centrifugalkräfte durch die elastischen Kräfte an der Oberfläche gerade aufgehoben werden.

Die vorstehenden Resultate sind unter allgemeineren Voraussetzungen von Lord Kelvin*) abgeleitet worden. Lord Kelvin betrachtet statt eines incompressibeln einen *beliebigen* elastischen Körper und statt der besonderen Kugelfunktion U_2 eine Störungsfunktion U_n von der Ordnung n; auch berücksichtigt er die bei der Erde nachweisbare Zunahme der Dichte nach dem Erdmittelpunkte hin. Durch Voranstellen der einfachsten Annahmen gelang es uns, die Kelvinschen Rechnungen bedeutend zu kürzen.

Drittes Problem. Wir betrachten abermals eine Kugel aus elastischfestem Material, die in der Umdrehung ω begriffen ist, berücksichtigen aber außer dem elastischen den von der gegenseitigen Gravitation ihrer Teile herrührenden Widerstand gegen Formänderungen. Bei gleichem elastischen Verhalten wie im vorhergehenden Falle muſs die Elliptizität jetzt kleiner ausfallen, weil der Widerstand gegen die Abänderung der Kugelgestalt vergröſsert ist. *Wir behaupten, daſs sich nunmehr die Elliptizität aus der Formel berechnet***):

---

*) Thomson und Tait, Natural Philosophy, Part II, namentlich art. 834. Sir W. Thomson, Mathem. and Phys. Papers, Vol. III, art. 45. Vgl. auch A. E. H. Love, Elasticity, Cambridge 1892, Chap. X.

**) Thomson und Tait, Natural Philosophy, art. 840.

Hosted by Google

(23) $$\frac{1}{\varepsilon_3} = \frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2},$$

wo ε_1 und ε_2 durch Gl. (1) und (10) bestimmt sind.

Der Beweis ist in den Gl. (9) und (22) enthalten. Wenn allein die Gravitation oder allein die Elastizität den Centrifugalkräften entgegenwirkt, fanden wir:

(24) $$\varepsilon_1 V_2 = U_2 \quad \text{bez.} \quad \varepsilon_2 W_2 = U_2.$$

Wenn beide Widerstände zusammen das Gleichgewicht gegenüber den Centrifugalkräften herstellen, lautet die Gleichgewichtsbedingung, unter ε_3 die nunmehrige Elliptizität verstanden:

$$\varepsilon_3 V_2 + \varepsilon_3 W_2 = U_2.$$

Dividieren wir diese Gleichung durch $\varepsilon_3 U_2$ und drücken wir die Verhältnisse V_2/U_2, W_2/U_2 nach (24) durch ε_1 und ε_2 aus, so ergiebt sich genau die zu beweisende Gleichung (23).

Für eine Versuchskugel von mäſsigen Dimensionen ist ε_1 auſserordentlich groſs gegen ε_2. Aus (1) und (10) ergiebt sich nämlich

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{19}{6} \frac{E}{\varrho R g}.$$

Die Gröſse g, welche die auf der Oberfläche unserer Versuchskugel statthabende, durch deren Gravitation bewirkte Fallbeschleunigung bedeutet, ist um so viel kleiner als die Fallbeschleunigung auf der Erde, wie der Radius der Kugel kleiner ist als der Erdradius, (gleiche mittlere Dichte von Kugel und Erde vorausgesetzt). Aus dieser Kleinheit von g sowie aus der Gröſse von E folgt, daſs ε_2 gegen ε_1, also $1/\varepsilon_1$ gegen $1/\varepsilon_2$ vernachlässigt werden kann. Gl. (23) besagt in diesem Falle $\varepsilon_3 = \varepsilon_2$, d. h. unter Laboratoriumsverhältnissen könnte man bei der fraglichen centrifugalen Deformation von dem Einfluſs der Gravitation kurzweg absehen. Mit Vergröſserung der Dimensionen der Kugel nimmt aber $\varepsilon_1/\varepsilon_2$ quadratisch ab; bei einer Kugel von der Gröſse der Erde und der Elastizität des Stahles ist dementsprechend $1/\varepsilon_1 = 231$ gegen $1/\varepsilon_2 = 465$ nicht mehr zu vernachlässigen. Die Elliptizität einer solchen Kugel wäre daher nach (23) zu berechnen und würde rund $1/700$ betragen, also wesentlich kleiner sein, wie wenn die Elastizität allein der Centrifugalwirkung entgegenarbeiten würde.

Man muſs aber nicht glauben, daſs die beobachtbare Elliptizität der Erde in dem hier erörterten Sinne durch die gemeinsame Wirkung von Gravitation und Elastizität bestimmt würde, so daſs ihre Berechnung unter Zugrundelegung eines geeigneten Elastizitätsgrades E nach der Formel (23) zu erfolgen hätte. Wir müssen uns vielmehr vorstellen, daſs die Erde einst, so wie die Sonne jetzt, in

Hosted by Google

feurig-flüssigem Zustande war. In diesem Zustande konnte nur die Gravitation der Centrifugalwirkung das Gleichgewicht halten. Die Elliptizität mufste also $\varepsilon_1 = 5\omega^2 R/4g$ betragen. Bei allmählicher Abkühlung der Erdmasse trat alsdann Erstarrung ein und zwar nach der Schilderung, die Lord Kelvin von diesem Vorgange entwirft, durch einen verhältnismäfsig raschen Prozefs. Die Elliptizität der nunmehr festen Erdform stimmte dabei, darf man annehmen, im Wesentlichen mit der der früheren Flüssigkeitsform überein. In dieser Form ist die Erde, bei gleichbleibender Rotation ω, *spannungsfrei*. Die Erde befindet sich in dieser abgeplatteten Form in ihrem natürlichen Zustande; elastische Kräfte treten nur auf, sofern durch Abänderung der Rotationsverhältnisse oder durch anderweitige Kräfte eine Abänderung dieser ursprünglichen Form angestrebt wird, wobei die elastischen Kräfte in dem Sinne wirken werden, dafs sie jene spannungsfreie Form wiederherzustellen suchen.

Es folgt hieraus, dafs man aus der heutzutage beobachtbaren Elliptizität über die elastischen Eigenschaften des Erdkörpers unmittelbar nichts entnehmen kann. Die Sache liegt hier anders wie bei der oben erwähnten Versuchskugel, deren natürlicher Zustand bei nicht vorhandener Rotation die Kugelform sein sollte, bei der also elastische Widerstände auftreten, wenn durch die Centrifugalwirkung diese Kugelform abgeändert wird. Infolgedessen wird sich in der Gestalt der rotierenden Versuchskugel der Einflufs der elastischen Kräfte und zwar bei mäfsigen Dimensionen, wie wir sahen, in vorherrschender Weise ausprägen; dagegen legt die thatsächliche Gestalt der Erde bei normaler Rotationsgeschwindigkeit ω nur von der Gravitationswirkung Zeugnis ab.

Viertes Problem. Indem wir uns den bei der Erde vorliegenden Verhältnissen um einen weiteren Schritt nähern, gehen wir jetzt von einem in der Umdrehung ω begriffenen abgeplatteten Ellipsoid von der Elliptizität ε_1 aus, welches aus gravitierendem, elastischen Material besteht und sich in dieser Form und Bewegung im spannungsfreien Gleichgewicht befindet. Wir fragen, welche Elliptizität ε es annehmen würde, *wenn die Rotation aufhört.* Diese Elliptizität wird jedenfalls kleiner sein als ε_1; dabei wird die Gravitation die Verkleinerung der Elliptizität begünstigen, die Elastizität ihr widerstehen.

Wir behaupten, dafs sich die gesuchte Elliptizität ε mittels der früher (Gl. (1) und (9)) *berechneten Elliptizitäten ε_1 und ε_2 folgendermafsen ausdrückt:*

(25) $$\varepsilon = \frac{\varepsilon_1^{\,2}}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}.$$



Daneben merken wir noch den Unterschied der Elliptizitäten in dem spannungsfreien Zustande bei der Rotation ω und dem Zustande nach Aufhören der Rotation an. Dieser Unterschied heifse ε'; er beträgt nach (25)

$$\varepsilon' = \varepsilon_1 - \varepsilon = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}. \tag{26}$$

Den Beweis führen wir auf doppelte Art:

a) In dem natürlichen Zustande des Ellipsoides (Rotation ω, Elliptizität ε_1) herrscht Gleichgewicht zwischen Centrifugalkräften und Gravitation. Nach (9) gilt daher für diesen Zustand:

$$\varepsilon_1 V_2 = U_2.$$

In dem deformierten Zustande (Rotation 0, Elliptizität ε) haben wir dagegen Gleichgewicht zwischen Gravitation und Elastizität. Da die elastischen Kräfte nach dem spannungsfreien Zustande (Elliptizität ε_1) hinstreben, ist die elastische Wirkung jetzt zu messen durch den Unterschied ε' der Elliptizitäten und wird gegeben durch $\varepsilon' W_2$. Das Gleichgewicht zwischen Gravitation und Elastizität erfordert

$$\varepsilon V_2 = \varepsilon' W_2 \quad \text{oder} \quad \varepsilon V_2 = (\varepsilon_1 - \varepsilon) W_2.$$

Wir dividieren diese Gleichung durch U_2 und setzen nach (9) und (22) $V_2/U_2 = 1/\varepsilon_1$, $W_2/U_2 = 1/\varepsilon_2$. Dann ergiebt sich

$$\varepsilon\left(\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2}\right) = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}, \tag{27}$$

was mit Gl. (25) übereinstimmt.

Indem wir direkt an die oben gefundene Lösung unseres dritten Problems anknüpfen, können wir auch folgendermafsen schliefsen:

b) In dem spannungsfreien Zustande ε_1 des rotierenden Ellipsoids denken wir uns die Centrifugalkräfte gegen die Gravitationswirkungen gestrichen. Um zu dem rotationslosen Zustand ε überzugehen, haben wir die Centrifugalkräfte im umgekehrten Sinne (also centripetal), sowie den Unterschied der Gravitationskräfte gegen jenen früheren Zustand im umgekehrten Sinne (oder centrifugal) an unserem Ellipsoide anzubringen. In dem gleichen (centrifugalen) Sinne wirken die elastischen Kräfte, die ja den Zustand ε_1 herzustellen streben. Mithin wirken bei dem Übergange von dem Zustande ε_1 zum Zustande ε, d. h. bei der Elliptizitätsänderung ε', die elastischen Kräfte und die Unterschiede der Gravitationskräfte zusammengenommen den dem Sinne nach umgekehrten Centrifugalkräften entgegen. Die so entstehende Änderung ε' der Elliptizität kann daher unmittelbar nach Gl. (23) berechnet werden; wir erhalten:



(28) $$\frac{1}{\varepsilon'} = \frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2},$$

was mit (26) übereinstimmt. —

Nach Erledigung dieser vier vorbereitenden Probleme gehen wir nun auf den eigentlichen Gegenstand dieses §, die *Erklärung der Chandlerschen Periode,* ein. Dabei erinnern wir uns der Resultate aus Kap. VII, § 8, betreffend die Nutationsperiode*) eines Kreisels von deformierbarem Material und nahezu kugelförmiger Gestalt. Wir sahen pag. 607, daſs diese sich aus der „ursprünglichen" Elliptizität ε, die der Kreisel im Ruhezustande bei der Rotation Null haben würde, und nicht aus derjenigen Elliptizität berechnet, die das in Rotation begriffene Sphäroid aufweist und die wir $\mathsf{E} = \varepsilon + \varepsilon'$ nannten. Die Formel lautete (vgl. Gl. (12) von pag. 607):

(29) $$\frac{\text{Nutationsperiode}}{\text{Umdrehungsdauer}} = \frac{1}{\varepsilon}.$$

Im Falle der Erde ist die Umdrehungsdauer gleich einem Tage, ε bedeutet diejenige Elliptizität, die die Erde bei der Rotation Null annehmen würde, ist also nach Gl. (25) zu berechnen. Die Elliptizität E des rotierenden Kreisels ist im Falle der Erde mit ε_1 zu identifizieren; die Differenz beider Elliptizitäten wurde im Vorstehenden sowohl wie früher mit ε' bezeichnet. Dabei besteht der Unterschied, daſs wir uns früher diese zusätzliche Elliptizität ε' allein durch die elastischen Eigenschaften des Kreisels bedingt dachten, während sie bei der Erde im Sinne der Gleichung (28) aus den elastischen und Gravitationswirkungen zusammen hervorgeht. Die Anwendbarkeit unserer früheren Überlegungen wird dadurch nicht beeinträchtigt; denn es wurde bei jenen lediglich das Vorhandensein einer Deformation überhaupt, nicht die Umstände, unter denen dieselbe zustande kam, in Rechnung gesetzt. Ebensowenig macht es für die mechanische Betrachtung etwas aus, daſs wir früher den Kreisel im rotationslosen Zustande ε als spannungsfrei, im Zustande $\varepsilon + \varepsilon'$ dagegen als elastisch beansprucht ansahen, während umgekehrt die Erde im Zustande $\varepsilon_1 = \varepsilon + \varepsilon'$ spannungsfrei ist und in dem daraus abgeleiteten, gedachten, rotationslosen Zustand ε von elastischen Spannungen ergriffen ist, in solchem Maſse, daſs sie vielleicht unter dem Einfluſs dieser Spannungen zerbersten würde. Denn es kann uns für die Bestimmung der Bewegung eines Körpers gleichgültig sein, ob an dem Körper ein Kraftsystem hinzugefügt oder fortgenommen wird, vorausgesetzt, daſs sich dasselbe am Körper das Gleichgewicht hält.

*) Wegen der Benennung (freie Nutation = kräftefreie Präcession) vgl. den Anfang von § 8, p. 599 unten.


Hosted by Google

Nach Gleichung (29) und (25) wird nun die Periode der freien Nutation der Erde, in Tagen ausgedrückt, gleich

$$\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\varepsilon_1^{\,2}} = \frac{1}{\varepsilon_1}\left(1 + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right). \tag{30}$$

Wäre das Material der Erde absolut starr (ihr Elastizitätsmodul unendlich grofs, also $\varepsilon_2 = 0$), so wäre die Nutationsperiode aus der Elliptizität der *rotierenden* Erde zu berechnen und gleich $1/\varepsilon_1$. Ist aber die Erde elastisch nachgiebig (Elastizitätsmodul endlich, $\varepsilon_2 > 0$), so kommt es auf die Elliptizität der *rotationslos gedachten* Erde an und es tritt zu $1/\varepsilon_1$ ein Zusatzglied hinzu. *Die elastische Nachgiebigkeit der Erde verlängert also die Periode der freien Nutation,* und zwar in dem Verhältnis $1 + \varepsilon_2/\varepsilon_1 : 1$. Legen wir beispielsweise der Erde den Elastizitätsmodul des Stahles bei, so ergiebt sich für dieses Vergröfserungsverhältnis:

$$1 + \frac{231}{465} = 1{,}5.$$

Setzen wir die Nutationsperiode der absolut starren Erde (Eulersche Periode) gleich 10 Monaten, so folgt als Nutationsperiode einer Erde von der Elastizität des Stahles die Zeitdauer von 15 Monaten. Da andererseits die Beobachtung eine Nutationsperiode von 14 Monaten (Chandlersche Periode), also gegenüber der Eulerschen ein Vergröfserungsverhältnis von 1,4 ergeben hat, so schliefsen wir, dafs für das Material der Erde

$$1 + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = 1{,}4$$

gelte. Hieraus können wir den effektiven Elastizitätsgrad der Erde entnehmen. Es ergiebt sich

$$\varepsilon_2 = 0{,}4\,\varepsilon_1 = \frac{0{,}4}{231} = \frac{1}{578}.$$

Nach Gl. (10) ist die Gröfse ε_2 dem Elastizitätsmodul des betr. Materials umgekehrt proportional und nach Gl. (11) gilt für Stahl $\varepsilon_2 = 1/465$. Mithin berechnet sich der Elastizitätsmodul der Erde gleich dem 578/465-fachen, d. h. gleich dem 1,24-fachen des Elastizitätsmoduls von Stahl. *Wir brauchen also der Erde nur einen sehr geringen Grad von elastischer Nachgiebigkeit zuzuschreiben, um die Verlängerung der Eulerschen in die Chandlersche Periode auf diesem Wege zu erklären: Die Erde mufs ihrem durchschnittlichen elastischen Verhalten nach noch etwas weniger nachgiebig sein als Stahl, oder einen noch etwas höheren Elastizitätsmodul besitzen wie dieser.*

Bei dieser Schlufsweise bedarf noch ein Punkt der Erläuterung. Der angegebene Wert (30) für die Nutationsdauer der Erdaxe ergiebt unter der Annahme der Starrheit ($\varepsilon_2 = 0$) die Periode $1/\varepsilon_1 = 231$ Tage.

Hosted by Google

Diese Periode ist von der Eulerschen verschieden und beträgt noch nicht 8 Monate. Der Grund dieser Verschiedenheit liegt natürlich darin, daſs die wirkliche Elliptizität der Erde von derjenigen verschieden ist, die wir unter der Annahme homogener Massenverteilung auf hydrodynamischem Wege berechnet haben. Im Vorstehenden haben wir uns offenbar eine gewisse Inkonsequenz zu Schulden kommen lassen, indem wir das Vergröſserungsverhältnis $1 + \varepsilon_2/\varepsilon_1$ aus der *theoretischen Formel* (30) bestimmten, dagegen die Nutationsperiode bei starrem Verhalten der Erde gleich der Eulerschen Periode setzten, welche mittelbar aus den astronomischen *Beobachtungen* über die Präcession der Erde entnommen wird. Diese Inkonsequenz läſst sich nachträglich folgendermaſsen rechtfertigen.

Der theoretische Wert $\varepsilon_1 = 1/231$ nimmt auf die Ungleichförmigkeit der Massenverteilung im Innern der Erde keine Rücksicht und stellt nur eine *obere Grenze* für die Elliptizität der Erde dar, deren mittlere Dichte erfahrungsgemäſs viel gröſser ist als ihre Oberflächendichte. Thatsächlich ist denn auch die wirkliche Elliptizität der Erde (1/304 nach den astronomischen Beobachtungen, vgl. pag. 663) oder die wirkliche Abplattung (1/298 nach den geodätischen Messungen) kleiner als der für homogene Massenverteilung berechnete Wert 1/231. Auch ist es klar, daſs bei inhomogener Massenverteilung der Begriff der Elliptizität selbst insofern unbestimmt wird, als die beiden pag. 689 genannten Definitionen alsdann zu verschiedenen Zahlenwerten führen müssen. Die eine im Text gegebene Definition könnten wir als *Massen-Elliptizität*, die andere in der Anmerkung gegebene zum Unterschiede davon als *Abplattung* oder als *Oberflächen-Elliptizität* bezeichnen. Zahlreiche Untersuchungen von Radau, Callandreau, Poincaré und älteren Forschern beschäftigen sich mit der Frage, wie das (als stetig vorausgesetzte) Gesetz der Dichtigkeitszunahme nach dem Erdinnern beschaffen sein muſs, damit es mit der erfahrungsmäſsigen Massen- und Oberflächenelliptizität, sowie mit der erfahrungsmäſsigen mittleren Erddichte verträglich wird. Wir verweisen dieserhalb auf die zusammenfassende Darstellung von Tisserand*), dessen Bericht indessen hinzuzufügen ist, daſs neuerdings E. Wiechert**) die sämtlichen einschlägigen astronomischen, geodätischen und physikalischen Daten zu einer bemerkenswerten Theorie des Erdinneren zu-

---

*) Tisserand, Mécanique céleste, t. 2, chap. XIV, insbesondere art. 110—112.

**) E. Wiechert, Die Massenverteilung im Innern der Erde, Göttinger Nachrichten 1897, pag. 221. Vgl. auch G. H. Darwin, Monthly Notices of the R. Astr. Soc. London. Vol. 60 (1899) Nr. 2. Die Ergebnisse von Wiechert und Darwin werden verglichen von F. R. Helmert, Sitzungsberichte der Akademie d. Wiss. Berlin 1901, p. 328.

Hosted by Google

sammengearbeitet hat, auf welche bereits wiederholt Bezug genommen wurde. In dieser Theorie wird die Erddichte als sprungweise veränderlich angesetzt, die Erde nämlich als aus einem dichteren Metallkern und einem weniger dichten Gesteinsmantel bestehend angenommen, welche von einander durch eine zähflüssige Zwischenschicht getrennt werden. Die Gröfsen- und Massenverhältnisse von Kern und Mantel lassen sich dabei so bestimmen, dafs sowohl die Massen- wie die Oberflächenelliptizität richtig herauskommen und dafs die Oberfläche des Mantels genau und die Oberfläche des Kernes nahezu dem spannungsfreien hydrodynamischen Gleichgewicht entspricht. Wir erwähnen diese Arbeiten hier, um begreiflich zu machen, dafs durch geeignete Annahmen über die Massenverteilung der theoretische Grenzwert $1/231$ thatsächlich in den beobachteten Wert der Massenelliptizität $1/304$ sowie in den beobachteten Wert der Abplattung übergeführt werden kann, dafs sich also insbesondere die Massenelliptizität wegen der Inhomogenität der Erde im Verhältnis $231/304$ verkleinert. In dem umgekehrten Verhältnis mufs sich dann die der starren Konstitution entsprechende Nutationsperiode, die ja der Massenelliptizität umgekehrt proportional war, vergröfsern und es liegt nahe anzunehmen, dafs sich in eben diesem Verhältnis auch die der wirklichen elastischen Konstitution entsprechende Nutationsperiode gegenüber demjenigen Wert, den sie bei homogener Massenverteilung theoretisch haben würde, vergröfsert. Diese Annahme lag unserer obigen Erklärung der Chandlerschen Periode stillschweigend zu Grunde, bei der wir nicht von der für homogene Massenverteilung gültigen Nutationsperiode $1/\varepsilon_1 = 231$, sondern von der wegen der Inhomogenität gröfseren Eulerschen Periode von 304 Tagen ausgingen, die wir alsdann wegen der Elastizität der Erde mit dem aus den theoretischen Werten von ε_1 und ε_2 berechneten Vergröfserungsverhältnis $1 + \varepsilon_2/\varepsilon_1$ multiplizierten. Auch in der oben zitierten Arbeit von Hough wird mangels anderweitiger sicherer Unterlagen die gleiche Annahme gemacht.

Dabei soll nicht geleugnet werden, dafs unsere Resultate sich ursprünglich auf ein homogenes Ellipsoid bezogen und dafs ihre Übertragung auf die inhomogene Erde notwendig mit einiger Unsicherheit verbunden ist.

Diese Unsicherheit betrifft aber nur die quantitativen Angaben, nicht die qualitativen. Es ist wohl möglich, dafs man bei Berücksichtigung der inhomogenen Dichtigkeitsverteilung im Erdinnern für den durchschnittlichen Elastizitätsmodul der Erde einen etwas anderen Zahlenwert finden möchte, als den oben angegebenen. Dagegen bleibt das allgemeine Resultat, dafs die Periode der freien Nutation durch

Hosted by Google

die Elastizität der Erde verlängert wird und daſs für einen gewissen Grad der Nachgiebigkeit die Eulersche in die Chandlersche Periode übergeht, bei einem beliebigen Gesetz der Massenverteilung und bei beliebiger Struktur des Erdinneren zuversichtlich bestehen.

Zum vollen Verständnis der Polschwankungen (oder genauer gesagt, des 14-monatlichen Bestandteils derselben) wird es beitragen, wenn wir schlieſslich noch die im vorigen Kapitel, § 8, gegebene allgemeine Schilderung der Bewegung eines deformierbaren Kreisels auf die Verhältnisse der Erde übertragen.

Bei normaler Lage der Rotationsaxe, wo dieselbe mit der polaren Hauptträgheitsaxe zusammenfällt, rotiert die Erde gleichförmig um diese Axe mit der Abplattung 1/298. Der Unterschied des äquatorialen und des polaren Erdradius beträgt dabei $R/298$, wo R den mittleren Erdradius bedeutet, oder rund 21 km. Jetzt werde die Rotationsaxe durch irgend welche Umstände abgelenkt. Die Elliptizität der Erde bleibt dabei dieselbe (vgl. pag. 603), nicht aber die Lage der Hauptträgheitsaxen (vgl. Fig. 90 auf pag. 602). Die Erdmasse weicht nämlich bei festgehaltener Form des Erdellipsoides nach der Seite der abgelenkten Rotationsaxe hin aus. Dabei stellt sie sich aber nicht symmetrisch um die Rotationsaxe selbst ein, sondern um eine Axe, die augenblickliche Hauptträgheitsaxe, die zwischen der ursprünglichen Hauptträgheitsaxe und der augenblicklichen Rotationsaxe liegt. Und zwar teilt diese Axe den Winkel (δ in Fig. 90) zwischen der ursprünglichen Hauptträgheitsaxe und der augenblicklichen Rotationsaxe nach Gl. (6) von pag. 603 im Verhältnis $\varepsilon'/(\varepsilon+\varepsilon')$. Da $\varepsilon' = \varepsilon_1 - \varepsilon$ war, kann das genannte Verhältnis auch geschrieben werden: $1 - \varepsilon/\varepsilon_1$. Nun bestimmte $1/\varepsilon$ die Dauer der Chandlerschen, $1/\varepsilon_1$ die der Eulerschen Periode. Mithin wird

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} = \frac{10}{14} \quad \text{und} \quad 1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} = \frac{2}{7}.$$

Ist e die Ablenkung des augenblicklichen Rotationspoles auf der Erdoberfläche, so ist die Ablenkung des augenblicklichen Trägheitspoles $2e/7$. Aus den Beobachtungen entnahmen wir pag. 677, daſs e im Mittel 4 m beträgt; die Ablenkung des Hauptträgheitspoles wird daher nur 1,1 m. Würde der augenblickliche Rotationspol einfach einen Kreis vom Radius 4 m in 14 Monaten um den ursprünglichen Hauptträgheitspol, den geometrischen Pol, beschreiben, so müſste der augenblickliche Trägheitspol in derselben Zeit und im gleichen Umlaufssinne einen Kreis vom Radius 1,1 m um denselben Mittelpunkt durchlaufen.

Die Verrückung, die ein Punkt der Erdoberfläche hierbei erfährt, und die zum Teil in einer Hebung zum Teil in einer Senkung bestehen



wird, ist äufserst gering. Wir können sie aus Gl. (3) und (5) von pag. 601 und 602 unmittelbar entnehmen. In Gl. (3) bedeutet r denjenigen Abstand, den ein Punkt auf der Oberfläche des Sphäroides vom Mittelpunkte desselben bei der normalen Umdrehung ω um die ursprüngliche Hauptträgheitsaxe hat; Gl. (5) giebt denselben Abstand bei abgelenkter Rotationsaxe. Die Differenz beider stellt die Verrückung des Punktes infolge der Deformation des Sphäroides dar; sie beträgt, wenn wir den früher mit m bezeichneten Radius durch den mittleren Erdradius ersetzen und die Winkelablenkung δ als kleine Gröfse behandeln:

$$(3) - (5) = R\varepsilon'(\cos^2\Theta - \cos^2(\Theta + \delta)) = R\varepsilon'\delta \sin 2\Theta.$$

In Fig. 90, pag. 602 wird diese Gröfse durch die Dicke desjenigen Streifens dargestellt, welchen die Umrifsellipse in der deformierten, um ϑ verdrehten Lage von der ursprünglichen Umrifsellipse abschneidet. Die gröfste Verrückung findet nach Fig. 90 und der vorangehenden Formel für $\Theta = 45^0$ statt, wo $\sin 2\Theta = 1$ wird. Für diese Breite können wir, indem wir noch $R\delta$, die auf der Erdoberfläche gemessene Ablenkung des Rotationspols, mit e bezeichnen, die Verrückung darstellen durch

$$\varepsilon' e = (\varepsilon_1 - \varepsilon)\, e = \varepsilon_1 \left(1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}\right) e = \frac{1}{304}\left(1 - \frac{10}{14}\right) e < e \cdot 10^{-3}.$$

Da e nur 4 m betrug, so wird die gröfste Verrückung eines Punktes an der Erdoberfläche kleiner als 4 mm.

Mit der Kleinheit dieser Verrückung hängt auch die Geringfügigkeit der Lotschwankung zusammen, die durch die Deformation der Erde hervorgerufen wird. Wir bestimmen einerseits nach Gl. (3), andrerseits nach Gl. (5) von pag. 601 und 602 den Winkel, welchen die Normale an das Erdellipsoid mit der Verbindungslinie des fraglichen Ortes nach dem Mittelpunkte der Erdfigur hin bildet. Dieser Winkel ist (bei Vertauschung von Winkel und Tangente):

$$\frac{1}{r}\frac{dr}{d\Theta}$$

und wird in erster Näherung

$$\text{nach (3)} \cdots -(\varepsilon + \varepsilon')\sin 2\Theta,$$
$$\text{nach (5)} \quad -\varepsilon \sin 2\Theta - \varepsilon' \sin 2(\Theta + \delta).$$

Der Unterschied beider Winkel, welcher gleich der Richtungsänderung der Lotlinie ist, ergiebt sich daher zu

$$\varepsilon'(\sin 2(\Theta + \delta) - \sin 2\Theta) = 2\varepsilon'\delta \cos 2\Theta.$$

Die gröfste Lotschwankung findet hiernach in Übereinstimmung mit Fig. 90 für $\Theta = 0$ und $\pi/2$, d. h. an den Polen und am Äquator statt und beträgt

$$\pm 2\varepsilon'\delta.$$



Da soeben $\varepsilon' < 10^{-3}$ gefunden wurde, so wird die gröſste Lotschwankung kleiner als der 500te Teil der Ablenkung der Rotationsaxe. Da letztere nach Fig. 104 von pag. 676 kleiner als $0'',3$ war, so wird die Lotablenkung jedenfalls kleiner als $0'',0006$, eine Gröſse, die der Beobachtung unter keinen Umständen zugänglich sein dürfte. —

Endlich möge noch auf den Einfluſs hingewiesen werden, den das Wasser der Ozeane auf die Länge der Nutationsdauer möglicherweise ausüben kann. Wäre die Erdoberfläche völlig mit Wasser bedeckt, so würde sich dieses, da es dem Einfluſs der Centrifugalkräfte frei zu folgen vermag, symmetrisch rings um die augenblickliche Rotationsaxe einstellen. Wir hätten dann im Anschluſs an Fig. 90 zu unterscheiden: die Oberfläche der Flüssigkeit, welche bei einer Ablenkung der Rotationsaxe um den vollen Winkel δ gegen ihre ursprüngliche Lage verdreht wird, und die Oberfläche des festen Erdkernes, welche nur um den pag. 603 bestimmten Bruchteil von δ nach der Seite der Rotationsaxe verschoben wird. Die ausgiebigere Ablenkung der Flüssigkeitsoberfläche würde die Dauer der freien Nutation ihrerseits verlängern; es würde daher ein Teil der Abweichung zwischen der Chandlerschen und der Eulerschen Periode durch das Verhalten der Flüssigkeitsbedeckung erklärt werden müssen und nur der Rest auf die Elastizität der Erde kommen. Die Nachgiebigkeit der Erde würde sich auf diese Weise noch kleiner oder ihr durchschnittlicher Elastizitätsmodul noch gröſser ergeben, als er oben gefunden wurde, wo wir jene ganze Abweichung auf Rechnung der Elastizität der Erde setzten. In Wirklichkeit wird nun aber die Erdoberfläche nicht vollständig, sondern nur etwa zu $^2/_3$ von Wasser bedeckt und die Beweglichkeit des Wassers wird in komplizierter Weise durch die Form der Kontinente beschränkt. Deshalb dürfte es kaum thunlich sein, den Einfluſs der Ozeane auf die Nutationsperiode der Erdaxe a priori einwandsfrei abzuschätzen. Vielmehr wird man abwarten müssen, bis ein reichlicheres Beobachtungsmaterial über die den Polschwankungen entsprechenden Wasserbewegungen vorliegt. Bereits auf pag. 684 wurde auf die Flutwellen von 14-monatlicher Periode hingewiesen; wenn die Existenz derselben sicher festgestellt und ihre Gröſse ungefähr bestimmt ist, wird die Aufgabe entstehen, auch den Einfluſs dieser Fluten auf das Problem der freien Nutationen der Erdaxe anzugeben.

§ 8. Die Polschwankungen von jährlicher Periode. Massentransporte und Flutreibung.

Mit der Erklärung der Chandlerschen Periode ist nur eine Seite des Problems der Polschwankungen erledigt. Es wäre weiter zu be-

Hosted by Google

gründen, warum neben jener eine jährliche Periode, die wir aus den Fig. 105a und b von pag. 680, 681 herauslasen, auftritt und warum auch nach Abzug der Schwankungen dieser Periode ein Restbetrag übrig bleibt (Fig. 106 von pag. 683) von scheinbar gesetzlosen, zufälligen Störungen. Überhaupt verdient die Frage alle Beachtung, weshalb die freien Nutationen der Erdaxe so kompliziert und teilweise regellos ausfallen, während doch die erzwungenen Nutationen (vgl. § 3 dieses Kapitels) sich streng gültigen mathematischen Gesetzen fügen.

Der Grund hiervon scheint darin zu liegen, daſs die Erde im Sinne des vorigen § zwar *effektiv fest*, aber nicht *wirklich fest* ist, daſs sich vielmehr ihre Teile bis zu einem gewissen Grade gegeneinander verschieben können. Insbesondere legt das Vorhandensein der jährlichen Periode die Annahme nahe, daſs solche Verschiebungen oder „Massentransporte“ durch die Sonnenwärme bedingt werden, also meteorologischen Ursprungs sein mögen. Man hat verschiedene meteorologische Einflüsse zur Erklärung der jährlichen Polschwankungen herangezogen, so den jährlichen Wechsel in den Schnee- und Eisablagerungen, Meeresströmungen von jährlicher Periode und dadurch bedingte Wassertransporte, sowie Schwankungen in dem Niveau des Luftmeeres. Die letzteren scheinen sich auf Grund der für den gröſsten Teil der Erde bekannten Isobarenkarten am ehesten quantitativ bestimmen zu lassen und liefern Massenumlagerungen von überraschend hohem Betrage.

Wir entnehmen die folgenden Angaben einer Untersuchung von R. Spitaler*). Bekanntermaſsen ist der Luftdruck im Winter im Mittel höher als im Sommer. Daher wird die Luftdruckdifferenz zwischen Januar und Juli auf der nördlichen Halbkugel im Mittel positiv, auf der südlichen negativ sein. Die Verteilung der Druckdifferenzen ist dabei natürlich keine gleichförmige, sondern wesentlich verschieden, je nachdem die betr. Gegend Festland oder Ozean ist, und zwar in dem Sinne verschieden, daſs die Wasserbedeckung die Luftdruckschwankungen merklich ausgleicht. In Übereinstimmung mit dieser Überlegung zeigen die Isobarenkarten, daſs sich der Drucküberschuſs zwischen Januar und Juli auf der nördlichen Halbkugel über dem asiatischen Festlande konzentriert, während sich der Drucküberschuſs zwischen Juli und Januar auf der südlichen Halbkugel inselförmig über die drei Gebiete: Südafrika, Südamerika, Australien gruppiert. Über die Polargegenden ist naturgemäſs nichts Sicheres bekannt. Hinsichtlich der Gröſse der

*) Die periodischen Luftmassenverschiebungen uud ihr Einfluſs auf die Lagenänderungen der Erdachse. Petermanns Mitteilungen, Ergänzungsheft Nr. 137 (1901).

Hosted by Google

Druckdifferenzen lehrt die Ausmessung der Isobarenkarten Folgendes: Es lagert auf der nördlichen Halbkugel zwischen 0^0 und 80^0 nördlicher Breite im Januar ein Luftmassenüberschufs gegenüber Juli gleich 192,5 Kubikkilometer Quecksilber, auf der südlichen Halbkugel zwischen 0^0 und 50^0 südlicher Breite im Juli ein Massenüberschufs gegenüber Januar von 402,2 Kubikkilometer Quecksilber! Da ein Kubikkilometer Quecksilber die Masse $13{,}6 \cdot 10^{12}$ kg aufweist, so haben wir es hier mit Massenunterschieden zu thun, die mit der gesamten Erdmasse (gleich mittlerer Dichte mal $4\pi R^3/3$ = rund $6 \cdot 10^{24}$ kg) schon einigermafsen vergleichbar sind *).

Hinsichtlich der durch Meeresströmungen verursachten Massentransporte verweisen wir auf eine Abschätzung von J. Lamp **).

Aufser durch meteorologische Einflüsse finden Massentransporte von kurzer Periode infolge von Ebbe und Flut und unperiodische Massenverschiebungen wenn auch von geringem Betrage durch Erdbeben, vulkanische Ausbrüche, Ablagerungen der Flüsse und durch die säkularen Hebungen und Senkungen der Erdkruste statt ***).

Wir haben uns nun zu fragen, wie solche Massentransporte die Bewegung der übrigen Erde beeinflussen. Wir können dabei einen *indirekten* und einen *direkten Einflufs* unterscheiden, einen indirekten, durch die veränderte Massenverteiluug vermittelten Einflufs, indem durch einen Massentransport die Hauptträgheitsaxen der Erde verlegt werden und somit die Lage der Rotationsaxe in der Erde beeinflufst wird, einen direkten Einflufs, insofern die Hervorbringung der Massentransporte einen Teil des zur Verfügung stehenden Gesamtimpulses verbraucht und dadurch den für die Erdrotation übrig bleibenden Impuls nach Gröfse und Richtung modifiziert.

Wir geben zunächst eine allgemeine Schilderung der fraglichen Verhältnisse.

Um den *indirekten Einflufs* eines Massentransportes zu bestimmen,

---

*) Die entsprechenden Luftdruckdifferenzen sind keineswegs grofs. Denken wir uns z. B. die Gesamtmasse von 192,5 km³ Quecksilber auf die Kugelzone zwischen 0^0 und 80^0 nördlicher Breite gleichmäfsig verteilt, so ergiebt sich eine Bedeckung von nur 0,78 mm Höhe. Dem genannten Massenüberschufs auf der nördlichen Kugelzone entspricht daher ein im Januar um 0,78 mm höherer Barometerstand als im Juli. Ebenso entspricht dem Massenüberschufs von 402,2 km³ Quecksilber auf der genannten südlichen Kugelzone ein im Juli um 2,08 mm höherer mittlerer Barometerstand als im Januar.

**) Über Niveauschwankungen der Ozeane als eine mögliche Ursache der Veränderlichkeit der Polhöhe. Astron. Nachrichten 126 (1891), Nr. 3014.

***) Näheres hierüber vgl. Helmert, Die mathem. und physikalischen Theorien der höheren Geodäsie, II, Kap. 5, Leipzig 1884.


Hosted by Google

verfahre man so: Man berechne aus der als bekannt anzusehenden Lage der bewegten Masse gegen den Erdkörper in jedem Momente die Lage der Hauptträgheitsaxen in der Erde und insbesondere die Lage des Trägheitspoles. Wenn letzterer vor dem Massentransport zufälliger Weise mit dem instantanen Rotationspol zusammenfiel, wird er während desselben und nach demselben von diesem verschieden sein. Gestattet man sich, was mit großer Annäherung zulässig ist, die Erde nach wie vor als symmetrischen Kreisel (mit gleichen äquatorialen Trägheitsmomenten) zu behandeln, so besteht die Bewegung des Rotationspoles auch nach dem Massentransport aus einer Umkreisung des Trägheitspoles. Die Periode dieser Bewegung ist — unter Voraussetzung der früher berechneten Elastizität — die vierzehnmonatliche. Der Radius des Kreises hängt dabei in erster Linie von der Verrückung des Trägheitspoles, in zweiter Linie von der Geschwindigkeit des Massentransportes ab; er bleibt theoretisch solange erhalten, bis er durch neue Massentransporte abgeändert wird.

Bei der Besprechung des *direkten Einflusses* der Massentransporte auf den Impuls wollen wir annehmen, daſs unser Massentransport durch innere Kräfte hervorgerufen sei, also durch Kräfte, die innerhalb des Massensystems der Erde dem Gesetz der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung genügen. Dann gilt unser fundamentaler Impulssatz von pag. 113 für die nichtfeste Erde ebenso unumschränkt wie für einen starren Körper (vgl. eine Bemerkung auf pag. 111). Dieser Satz besagt, daſs der Gesamtimpuls des Massensystems der Erde nach Richtung und Gröſse im Raume konstant bleibt. Der Gesamtimpuls zerlegt sich aber hier in den Impuls des Massentransportes und den der Erdrehung. Ist der erstere veränderlich, so muſs es auch der letztere sein. Mit dem Impuls der Erddrehung ändert sich im Allgemeinen auch die Rotationsaxe der Erde und die Lage des instantanen Pols auf der Erde. Fiel dieser vor dem Massentransport mit dem geometrischen Pol zusammen, so wird er während desselben von ihm entfernt; bewegte er sich ursprünglich in einem Kreise um den geometrischen Pol, so wird der Radius dieses Kreises durch den Massentransport vergröſsert oder verkleinert.

Wir geben nun einige analytische Ausführungen hierzu, wobei wir die beiden unterschiedenen Einflüsse zunächst noch getrennt behandeln und den Stoff in eine Reihe von Einzelproblemen auseinanderlegen.

Erstes Problem: Eine Masse oder der Schwerpunkt eines nicht zu ausgedehnten Massensystems m werde von der Stelle $X_0\,Y_0\,Z_0$ der Erde nach der Stelle $X\,Y\,Z$ verlagert. Wie ändert sich dabei die polare Hauptträgheitsaxe?

Bei der ursprünglichen Lage von m seien die Koordinatenaxen Hauptträgheitsaxen. Die Hauptträgheitsmomente heifsen A, $B = A$, C; die Trägheitsprodukte (vgl. pag. 98) sind Null. Bei der abgeänderten Lage von m setzen wir die Trägheitsmomente und -Produkte um die Koordinatenaxen in folgender Form an:

$$\begin{array}{lll} \bar{A} = A + a, & \bar{B} = A + b, & \bar{C} = C + c, \\ \bar{E} = \quad e, & \bar{F} = \quad f, & \bar{G} = \quad g. \end{array}$$

Die Gröfsen $a, \ldots, e, \ldots$ haben die Bedeutung

$$(1) \qquad \begin{cases} a = m(Y^2 + Z^2 - Y_0^2 - Z_0^2), \ldots \\ e = m(YZ - Y_0 Z_0), \ldots \end{cases}$$

und sind im Verhältnis zu A und C als kleine Gröfsen zu behandeln. Bei der Bestimmung der abgeänderten Lage der Hauptträgheitsaxen knüpfen wir nach pag. 100 an die folgende Fläche zweiten Grades an:

$$(A + a)\xi^2 + (A + b)\eta^2 + (C + c)\zeta^2 - 2e\eta\zeta - 2f\zeta\xi - 2g\xi\eta = 1.$$

Die Hauptaxen derselben, welche zugleich die gesuchten Hauptträgheitsaxen sind, werden durch die folgenden Gleichungen bestimmt:

$$\begin{array}{l} (A + a - \lambda)\xi - g\eta - f\zeta = 0, \\ -g\xi + (A + b - \lambda)\eta - e\zeta = 0, \\ -f\xi - e\eta + (C + c - \lambda)\zeta = 0. \end{array}$$

Hierin ist λ so zu wählen, dafs die drei Gleichungen miteinander verträglich werden. Ist dieses geschehen, so bestimmen die Verhältnisse $\xi : \eta : \zeta$ die Lage je einer der drei Hauptaxen. Es ist für das Folgende bequem, die ξ, η, ζ als die Richtungskosinus der fraglichen Hauptaxe aufzufassen, ihre absolute Gröfse also so zu wählen, dafs $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$ wird.

Wir interessieren uns speziell für die polare Hauptträgheitsaxe und dürfen annehmen, dafs diese nur wenig von ihrer ursprünglichen Richtung, der Z-Axe abweicht. (Für die äquatorialen Hauptträgheitsaxen wäre die entsprechende Annahme unzulässig, weil ihre Lage in der Äquatorebene ursprünglich unbestimmt ist und daher durch einen kleinen Massentransport bedeutend abgeändert werden kann.) Wir werden also ξ und η als klein voraussetzen und ζ gleich 1 nehmen. Gröfsen wie $f\xi$, $a\xi$ sind dann zu streichen; unsere dritte Gleichung ergiebt daher einfach $\lambda = C + c$ und unsere beiden ersten Gleichungen werden

$$(2) \qquad (A - C)\xi = f, \quad (A - C)\eta = e.$$

Die Richtungsänderung der fraglichen Hauptaxe ist hiernach auf Grund der in (1) angegebenen Werte von f und e bekannt. Die ξ, η können

Hosted by Google

zugleich als die durch die zugehörigen geocentrischen Winkel gemessenen x und y-Koordinaten des Trägheitspoles angesehen werden. Multiplizieren wir ξ und η mit dem Erdradius R, so erhalten wir direkt die Verschiebung des Trägheitspoles auf der Erdoberfläche.

Um ein Zahlenbeispiel zu geben, wollen wir annehmen, die Masse m werde auf einem Meridian, den wir zur XZ-Ebene nehmen können, aus der Breite Θ_0 in die Breite Θ verschoben. Es ist dann

$$e = 0, \qquad f = \frac{mR^2}{2}(\sin 2\Theta - \sin 2\Theta_0), \qquad \eta = 0.$$

Den Ausdruck (2) für ξ können wir so umschreiben:

$$\xi = \frac{A}{A - C}\frac{f}{A}.$$

Die Gröſse A würde bei homogener Massenverteilung durch $2MR^2/5$ zu berechnen sein, unter M die Masse der Erde verstanden; der wirklichen Massenverteilung entspricht aber besser der Ansatz $A = MR^2/3$ *). Mit Benutzung des bekannten Zahlenwertes von $A/(C - A)$ folgt daraufhin

$$\xi = -456\frac{m}{M}(\sin 2\Theta - \sin 2\Theta_0).$$

Um eine Ablenkung der Hauptträgheitsaxe um 1″ hervorzubringen, ist hiernach, wenn z. B. $\Theta_0 = -45^0$, $\Theta = +45^0$ genommen wird, die folgende Masse erforderlich:

$$m = \frac{\pi M}{180 \cdot 60 \cdot 60 \cdot 912} = \frac{1}{2}10^{-8}M.$$

Natürlich schlägt der Pol in demselben Sinne aus wie die Massenverschiebung erfolgte.

Zweites Problem: Es finde eine Massenverschiebung statt, deren Impuls nach Gröſse und Lage im Erdkörper durch einen ev. veränderlichen Vektor $\lambda\mu\nu$ für jede Zeit gegeben ist. Es wird angenommen, daſs die Hauptträgheitsaxen durch diese Massenverschiebung nicht abgeändert werden (s. unten). Welchen Einfluſs hat die Massenverschiebung auf die Lage der Rotationsaxe?

Sehen wir von äuſseren Kräften ab und nehmen wir an, daſs der Massentransport lediglich durch innere Kräfte hervorgebracht wird, so bleibt der Gesamtimpuls im Raume konstant. Dieser hat gegen die bewegte Erde die Komponenten $L + \lambda$, $M + \mu$, $N + \nu$, wenn LMN den Impuls der Erddrehung bezeichnet. Mithin gelten nach pag. 140 die Eulerschen Gleichungen in der folgenden Form:

*) Vgl. Helmert l. c. II, pag. 473.

Hosted by Google

$$\frac{d(L+\lambda)}{dt} = r(M+\mu) - q(N+\nu),$$
$$\frac{d(M+\mu)}{dt} = -r(L+\lambda) + p(N+\nu),$$
$$\frac{d(N+\nu)}{dt} = q(L+\lambda) - p(M+\mu).$$

Wir schreiben dafür

$$(3) \qquad \begin{cases} \dfrac{dL}{dt} = rM - qN + \mathsf{\Lambda}, \\ \dfrac{dM}{dt} = -rL + pN + \mathsf{M}, \\ \dfrac{dN}{dt} = qL - pM + \mathsf{N}, \end{cases}$$

indem wir setzen

$$\mathsf{\Lambda} = -\frac{d\lambda}{dt} + r\mu - q\nu, \quad \mathsf{M} = -\frac{d\mu}{dt} - r\lambda + p\nu, \quad \mathsf{N} = -\frac{d\nu}{dt} + q\lambda - p\mu.$$

Die Gröſsen λ, μ, ν sind kleine Gröſsen; wir können daher in den vorstehenden Definitionsgleichungen die p, q, r durch ihre Näherungswerte ersetzen, die sie bei ungestörter Erddrehung haben würden, d. h. durch die Werte $p = 0$, $q = 0$, $r = \omega$. Dadurch vereinfachen sich diese Gleichungen wie folgt:

$$(4) \qquad \mathsf{\Lambda} = -\frac{d\lambda}{dt} + \omega\mu, \qquad \mathsf{M} = -\frac{d\mu}{dt} - \omega\lambda, \qquad \mathsf{N} = -\frac{d\nu}{dt}.$$

Die $\mathsf{\Lambda}$, M, N sind hiernach ebenso wie die λ, μ, ν bekannte Funktionen der Zeit und die Gleichungen (3) lassen die folgende Deutung zu: Unser Massentransport vom Impulse $\lambda\,\mu\,\nu$ beeinfluſst die Erddrehung in solcher Weise, als ob eine als Funktion der Zeit gegebene Drehkraft $\mathsf{\Lambda}\,\mathsf{M}\,\mathsf{N}$ an dem Erdkörper angriffe.

Da wir annehmen, daſs die Lage der Hauptaxen durch den Massentransport nicht beeinfluſst wird, diese also im Erdkörper festliegen, können wir in (3) $L = Ap$, $M = Aq$, $N = Cr$ setzen; auſserdem können wir in Gliedern, die mit den kleinen Faktoren p oder q behaftet sind, r mit seinem Näherungswert ω vertauschen. Die beiden ersten Gleichungen (3) lauten dann:

$$(5) \qquad \begin{cases} A\dfrac{dp}{dt} = (A-C)\,\omega q + \mathsf{\Lambda}, \\ A\dfrac{dq}{dt} = (C-A)\,\omega p + \mathsf{M}. \end{cases}$$

Die dritte Gleichung kommt für das Folgende nicht in Betracht.

Wir fassen die Gl. (5) durch Multiplikation mit 1 und i zu einer komplexen Gleichung

$$(6) \qquad A\frac{d(p+iq)}{dt} = (C-A)\,i\omega\,(p+iq) + \mathsf{\Lambda} + i\mathsf{M}$$

zusammen und nehmen von dem Massentransport an, daſs er ein periodischer sei, daſs also λ, μ, ν und daher auch $\mathsf{\Lambda}$, M, N periodische Funktionen der Zeit sind. Diese Funktionen werden wir nach Vielfachen der Periode in eine Fouriersche Reihe entwickeln und ein einzelnes Reihenglied für sich betrachten. Für $\mathsf{\Lambda} + i\mathsf{M}$ können wir dann ganz allgemein den Ansatz machen:

$$\mathsf{\Lambda} + i\mathsf{M} = a e^{i\alpha t} + a' e^{-i\alpha t}.$$

Dem entspricht als allgemeines Integral von (6):

$$p + iq = b e^{i\alpha t} + b' e^{-i\alpha t} + c e^{i\beta t}, \tag{7}$$

wo c die Integrationskonstante ist und wo zur Abkürzung gesetzt wurde:

$$\left\{\begin{aligned} \beta &= \frac{C-A}{A}\,\omega, \\ b &= \frac{a}{i\alpha A - i\omega(C-A)} = \frac{ia}{A}\,\frac{1}{\beta-\alpha}, \\ b' &= \frac{a'}{-i\alpha A - i\omega(C-A)} = \frac{ia'}{A}\,\frac{1}{\beta+\alpha}; \end{aligned}\right. \tag{8}$$

c ist ebenso wie vorher a und a' im Allgemeinen komplex. Die beiden ersten Glieder der rechten Seite von (7) stellen die durch den Massentransport *erzwungene* Schwingung, das letzte Glied die *freie* Schwingung der Rotationsaxe dar. Erstere erfolgt natürlich im Zeitmaſs des Massentransportes, letztere in der durch den Wert von β angezeigten Periode von $A/(C-A)$ Tagen. Setzen wir letztere nicht gleich der Eulerschen, sondern gleich der Chandlerschen Periode, so berücksichtigen wir damit in einfachster Weise im Sinne des vorigen Paragraphen die elastische Nachgiebigkeit der Erde, die sich natürlich auch an dieser Stelle geltend machen wird.

Wie überall bei Schwingungsfragen stoſsen wir hier auf ein gewisses Resonanzphänomen, d. h. auf eine Verstärkung der Ausschläge im Falle der Koincidenz zwischen der Periode der freien und erzwungenen Schwingung. Diese Koincidenz tritt ein, wenn in unseren Bezeichnungen $\alpha = \pm\beta$ wird, in welchem Falle entweder b oder b' unendlich groſs wird. Wir messen die für eine gewisse Frequenz eintretende Verstärkung am besten durch den Vergleich mit einer sehr langsamen Schwingung ($\alpha = 0$). Nach (8) ergiebt sich für den Koeffizienten b bei sehr geringer Frequenz bez. für das Verhältnis dieses Koeffizienten bei beliebiger und bei geringer Frequenz:

$$b_0 = \frac{ia}{A}\,\frac{1}{\beta}$$

und

$$\frac{b_\alpha}{b_0} = \frac{1}{1-\alpha/\beta}. \tag{9}$$



(Dieselbe Formel gilt für den Koeffizienten b', wenn wir $+\alpha$ mit $-\alpha$ vertauschen; die folgenden Bemerkungen, die wir an den Wert von b anknüpfen, ergeben sich ebensowohl aus der entsprechenden Formel für b', wenn wir negative Frequenzen α betrachten, also dem Massentransport den umgekehrten Sinn beilegen.)

Hat z. B. der Massentransport die Periode eines Jahres und nehmen wir als Periode der freien Schwingung, wie verabredet, die Chandlersche, so wird $\alpha/\beta = 14/12$ und (vom Vorzeichen abgesehen) $b_\alpha/b_0 = 6$. *Der Umstand also, dafs die jährliche Periode nicht sehr weit von der natürlichen Periode der Polschwankungen entfernt ist, hat zur Folge, dafs ein Massentransport von jährlicher Periode eine sechsmal stärkere Ablenkung hervorbringt, als ein Vorgang, der dieselbe Drehkraft, aber in unendlich verlangsamter Zeitfolge auf die Erde überträgt.* Hat der Massentransport andrerseits eine sehr kurze Periode, (α sehr grofs), so wird α/β grofs und b_α/b_0 klein. Z. B. wollen wir uns auf den an sich bedeutenden Massentransport beziehen, der relativ zur rotierenden Erde mit halbtägiger Periode in der Erscheinung der Ebbe und Flut auftritt*). Hierbei ist α/β rund gleich 840 und b_α/b_0 rund gleich 1/840. *Ein Massentransport von so kurzer Periode bringt also bei gleicher Gröfse der übertragenen Drehkraft gegenüber einem zeitlich unendlich verlangsamten Transporte nur eine verschwindend kleine Wirkung auf die Rotationsaxe hervor.* Das Massensystem der Erde ist eben zu träge, um den Einwirkungen von ganz kurzer Dauer folgen zu können; es folgt einer Störung um so williger und ergiebiger, je näher die Störungsperiode der natürlichen Periode der Polschwankungen liegt.

Übrigens tritt dasselbe Resonanzphänomen auch auf, wenn wir wie in dem ersten Problem dieses § lediglich die indirekte Wirkung des Massentransportes, d. h. seinen Einflufs auf die Massenverteilung in Rechnung setzen, indem durch einen periodischen Massentransport auch der Trägheitspol der Erde in periodischer Weise verlagert wird und hieraus eine um so stärkere Schwankung des Rotationspoles entsteht, je näher die Periode des Massentransportes der natürlichen Periode der Polschwankungen liegt. Wir werden unten in einem dritten Problem hierauf zurückzukommen Gelegenheit haben.

Durch den geringen Unterschied zwischen der jährlichen Periode der meteorologischen Massentransporte und der freien Schwingungsperiode des Poles ist jedenfalls die Möglichkeit gegeben, dafs ein verhältnismäfsig schwacher meteorologischer Massentransport eine ver-

*) Allerdings handelt es sich hierbei um einen durch äufsere Kräfte (Mondanziehung) bewirkten Massentransport, für welchen die gegenwärtige Auseinandersetzung nicht unmittelbar gilt.



hältnismäfsig starke Polschwankung zur Folge haben kann, eine Möglichkeit, die bei dem Studium der Polschwankungen von jährlicher Periode im Auge zu behalten ist.

Es giebt eine Klasse von Massentransporten, bei denen die hier für sich behandelte Wirkung auf den Impuls thatsächlich gesondert auftritt und die Wirkung auf die Massenverteilung in Fortfall kommt. Wir sprechen von „cyklischen Massentransporten“, wenn die verschobene Masse sofort von neuer Masse derselben Dichtigkeit ersetzt wird. Ersichtlich giebt ein cyklischer Massentransport zu einer Umlagerung der Hauptträgheitsaxen keinen Anlafs, während er andrerseits den Impuls der Erddrehung nach Mafsgabe seiner Geschwindigkeit und Ergiebigkeit beeinflufst. Diese Fälle lassen eine sehr elegante Behandlung besonders dann zu, wenn der Impuls des Massentransportes in Bezug auf den Erdkörper konstant bleibt; sie sind von V. Volterra*) in einer Reihe von Abhandlungen untersucht worden.

Bisher ist es indessen nicht gelungen, reale cyklische Massentransporte von hinreichender Intensität oder hinreichender Dauer nachzuweisen, die einen merklichen Einflufs auf die Polschwankungen haben könnten. Namentlich scheint der Versuch nicht aussichtsvoll, mit Volterra auch die Polschwankungen der Chandlerschen Periode aus diesem Erklärungsgrunde abzuleiten. Die cyklischen Bewegungen, welche Volterra postulieren mufs, um zur Chandlerschen Periode zu gelangen, sind rein hypothetischer Natur und werden durch die geophysikalischen Erfahrungen nicht wahrscheinlich gemacht. Überdies werden wir im Folgenden sehen, dafs die direkte Wirkung eines Massentransportes auf den Impuls gegen seine indirekte Wirkung auf die Hauptträgheitsaxen im Allgemeinen zurücktritt, dafs also ein nicht-cyklischer Massentransport die Erddrehung im Allgemeinen mehr beeinflufst, wie ein cyklischer von gleicher Stärke. Deshalb scheinen die Volterra'schen Untersuchungen mehr ein allgemeines mathematisches wie ein unmittelbares geophysikalisches Interesse zu haben.

Rein theoretisch, ohne Rücksicht auf geophysikalische Fragen, war die Bewegung eines Kreisels, in dessen Innerem eine cyklische Bewegung vor sich geht, schon früher von A. Wangerin**) behandelt worden.

---

*) Astronom. Nachr. Bd. 138 (1895), pag. 33; Atti d. R. Accademia di Torino, Bd. 30 und 31 (1895). In derselben Richtung liegen die Erläuterungen von G. Peano, ibid. Volterra fafst seine Untersuchungen zusammen in Acta Mathematica Bd. 22 (1898).

**) Halle 1899, Universitätsschrift. Das Problem ist in mathematisch verallgemeinerter Form aufgenommen von V. Volterra, Rend. d. R. Accademia dei Lincei (5) Bd. 4 (1895) und von E. Jahnke, Liouvilles Journal (5) Bd. 5 (1899).

Hosted by Google

Indem wir jetzt noch die bei unserem ersten und zweiten Problem gegebenen Entwickelungen zusammenfassen, berücksichtigen wir nun zugleich die direkte Wirkung auf den Impuls und die indirekte Wirkung eines Massentransportes auf die Massenverteilung der Erde. Wir stellen uns dementsprechend das folgende

Dritte Problem: *Eine Masse m werde von einer Anfangslage $X_0 Y_0 Z_0$ aus in bestimmter Weise auf der Erde verschoben, so dafs ihre Koordinaten X, Y, Z gegen den Erdkörper bekannte, im Besonderen periodische Funktionen der Zeit sind. Hierdurch wird der Trägheitspol der Erde in bestimmter Weise abgelenkt und es wird gleichzeitig der Impuls der Erddrehung in solcher Weise beeinflufst, als ob auf den Erdkörper eine bestimmte Drehkraft* $\mathsf{\Lambda M N}$ *wirkte. Es sollen die Differentialgleichungen der Drehbewegung aufgestellt und integriert werden.*

Aus den als Funktionen von t gegebenen Koordinaten X, Y, Z von m berechnen wir zunächst den Verschiebungsimpuls von m, nämlich den Vektor

$$mX', \quad mY', \quad mZ'$$

und hieraus die Momente dieses Vektors um die Koordinatenaxen, welche die nach denselben Axen genommenen Komponenten des Drehimpulses des Massentransportes werden, nämlich

$$(10) \quad \lambda = m(YZ' - ZY'), \quad \mu = m(ZX' - XZ'), \quad \nu = m(XY' - YX').$$

Die Bewegung des Erdkörpers wird, unter der Annahme dafs äufsere Kräfte nicht vorhanden sind, nach wie vor durch die Gleichungen (3) dargestellt, in denen die $\mathsf{\Lambda}, \mathsf{M}, \mathsf{N}$ aus den soeben angegebenen λ, μ, ν hinreichend genau mittels der Gl. (4) berechnet werden können. In der That gelten die Gl. (3) von pag. 712 oder die Gl. (2') von pag. 140, aus denen wir jene folgerten, für ein beliebiges im Kreisel festes rechtwinkliges Axensystem, gleichviel ob dasselbe das System der Hauptträgheitsaxen ist oder nicht. Im Gegensatz zu den Betrachtungen bei unserem zweiten Problem sind unsere Koordinatenaxen jetzt nicht mehr Hauptträgheitsaxen; nehmen wir etwa an, dafs sie es zu Anfang der Bewegung waren, so verlieren sie diese Eigenschaft in dem Mafse, wie der Trägheitspol durch den Massentransport abgelenkt wird. Infolgedessen treten an die Stelle der einfachen Beziehungen $L = Ap$, $M = Aq$, $N = Cr$ die allgemeinen Gl. (2) von pag. 95 für den Zusammenhang zwischen Impuls- und Rotationsvektor, die wir mit Rücksicht auf die Definition der Gröfsen abc, efg in Gl. (1) folgendermafsen schreiben können:

$$\begin{aligned} L &= (A+a)p - gq - fr, \\ M &= -gp + (A+b)q - er, \\ N &= -fp - eq + (C+c)r. \end{aligned}$$



Wir berücksichtigen, dafs die $a\, b\, c$, $e\, f\, g$, $p\, q$ kleine Gröfsen sind und können daher wie folgt vereinfachen:

$$(11) \qquad L = Ap - fr, \quad M = Aq - er, \quad N = (C + c)r.$$

Diese Werte haben wir in die Gl. (3) einzutragen. Aus der dritten dieser Gleichungen folgt zunächst, dafs (im Gegensatz zu r selbst) dr/dt eine kleine Gröfse wird, was man übrigens auch daraus entnehmen konnte, dafs die ungestörte, ursprüngliche Bewegung in einer *gleichförmigen* Rotation $r = \omega =$ const. bestand. In den beiden ersten Gleichungen (3) vernachlässigen wir ferner alle diejenigen Glieder, die von der zweiten Ordnung in den kleinen Gröfsen werden und ersetzen in den Gliedern erster Ordnung r durch seinen Näherungswert ω. So ergiebt sich

$$(12) \qquad \begin{cases} A\,\dfrac{dp}{dt} = (A - C)\, q\omega + \Lambda', \\ A\,\dfrac{dq}{dt} = (C - A)\, p\omega + \mathsf{M}', \end{cases}$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$(13) \qquad \begin{cases} \Lambda' = \omega\,\dfrac{df}{dt} - \omega^2 e + \Lambda, \\ \mathsf{M}' = \omega\,\dfrac{de}{dt} + \omega^2 f + \mathsf{M}. \end{cases}$$

Die Gleichungen (12) haben durchaus dieselbe Form, wie die Gl. (5); die Λ', M' hier sind, ebenso wie die Λ, M dort, bekannte Funktionen der Zeit, wenn der Massentransport in seiner Abhängigkeit von der Zeit bekannt ist. Die Λ', M' fassen die direkte Wirkung auf den Impuls und die indirekte Wirkung des Massentransportes zusammen und lassen sich abermals deuten als eine scheinbare, auf den Erdkörper wirkende Drehkraft. Bemerkenswert ist noch der folgende analytische Ausdruck dieser scheinbaren Drehkraft, der sich unmittelbar aus den Definitionsgleichungen (4) und (13) von Λ, M und Λ', M' ergiebt:

$$(14) \qquad \begin{aligned} \Lambda' &= -\frac{d}{dt}(\lambda - \omega f) + \omega(\mu - \omega e), \\ \mathsf{M}' &= -\frac{d}{dt}(\mu - \omega e) - \omega(\lambda - \omega f). \end{aligned}$$

Man hat also, um neben der direkten die indirekte Wirkung des Massentransportes zu berücksichtigen, λ, μ einfach durch $\lambda - \omega f$, $\mu - \omega e$ zu ersetzen.

Die weitere Behandlung der Gl. (12), ihre Integration und die Diskussion ihrer Lösungen unterscheidet sich in nichts von der obigen Behandlung der Gl. (5); insbesondere findet auch jetzt die oben betonte Resonanzwirkung statt, wenn der Massentransport periodisch ist und

Hosted by Google

seine Periode der Periode der freien Schwingungen der Erdaxe nahe liegt.

Wir wollen hier zunächst die Frage entscheiden, ob bei einem periodischen Massentransport die direkte oder die indirekte Wirkung, d. h. die Wirkung auf den Impuls oder die auf die Massenverteilung die bedeutendere ist, um von da aus zu einer für die Zahlenrechnung nützlichen weiteren Vereinfachung der Gl. (12) zu gelangen. Wir brauchen zu dem Zwecke nach den Gleichungen (14) lediglich das Verhältnis der Gröſsenpaare λ, μ und ωf, ωe zu prüfen.

Das Gesetz, nach welchem der Massentransport im Erdkörper zeitlich abläuft, möge durch die folgenden, möglichst bequem gewählten Gleichungen zum Ausdruck gebracht werden:

$$X = X_0 + a \sin \alpha t,$$
$$Y = Y_0 + b \sin \alpha t,$$
$$Z = Z_0.$$

Die fragliche Masse pendelt hiernach um ihre Anfangs- und Mittellage $X_0 Y_0 Z_0$ in der Periode $2\pi/\alpha$ herum. Wir berechnen nach (1):

$$e = m Z_0 b \sin \alpha t, \qquad f = m Z_0 a \sin \alpha t$$

und nach (10):

$$\lambda = - m Z_0 b \alpha \cos \alpha t, \qquad \mu = m Z_0 a \alpha \cos \alpha t.$$

Hiernach ergeben sich die Verhältnisse

$$\frac{\lambda}{\omega f} = - \frac{\alpha}{\omega} \frac{b}{a} \frac{\cos \alpha t}{\sin \alpha t}, \qquad \frac{\mu}{\omega e} = \frac{\alpha}{\omega} \frac{a}{b} \frac{\cos \alpha t}{\sin \alpha t}.$$

Über die Amplituden a und b wollen wir nichts Näheres aussagen; wir werden aber annehmen, daſs sie etwa von gleicher Gröſsenordnung sind. Dann wird die Gröſsenordnung der vorstehenden Verhältnisse im Mittel durch den Faktor α/ω gegeben. Nun sind die Gröſsen α und ω umgekehrt proportional der Periode des Massentransportes bez. der der Erddrehung. α/ω wird daher gleich der reziproken Anzahl von Tagen, welche auf die Periode des Massentransportes kommt. Wir sahen bereits, daſs nur Massentransporte von solcher Periode, die der natürlichen Periode der Polschwankungen nahe liegen, einen starken Einfluſs auf die Polschwankungen ausüben können. Deshalb ist für alle Massentransporte die uns interessieren, α/ω eine kleine Zahl, für die meteorologischen Massentransporte beispielsweise gleich $1/365$. Es folgt hieraus, daſs *bei diesen Massentransporten die direkte Wirkung gegenüber der indirekten sehr erheblich zurücktritt*, sodaſs wir in den Gl. (14) λ und μ gegen ωe und ωf streichen können. Gleichzeitig werden wir auch df/dt gegen ωe und de/dt gegen ωf streichen können, weil das Verhältnis dieser Gröſsenpaare der Gröſsenordnung nach aber-

Hosted by Google

mals durch den Wert α/ω bestimmt wird. Die Gl. (14) vereinfachen sich auf Grund dieser Vernachlässigungen zu

$$\Lambda' = -\omega^2 e, \quad \mathsf{M}' = +\omega^2 f,$$

wofür wir auch nach Gl. (2), indem wir die Winkelablenkungen der Hauptaxen einführen, schreiben können:

$$\Lambda' = -\omega^2 (A - C)\,\eta, \quad \mathsf{M}' = +\omega^2 (A - C)\,\xi. \tag{15}$$

Diese Vereinfachung ist hier auf Grund einer sehr speziellen Annahme über den Massentransport abgeleitet. Man übersieht aber leicht, daſs auch bei allgemeinerem Ansatz, wenn man die X, Y, Z je durch eine Fouriersche Reihe gibt, auf deren erste Glieder wir uns oben beschränkt haben, ähnliche Schlüsse möglich sein werden, daſs nämlich auch dann bei den Gliedern von langer Periode (d. h. lang gegen die Periode der Erdumdrehung) der durch die Änderung der Massenverteilung bedingte, indirekte Einfluſs überwiegt, während bei den Gliedern von kurzer Periode (d. h. kurz gegen die Periode der freien Schwingung der Erdaxe) sowohl der direkte Einfluſs auf den Impuls wie jener indirekte Einfluſs auf die Erddrehung unbedeutend wird. Nur bei stoſsweisen Massentransporten dürfte der direkte Einfluſs ausschlaggebend sein, wobei es allerdings zweifelhaft bleibt, ob solche Massentransporte von beträchtlicher Stärke in Wirklichkeit vorkommen.

Setzen wir die Werte (15) in unsere Differentialgleichungen (12) ein, so lauten dieselben:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= \frac{A-C}{A}\,\omega\,(q - \omega\eta), \\ \frac{dq}{dt} &= \frac{C-A}{A}\,\omega\,(p - \omega\xi). \end{aligned}\right. \tag{16}$$

Hier wollen wir noch neben den Koordinaten ξ, η des Trägheitspoles die ebenso zu messenden Koordinaten des Rotationspoles einführen, welche u, v heiſsen mögen. Die u, v sollen die Richtungskosinus der Rotationsaxe gegen die Koordinatenaxen X und Y bedeuten, also gleich sein p/r bez. q/r, wofür wir auch hinreichend genau p/ω bez. q/ω nehmen können. Benutzen wir auſserdem wie in Gl. (8) für die Frequenz der freien Schwingung der Erdaxe die Abkürzung β, so werden unsere Gleichungen:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -\beta\,(v - \eta), \\ \frac{dv}{dt} &= +\beta\,(u - \xi). \end{aligned}\right. \tag{17}$$

Sie besagen einfach, *daſs der Rotationspol in jedem Augenblicke um den Trägheitspol mit der Winkelgeschwindigkeit β umgedreht wird.* Der



Sinn der Drehung stimmt mit dem der Erddrehung überein; das Koordinatensystem ist so gewählt zu denken, daſs die positive X-Axe auf kürzestem Wege in die positive Y-Axe durch die Erddrehung übergeführt wird.

Zum Zwecke der Integration fassen wir die Gl. (17) in die komplexe Form zusammen:

(18) $$\frac{d(u+iv)}{dt} = i\beta((u+iv)-(\xi+i\eta))$$

und nehmen an, daſs infolge von Massentransporten der Trägheitspol eine elliptische Schwingung um seine mittlere Lage ausführe. Wir können dann für $\xi + i\eta$ ähnlich wie früher für $\Lambda + i\mathrm{M}$ den Ansatz machen:

(19) $$\xi + i\eta = ae^{i\alpha t} + a'e^{-i\alpha t}.$$

Dem entspricht als zugehöriges partikuläres Integral von (18), welches die durch den Massentransport *erzwungene* Schwingung des Rotationspols darstellt (von der *freien*, in der Periode $2\pi/\beta = 14$ Monaten erfolgenden Schwingung können wir absehen):

(20) $$\begin{cases} u + iv = be^{i\alpha t} + b'e^{-i\alpha t}, \\ b = \dfrac{a\beta}{\beta-\alpha}, \qquad b' = \dfrac{a'\beta}{\beta+\alpha}. \end{cases}$$

Gl. (20) stellt ebenso wie (19) eine elliptische Schwingung dar. Um die gegenseitige Lage und Gröſse beider Ellipsen bequem zu übersehen, können wir die Koordinatenrichtungen so gewählt denken, daſs sie mit den Hauptaxen der Ellipse (19) zusammenfallen. Dann sind a und a' und nach (20) auch b und b' reell. Nennen wir die Hauptaxen der beiden Ellipsen bez. h, k, H, K, so können wir statt (19) und (20) schreiben:

(19′) $$\xi + i\eta = h\cos\alpha t + ik\sin\alpha t, \quad h = a + a', \quad k = a - a',$$

(20′) $$u + iv = H\cos\alpha t + iK\sin\alpha t, \quad H = b + b', \quad K = b - b'.$$

Man erkennt hieraus, daſs der Richtung nach die Hauptaxen beider Ellipsen zusammenfallen; was ihre Gröſse betrifft, so ergiebt sich aus (20) und der Definition der h, k, H, K:

(21) $$H = \frac{\beta(\beta h + \alpha k)}{\beta^2 - \alpha^2}, \qquad K = \frac{\beta(\beta k + \alpha h)}{\beta^2 - \alpha^2}.$$

Es ist dabei zu beachten, daſs die H, K mit Vorzeichen zu rechnen sind und daſs man auch der Gröſse h ev. das negative Vorzeichen beizulegen hat, um erforderlichenfalls den richtigen Umlaufssinn des Trägheitspoles durch (19′) zum Ausdruck zu bringen. Die Umkehrung der Gl. (21) liefert

(22) $$h = H - \frac{\alpha}{\beta}K, \qquad k = K - \frac{\alpha}{\beta}H.$$


Hosted by Google

Es mögen zunächst einige Zahlenbeispiele und Figuren folgen. Wir nehmen dabei an, dafs der fragliche Massentransport meteorologischen Ursprungs sei, also die Periode eines Jahres habe. Als Periode der freien Schwingung sehen wir, um der Elastizität des Erdkörpers Rechnung zu tragen (vgl. pag. 713), die Chandlersche an. Dann wird rund $\alpha/\beta = 7/6$. Der Trägheitspol möge eine geradlinige Schwingung ausführen, es sei also z. B. $h = 0$ und $\eta = k \sin \alpha t$. Aus (21) ergiebt sich

$$H = -\frac{42}{13} k = -3{,}2\, k; \qquad K = -\frac{36}{13} k = -2{,}8\, k$$

und aus (20′)

$$u = -3{,}2\, k \cos \alpha t, \qquad v = -2{,}8\, k \sin \alpha t.$$

Dieser Fall wird durch Fig. 107a veranschaulicht. Wir haben dabei entsprechende, d. h. zu gleicher Zeit von dem Trägheitspol und dem Rotationspol inne gehabte Punkte mit gleichen Zahlen bezeichnet.

In Fig. 107b ist hinsichtlich der Bahn des Trägheitspoles an der vorigen Annahme festgehalten. Dagegen haben wir, wie es für einen

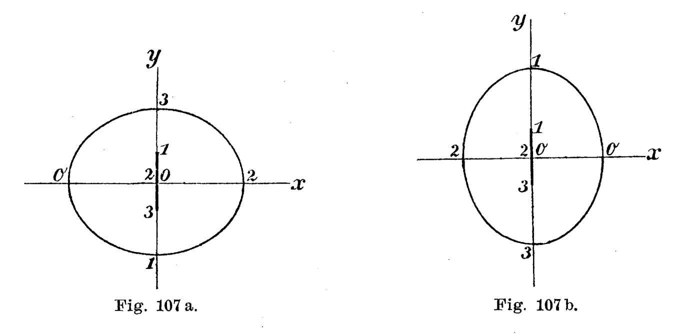


Fig. 107a. Fig. 107b.

absolut starren Erdkörper angemessen wäre, als Periode der freien Schwingungen die Eulersche gewählt. Es wird dann $\alpha/\beta = 5/6$ und

$$H = \frac{30}{11} k = 2{,}7\, k, \qquad K = \frac{36}{11} k = 3{,}3\, k,$$

$$u = +\,2{,}7\, k \cos \alpha t, \qquad v = +\,3{,}3\, k \sin \alpha t.$$

Beide Figuren 107 bringen die wiederholt hervorgehobene Resonanzwirkung zum Ausdruck, vermöge deren die Bewegung des Rotationspoles bei nicht sehr verschiedenen Perioden der freien und erzwungenen Schwingung wesentlich ausgiebiger wird, als die des Trägheitspoles. Dafs sich in Fig. 107a der Rotationspol auf der entgegengesetzten, in Fig. 107b auf derselben Seite wie der Trägheitspol befindet (entgegengesetzte bez. gleiche Phase hat), entspricht einem allgemeinen Schwingungsgesetz; entgegengesetzte Phase tritt stets im Falle $\alpha > \beta$, gleiche Phase im Falle $\alpha < \beta$ ein. Den Übergang zwischen beiden Ellipsen ver-

Hosted by Google

mittelt der Fall $\alpha = \beta$, wo unsere Ellipse (s. Gl. (21)) in einen Kreis von unendlich grofsem Radius übergeht. Im Falle $\alpha = 0$ (unendlich lange Periode, säkularer Massentransport) artet die elliptische in eine geradlinige Schwingung aus, indem (vgl. (21)) $H = 0$, $K = k$ wird; der Rotationspol folgt dann genau der Bahn des Trägheitspoles. Im Falle $\alpha = \infty$ (unendlich rasche Schwingung) vermag der Rotationspol der Einwirkung des Massentransportes überhaupt nicht zu folgen; es wird nach (21) $H = K = 0$. Denkt man sich in Fig. 107b die in eine Gerade ausgeartete Ellipse des Trägheitspoles durch eine kontinuierliche Folge von sich erweiternden Ellipsen, zu denen auch die in dieser Figur konstruierte Ellipse des Rotationspoles gehört, in den unendlichen Kreis übergeführt und in Fig. 107a diesen durch eine kontinuierliche Folge von sich verengernden Ellipsen, deren eine mit der in dieser Figur verzeichneten Ellipse übereinstimmt, in den Koordinatenanfangspunkt zusammengezogen, so hat man das Gesamtbild der möglichen Bahnen des Rotationspoles bei beliebigen Werten des Verhältnisses α/β vor sich.

So übersichtlich liegen indessen die Verhältnisse nicht mehr, wenn wir die Bahn des Trägheitspoles selbst als elliptisch ansetzen, also der soeben betrachteten geradlinigen Schwingung eine zweite dazu senkrechte und in der Phase gegen jene verschobene Schwingung hinzufügen. Dann kann es insbesondere vorkommen, dafs der Resonanzeffekt in gewisser Weise durch Interferenz verdeckt wird; die Mannigfaltigkeit der gegenseitigen Lagen beider Ellipsen, die nach den Gl. (21) möglich sind, wird dann aufserordentlich grofs. —

Nach Erledigung der vorangestellten drei Probleme kommen wir nun auf die bei der Erde vorliegenden realen Verhältnisse, insbesondere auf den im Anfang dieses Paragraphen besprochenen Luftmassentransport zurück. Wie Herr Spitaler auf Grund der Luftdruckkarten (durch mechanische Quadratur über die Erdoberfläche) berechnet, wird durch den Lufttransport der Trägheitspol abgelenkt

im Januar um $0'',055$ nach 100^0 westl. v. Gr.
„ Juli „ $0'',041$ „ 68^0 östl. v. Gr.

Der Trägheitspol schlägt also zu jenen beiden Zeitpunkten um annähernd gleiche Winkel nach annähernd entgegengesetzten Meridianen hin aus. Die Ausschläge für die Zeiten April und Oktober sind nicht berechnet, sondern nur geschätzt, sie erfolgen ungefähr nach den Meridianen 180^0 und 0^0 und sind vermutlich kleiner wie die vorher angegebenen. Der Trägheitspol läuft also in der Richtung von Osten nach Westen d. h. im umgekehrten Sinne wie die Erdrotation. Die genauere Gestalt der Bahn läfst sich nach diesen Daten nicht fest-

Hosted by Google

stellen und es ist daher auch nicht möglich, die zugehörige Bahn des *Rotationspoles zu bestimmen.*

Dagegen ist der umgekehrte Weg gangbar. Nach pag. 682 kann die Polschwankung von jährlicher Periode als eine Ellipse von den Hauptaxen $0'',104$ und $0'',044$ beschrieben werden, deren grofse Axe nach dem Meridian 19^0 östl. v. Gr. gerichtet ist und die im Sinne der Erddrehung durchlaufen wird. Wir setzen daher $H = 0'',104$, $K = 0'',044$ und berechnen nach den Gl. (22) mit $\alpha/\beta = 7/6$:

$$h = 0'',053, \quad k = -0'',077.$$

Die hierdurch bestimmte Ellipse wird (vermöge des Vorzeichens von k) im umgekehrten Sinne durchlaufen wie die vorige Ellipse; die Lage der grofsen und kleinen Axe ist die umgekehrte wie bei der vorigen Ellipse.

In Fig. 108 ist die Ellipse des Rotationspoles H, K und die theoretisch hinzugehörige Ellipse des Trägheitspoles h, k verzeichnet. Zusammengehörige Stellen beider sind durch gleiche Monatsbezeichnungen markiert. Ferner ist in der Figur die Lage des Trägheitspoles und sein Bewegungssinn nach den Berechnungen von Spitaler für die Zeiten Januar und Juli eingetragen. Die betr. Punkte sind als kleine Kreise kenntlich gemacht. Man erkennt aus der Figur, dafs eine allgemeine Übereinstimmung zwischen diesen Punkten und den theoretisch bestimmten gleichzeitigen Orten des Trägheitspoles wenigstens der Gröfsenordnung und dem Sinne nach vorhanden ist. Die thatsächlich bestehenden Unterschiede in ihren Lagen können entweder durch unsere noch ziemlich vollständige Unkenntnis der arktischen Luftdruckverhältnisse oder dadurch erklärt werden, dafs aufser den Lufttransporten noch andere meteorologische Prozesse (Wassertransporte etc.) die jährliche Bahn des Rotationspoles beeinflussen.

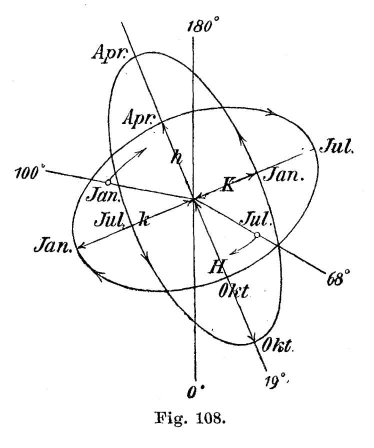


Fig. 108.

Alles in allem hat man zu der Annahme guten Grund, dafs es bei weiterer Anreicherung des Beobachtungsmaterials möglich sein wird, den jährlichen Bestandteil der Polschwankungen aus meteorologischen Massentransporten befriedigend zu erklären.

Nicht so günstig stehen die Aussichten für die Erklärung des in Fig. 106 dargestellten Restbetrages von unperiodischen Polschwankungen. Säkulare Massenveränderungen von einigermafsen wahrscheinlichem Betrage geben meist nur sehr kleine Einwirkungen auf den Trägheits-

Hosted by Google

und den Rotationspol*). Auch macht die allgemeine Gestaltung von Fig. 106, soweit wir derselben überhaupt reale Bedeutung zusprechen können, den Eindruck, als ob es sich bei den unperiodischen Polschwankungen mehr um kürzere Zeit anhaltende und dann im umgekehrten Sinne wirkende Störungen handelt.

Störungen dieses Charakters würden sich in unserer obigen Bezeichnung als direkte Einflüsse auf den Impuls der Drehbewegung ergeben, wenn eine Massenverschiebung auf der Erde ziemlich plötzlich eingeleitet wird und alsdann wieder zur Ruhe kommt, so daſs der Impuls der Massenverschiebung erst erzeugt und nachher wieder vernichtet wird und die korrespondierende Impulsänderung der Erddrehung zuerst im einen und alsdann im entgegengesetzten Sinne stattfindet. Da wir indessen durchaus keinen Anhalt zu der Annahme haben, daſs derartige Massenverschiebungen von hinreichender Stärke auf der Erde möglich sind, so halten wir es für nutzlos, die soeben angedeutete Vorstellung weiter auszuführen. —

Hinsichtlich der allgemeinen analytischen Entwickelungen dieses Paragraphen sei noch hervorgehoben, daſs die für die Behandlung des Erdkörpers von variabler Massenverteilung grundlegenden Gleichungen (3) unmittelbar aus unserer Auffassung der Eulerschen Gleichungen entspringen, auch für den Fall, wo die Koordinatenaxen nicht Hauptaxen des Erdkörpers sind oder bleiben. Unter Festhalten an den einmal gewählten Koordinaten gelangten wir dann durch bloſse Spezialisierung auf den besonderen vorliegenden Fall zu der einfachsten Gleichungsform (17). In der Litteratur wird das Problem am eingehendsten von G. H. Darwin**) behandelt. Darwin legt dabei als Koordinatenaxen nicht wie wir im Erdkörper feste Axen, sondern die im Erdkörper beweglichen jeweiligen Hauptaxen zu Grunde und kommt auf diese Weise ebenfalls zu den Endgleichungen (17). Die der Fig. 107b zu Grunde liegenden Rechnungen sind zuerst von R. Radau***) gegeben worden, weshalb die Ellipse jener Figur gelegentlich als Radau'sche Ellipse bezeichnet wird. Unter allgemeineren Voraussetzungen diskutiert F. R. Helmert†) den Zusammenhang zwischen der Ellipse des Trägheitspoles und des Rotationspoles.

Unsere Darstellung der Polschwankungen würde aber unvollständig sein, wenn wir nicht neben den hinsichtlich des Rotationspoles *centri-*

*) Vgl. Tisserand, Mécanique céleste II, Chap. 29, art. 208 und Chap. 30, art. 218.

**) G. H. Darwin: On the influence of Geological Changes on the Earth's Rotation. London, Phil. Trans. 167 (1877), mit einem Anhang von Lord Kelvin.

***) R. Radau, Comptes Rendus 111 (1890) und Bulletin Astronomique 7 (1890).

†) F. R. Helmert, Astronom. Nachr. 126 (1891), Nr. 3014.

Hosted by Google

fugalen Wirkungen der Massentransporte noch gewisse *centripetale* Tendenzen erwähnen würden, die durch Auftreten von Reibungseinflüssen veranlaſst werden und die in gewisser Weise die Bewegung des Rotationspoles beruhigen und vereinfachen können, so wie jene dieselbe stören und komplizieren.

Wir denken in erster Linie an die Reibung, welche *Ebbe und Flut* mit sich bringt und zwar zunächst die gewöhnliche durch Mond- oder Sonnenanziehung hervorgebrachte. Schon Immanuel Kant hat 1754 das Vorhandensein einer solchen Reibung betont und hat daraus die Notwendigkeit einer säkularen Verlängerung des Sterntages abgeleitet. Wie diese Reibung im Einzelnen zustande kommt, brauchen wir hier nicht zu erörtern*); für unsere Zwecke genügt die folgende, etwas groteske Vorstellung: Auf der mit Wasser bedeckten Erdoberfläche sind an den diametralen Enden eines Durchmessers die beiden Flutberge angehäuft; die Erde rotiert unter ihnen fort, während die Flutberge selbst stillstehen bez. nach Maſsgabe der Mondbewegung ihre Stelle verhältnismäſsig langsam verändern. Sie übertragen durch die Viscosität des an der Erde haftenden Wassers ein Drehmoment auf diese, welches der Erddrehung entgegenwirkt. Wenn der Mond genau im augenblicklichen Äquator der Erde fest stünde und die Symmetrie der Flutbewegung durch die Kontinente nicht gestört wäre, würde die Axe des Drehmomentes mit der augenblicklichen Rotationsaxe übereinstimmen und seine Gröſse der Gröſse dieser proportional sein. Die hierdurch gekennzeichnete denkbar einfachste Bestimmung des Drehmomentes der Flutreibung wollen wir dann als annähernd und im Mittel allgemeingültig ansehen. Wir können etwa die beiden Flutberge mit den beiden Backen einer Eisenbahnbremse vergleichen, die sich an das rotierende Rad anlegen und dessen Umdrehung verlangsamen.

Die weitere Verfolgung des Einflusses der Flutreibung ist hierdurch auf ein Kreiselproblem zurückgeführt, welches bereits in Kap. VII, § 7 als Problem des Luftwiderstandes behandelt wurde: Ein sonst kräftefreier Kreisel steht unter dem Einfluſs einer Drehkraft, deren Axe die augenblickliche Drehungsaxe ist und deren Gröſse der augenblicklichen Rotation negativ proportional ist. Wir sahen, daſs bei einem solchen Kreisel die Rotation allmählich erlischt und daſs gleichzeitig die Rotationaxe asymptotisch und spiralig mit der Axe des gröſsten Hauptträgheitsmomentes sich zu vereinigen strebt (vgl. pag. 588 und die Figur von pag. 589). Bei der Erde ist die Axe gröſsten

*) Vgl. hierzu Kap. 16 und 17 des Werkes von G. H. Darwin, auch wegen weiterer Litteratur. Insbesondere sei noch auf die dort erörterten überraschenden kosmogonischen Wirkungen der Gezeitenreibung hingewiesen.

Hosted by Google

Trägheitsmomentes die polare Hauptträgheitsaxe. Es könnte also scheinen, dafs wir in dieser Flutreibung eine die Polschwankungen ausgleichende und dämpfende Wirkung haben und dafs wir es dieser Wirkung verdanken, wenn trotz temporärer Störungen der Rotationspol im Mittel dem Trägheitspol erfahrungsgemäfs so nahe bleibt.

Indessen lehrt eine Zahlenrechnung, dafs diese Wirkung gänzlich zu vernachlässigen ist. Wir knüpfen dabei an Gl. (1) und (6) von pag. 587 und 588 an. In Gl. (6) bedeutete β den Winkel, den die augenblickliche Rotationsaxe mit der Axe gröfsten Hauptträgheitsmomentes zur Zeit t einschliefst, β_0 denselben Winkel zur Zeit $t = 0$. Indem wir uns auf kleine Winkel β, β_0 beschränken, können wir Gl. (6) schreiben:

$$\frac{\beta}{\beta_0} = e^{-\lambda t\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{C}\right)} = e^{-\frac{\lambda t}{C}\varepsilon},$$

wo ε (rund gleich $1/300$) wie früher die Elliptizität der Erde bedeutet. Nach der angezogenen Gl. (1) ist andrerseits:

$$\frac{r}{r_0} = e^{-\frac{\lambda t}{C}}.$$

Beide Gleichungen zusammengefafst ergeben

$$\frac{\beta}{\beta_0} = \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\varepsilon}.$$

Während also die Flutreibung eine ursprünglich vorhandene Ablenkung β_0 der Rotationsaxe auf die Hälfte ihres Betrages reduziert $\left(\beta = \frac{1}{2}\beta_0\right)$, reduziert sie gleichzeitig die ursprünglich vorhandene Erdrotation r_0 auf den Bruchteil

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{1/\varepsilon} = 2^{-300} = \frac{1}{2}\cdot 10^{-90}$$

ihrerselbst. Mit anderen Worten: *Die Erdrotation müfste vermöge der Flutreibung bereits so gut wie vollständig zur Ruhe gekommen sein, ehe die Hälfte einer ursprünglich vorhandenen Ablenkung der Rotationsaxe ausgeglichen ist.* In solcher Weise aufgefafst kommt also die Flutreibung für die Frage der Polschwankungen überhaupt nicht in Betracht (ebensowenig wie der Massentransport der gewöhnlichen Mond- oder Sonnenflut, vgl. pag. 714) und kann auch nicht (vgl. pag. 593) zur Erklärung säkularer Änderungen der Rotationsaxe, wie sie in der Geologie häufig postuliert worden sind, herangezogen werden.

Indessen giebt es noch eine andere Art Fluten und eine andere Art Flutreibung, welche in wirksamerer Weise den Rotationspol nach dem Trägheitspol zurücklenken dürften, nämlich diejenigen Fluten, die durch die Polschwankungen selbst hervorgerufen werden (vgl. pag. 684, wo wir insbesondere den vierzehnmonatlichen Bestandteil dieser Fluten

Hosted by Google

erwähnten). Auch diese Fluten werden mit Reibung verbunden sein und zwar kann man sich vorstellen, daſs die Reibung hier der *Änderung der Rotationsaxe* entgegenwirkt und daſs ihre Axe auf der Rotationsaxe *senkrecht* steht, während die Reibung bei der gewöhnlichen Mond- und Sonnenflut von der jeweiligen Gröſse der *Rotation selbst* abhängt und ihrer Axe nach mit der jeweiligen Rotationsaxe *zusammenfällt.*

Wollen wir uns von dem Zustandekommen dieser Fluten eine möglichst einfache, wenn auch wieder etwas rohe Vorstellung bilden, so können wir folgendermaſsen sagen: Die Lage der Rotationsaxe im Erdkörper zu einer gewissen Zeit sei durch die Gröſsen p, q, r gegeben; dieser Lage entspricht, wenn von der Einwirkung der Kontinente abgesehen wird, eine Anordnung der Wasserbedeckung, bei welcher letztere einen Flutgürtel um den zur Rotationsaxe senkrechten, augenblicklichen Äquator bildet. In einem folgenden Zeitpunkte sei die Lage der Rotationsaxe gegeben durch $p + p'dt$, $q + q'dt$, $r + r'dt$; der Flutgürtel legt sich jetzt um den nunmehrigen Äquator herum und ist gegen seine vorherige Lage gedreht. Wir führen ihn aus seiner ersten in seine zweite Lage über, indem wir ihn um die gemeinsame Senkrechte zur ersten und zweiten Lage der Rotationsaxe drehen und zwar durch einen Winkel, welcher dem Ablenkungswinkel der Rotationsaxe gleich ist. Die Flutreibung wirkt dieser Drehung entgegen; wir nehmen der Einfachheit wegen an, daſs das Moment der Flutreibung um dieselbe Axe wirkt, wie diese Drehung erfolgt, und der Gröſse der Drehungsgeschwindigkeit proportional ist. Die Axe der Flutreibung berechnet sich dann durch die Unterdeterminanten des folgenden Schemas:

$$\begin{vmatrix} p & q & r \\ p' & q' & r' \end{vmatrix}.$$

Die Komponenten der Flutreibung werden daher den folgenden Ausdrücken proportional

$$qr' - rq', \quad rp' - pr', \quad pq' - qp'.$$

Berücksichtigen wir, daſs die Gröſsen p, q, p', q', r' klein sind und daſs r näherungsweise gleich ω ist, so können wir unter Vernachlässigung kleiner Gröſsen zweiter Ordnung dafür schreiben:

$$-\omega q', \quad \omega p', \quad 0.$$

Mit Benutzung eines positiven Proportionalitätsfaktors λ setzen wir dementsprechend die Komponenten der Flutreibung den folgenden Gröſsen gleich

$$-\lambda A q', \quad +\lambda A p', \quad 0.$$

Hosted by Google

In der That erkennt man leicht, dafs durch diesen Ansatz den oben über Gröfse, Axe und Sinn des Flutreibungsmomentes gemachten Verabredungen entsprochen wird, falls die Drehgeschwindigkeit der Erde ω als positiv gerechnet wird, die Koordinatenaxen also die auf pag. 720 angegebene Lage haben. Das Trägheitsmoment A wurde den vorstehenden Ausdrücken als Faktor hinzugefügt, damit die Gröfse λ der Dimension nach eine reine Zahl vorstellt, was für das Folgende bequem ist.

Um den Einflufs dieser Flutreibung auf die Polschwankungen zu bestimmen, gehen wir auf die Eulerschen Gleichungen zurück, denen wir rechterhand die soeben bestimmten Komponenten der Flutreibung hinzufügen. Die Gleichung für die Komponente r wird dadurch in erster Näherung nicht abgeändert. Diese Komponente können wir daher auch mit Rücksicht auf die Flutreibung als konstant ansehen und gleich ω setzen; mit anderen Worten: die Länge des Sterntages wird durch die jetzt in Rede stehenden Fluten innerhalb der von uns festgehaltenen Genauigkeitsgrenze nicht verlängert. Die Eulerschen Gleichungen für die Komponenten p und q des Drehungsvektors lauten, wenn wir von der Störung der Bewegung durch Massentransporte absehen und nur die freien Schwingungen der Erdaxe betrachten:

$$A p' = (A - C)\,\omega q - \lambda A q',$$
$$A q' = (C - A)\,\omega p + \lambda A p'.$$

Wir fassen sie zum Zweck der Integration in der öfters beschriebenen Weise in die eine komplexe Gleichung zusammen:

$$A(p' + iq') = (C - A)\, i\omega (p + iq) + i\lambda A (p' + iq'),$$

wofür wir mit Einführung der Elliptizität ε auch schreiben können:

$$(1 - i\lambda)(p' + iq') = \varepsilon i \omega (p + iq).$$

Die Zahl λ wird jedenfalls klein gegen 1 sein, da im anderen Falle periodische Polschwankungen überhaupt nicht zustande kommen könnten. Daher können wir ohne merklichen Fehler die Gleichung auch so umformen:

$$\frac{p' + iq'}{p + iq} = \varepsilon i \omega (1 + i\lambda)$$

und folgendermafsen integrieren:

$$p + iq = a e^{-\varepsilon\omega\lambda t + \varepsilon i \omega t}.$$

a ist die Integrationskonstante, welche von der Anfangslage der Erdaxe, d. h. den der Betrachtung vorausgegangenen Störungen abhängt.

Von hier aus ergeben sich folgende Schlüsse: Die Reibung läfst die Periode der Polschwankungen ungeändert (ungeändert bis auf Gröfsen



zweiter Ordnung); ihre Frequenz wird auch jetzt durch das Produkt $\varepsilon\omega$ bestimmt; dagegen erscheinen die Schwingungen jetzt vermöge der Reibung *gedämpft*. Der Dämpfungsfaktor beträgt für die Dauer einer freien Schwingung nach der vorstehenden Formel $e^{-2\pi\lambda}$. Vermöge dieser Dämpfung wird ersichtlich der Rotationspol dem Trägheitspole genähert; auch ist es klar, daſs hierdurch der früher hervorgehobene Resonanzeffekt gemildert wird, sodaſs beim Zusammenfallen der freien und erzwungenen Schwingungen die Amplitude des Rotationspoles nicht mehr unendlich wird, sondern eine durch den Wert des Dämpfungsfaktors bestimmte endliche Gröſse annimmt.

Über die zahlenmäſsige Gröſse dieser Dämpfung, insbesondere der Dämpfungskonstanten λ, sind wir leider zunächst völlig im Unklaren. Da wir schon über die Gröſse der fraglichen Fluten (vgl. pag. 706) theoretisch nichts auszusagen vermochten, wird es noch weniger möglich sein, die Gröſse ihrer Reibungswirkung zahlenmäſsig abzuschätzen.

Wir wollen noch bemerken, daſs sehr wahrscheinlich auch die im vorigen Paragraphen besprochenen Deformationen des Erdkörpers mit Energieverlusten verbunden sind und daher ebenfalls einen Beitrag zur Dämpfung der freien Schwingungen liefern werden. Wenigstens ist uns kein elastischer Körper bekannt, in welchem einmal erregte Deformationsschwingungen nicht alsbald abstürben; wir schieben diesen Umstand auf das Auftreten innerer Reibungsvorgänge oder elastischer Nachwirkungen. Es wäre nun höchst unphysikalisch, anzunehmen, daſs dies bei dem Erdkörper anders sein sollte. Infolgedessen scheint es angemessen, neben der Flutreibung auch die innere Reibung des Erdkörpers bei seinen früher beschriebenen Formänderungen als eine mögliche Dämpfungsursache der Polschwankungen ins Auge zu fassen.

Bisher hat man bei der rechnerischen Behandlung der Polschwankungen die dämpfende Wirkung der verschiedenen möglichen Energieverluste, die ja in analogen Fällen bei sonstigen mechanischen Problemen mit Recht berücksichtigt wird*), wohl stets vernachlässigt, indem man die Polbahn durch eine nach reinen, ungedämpften trigonometrischen Funktionen der Zeit fortschreitende Fourier'sche Reihe darstellte (vgl. die Citate auf *Chandler* pag. 673 und *van de Sande Bakhuyzen* pag. 682). Auch unsere graphische Reduktion der Polbahnen in § 6 dieses Kapitels fuſste auf dieser Annahme und würde zu modifizieren sein, wenn wir die Dämpfung berücksichtigen bez. wenn wir aus der thatsächlich beobachteten Polbahn auſser den verschiedenen in der Polbahn versteckten

*) Vgl. z. B. Routh, Dynamik starrer Körper, Bd. II (deutsche Ausgabe Leipzig 1898) Kap. VII § 331—333.

Hosted by Google

Perioden auch die Gröſse ihrer Dämpfungen ermitteln wollen. Da eine theoretische Vorausberechnung der Dämpfungskonstante λ ziemlich aussichtslos erscheint, so sollte man vielleicht versuchen, in der soeben angedeuteten Weise aus den Polschwankungen selbst darüber Aufschluſs zu erhalten.

Natürlich ist die oben zu Grunde gelegte Vorstellung über die Wirkung der Polschwankungsfluten eine recht idealisierte; wegen des Einflusses der Kontinente auf die Flutbewegung werden die Verhältnisse in Wirklichkeit viel komplizierter liegen. Es wird daher erwünscht sein, ohne spezielle Annahmen zuzulassen, durch eine ganz allgemeine Betrachtung, die auch den Fall der Deformationsreibung im Innern des Erdkörpers umfaſst, die Wirkung irgend welcher energieverzehrender Umstände wenigstens ihrem Sinne nach zu bestimmen.

Bei den Polschwankungen und den durch sie erzeugten Fluten und Deformationen sowie der zugehörigen Flutreibung und Deformationsreibung kommen nur innere Kräfte ins Spiel, die den Gesamtimpuls des Massensystems, das wir Erde nennen, ungeändert lassen (im Gegensatz zu der vorher betrachteten Flutreibung, die durch die äuſseren Kräfte von Sonnen- und Mondanziehung hervorgebracht wird). Für die Komponenten des Gesamtimpulses gilt daher die Gleichung

$$L^2 + M^2 + N^2 = \text{const.},$$

die wir als Gleichung einer Kugel deuten können. Andrerseits wird die lebendige Kraft des Systems durch die Reibung vermindert, indem ein Teil derselben in Wärme umgesetzt wird. Wenn wir uns gestatten, den Ausdruck der lebendigen Kraft eines starren Kreisels auf unser in sich bewegliches System zu übertragen, so können wir schreiben

$$\frac{L^2 + M^2}{A} + \frac{N^2}{C} = 2\,T,$$

und können diese Gleichung in den Koordinaten L, M, N für jeden Wert von T als ein Rotationsellipsoid deuten. Und zwar handelt es sich um ein verlängertes Rotationsellipsoid (wegen $C > A$), welches, indem es sich selbst ähnlich bleibt, sich allmählich zusammenzieht (wegen der allmählichen Abnahme von T). Auf der Schnittkurve beider Flächen (Kugel und Ellipsoid) muſs der Endpunkt des Impulsvektors L, M, N liegen; diese Schnittkurve zieht sich aber bei der allmählichen Verkleinerung unseres Ellipsoides auf einen Punkt der N-Axe zusammen

Fig. 109.

Hosted by Google

(vgl. Fig. 109); der Impulsvektor und zugleich mit ihm die Rotationsaxe geht dabei in die polare Hauptträgheitsaxe, der Bewegungszustand also in die einfache gleichförmige Umdrehung um diese Axe über.

Insoweit als diese Überlegung auf den Fall der Flutreibung oder auf andere dissipative Einflüsse anwendbar ist, dürfen wir behaupten, daſs solche Einflüsse irgendwie erzeugte Störungen des einfachsten Bewegungszustandes der Erde ausgleichen und die Lage des Rotationspoles auf der Erdoberfläche stabilieren werden.

§ 9. Der Nachweis der Erdrotation durch die Kreiselwirkung. Foucaults Gyroskop und Gilberts Barogyroskop.

Nachdem Léon Foucault im Jahre 1851 seinen glänzenden Pendelversuch zum Nachweis der Erdrotation durchgeführt hatte, unternahm er es im folgenden Jahre, demselben Zweck die Kreiselwirkungen dienlich zu machen. Er benutzte einen Kreisel im Cardanischen Gehänge (vgl. z. B. die schematische Figur 2 von pag. 2), dessen einzelne Teile: Schwungring, innerer und äuſserer Ring, mit gröſster Sorgfalt so justiert waren, daſs der Schnittpunkt ihrer Drehaxen zugleich Schwerpunkt jedes dieser Teile war. Foucaults Versuchsanordnung war eine doppelte: das eine Mal*) lieſs er dem Kreisel seine *drei Freiheitsgrade*, indem er den äuſseren Ring um eine vertikale Axe in Spitzen drehbar machte. Diese Spitzen dienten dabei nicht sowohl zum Tragen des Kreisels, als zur Verhinderung seitlicher Bewegungen; getragen wurde das Gewicht des Kreisels vielmehr durch einen torsionslosen Faden, an dem der äuſsere Ring aufgehängt war. Der innere Ring ruhte mittels Schneiden auf gewissen Auflagerflächen des äuſseren Ringes. Das andere Mal**) stellte er den inneren Ring gegen den äuſseren fest, operierte also mit einem Kreisel von nur mehr *zwei Freiheitsgraden*, welcher vermöge seiner Verbindung mit der Erde in gewisser Weise geführt wird.

Im Falle des Kreisels von drei Freiheitsgraden bleibt nach Foucault bei starker Rotation des Schwungringes *die ursprüngliche Richtung seiner Axe im absoluten Raume fest*, oder, anders ausgedrückt, weist diese Axe beständig *nach demselben Punkte des Fixsternhimmels*. Von der Erde aus gesehen bewegt sich also jeder ihrer Punkte parallel der

---

*) Sur une nouvelle démonstration expérimentale du mouvement de la Terre, Comptes Rendues Bd. 35, Paris 1852, pag. 421.

**) Sur les phénomènes d'orientation des corps tournants entraînés par une axe fixe à la surface de la Terre — Nouveaux signes sensibles du mouvement diurne. l. c. pag. 524.

Hosted by Google

Richtung des Äquators. Geometrische Betrachtungen der einfachsten Art zeigen von hier aus die Richtigkeit der folgenden Angaben:

Weist die Axe zu Beginn des Versuches nach dem Zenith, so bildet sie nach der Beobachtungszeit Δt den Winkel $\omega \cos\varphi \Delta t$ (ω = Winkelgeschwindigkeit der Erdumdrehung, φ = geographische Breite) mit der Lotlinie, weil in der gleichen Zeit das ursprüngliche Zenith diesen Bogen um den Pol des Himmels beschreibt. Liegt andrerseits die Axe des Schwungringes ursprünglich horizontal und in der Richtung des Meridians, so bleibt sie für eine hinreichend kurze Beobachtungszeit horizontal und bildet nach der Zeit Δt den Winkel $\omega \sin\varphi \Delta t$ mit dem Meridian, weil ein Stern am Horizont unter dem Meridian den Polabstand φ (oder $\pi - \varphi$) besitzt und während der Zeit Δt einen Bogen $\omega \sin\varphi \Delta t$ von horizontaler Richtung beschreibt. Derselbe Ausdruck $\omega \sin\varphi \Delta t$, der übrigens auch bei dem Foucaultschen Pendelversuch auftritt, gilt auch für die Horizontalkomponente der Winkeländerung bei beliebiger horizontaler Anfangslage der Schwungringaxe. Fragen wir uns nämlich nach der scheinbaren Bewegung eines Sternes im Horizont bei beliebigem Azimuth, so besteht dieselbe aus einer Drehung ω um die Polaraxe, die wir uns in eine Drehung $\omega \sin\varphi$ um die Lotlinie und eine Drehung $\omega \cos\varphi$ um den Meridian zerlegen können. Die erstere Komponente liefert die Horizontalbewegung des Sternes, welche während der Beobachtungszeit Δt also $\omega \sin\varphi \Delta t$ betragen wird; die letztere Komponente giebt die Höhenänderung des Sternes. Die erstere Komponente und also auch die Horizontalkomponente der Bewegung der Kreiselaxe ist hiernach von dem Azimuth der Anfangsstellung unabhängig.

An letzteren Umstand knüpft die Versuchsanordnung von Foucault an. Man beachte, daſs bei horizontaler Anfangslage die Bewegung der Kreiselaxe durch das Cardanische Gehänge von selbst in ihre zwei Komponenten zerlegt wird, daſs nämlich die Bewegung des äuſseren Ringes die horizontale Komponente der Bewegung der Kreiselaxe wiedergiebt, während sich die Bewegung des inneren Ringes allein durch die Höhenänderung der Kreiselaxe bestimmt. Foucault beobachtet daher unter dem Mikroskop den äuſseren Ring, dessen Verdrehung gleich $\omega \sin\varphi \Delta t$ sein soll. Als gröſstmöglichen Wert der Beobachtungsdauer giebt Foucault 8 bis 10 Minuten an. Berechnen wir also mit $\Delta t = 8$ Min. und $\varphi = 49^0$ (ungefähre Breite von Paris) die zu erwartende Ablenkung, so ergiebt sich in Gradmaſs:

$$\omega \sin\varphi \Delta t = \frac{360 \cdot 8}{24 \cdot 60} 0{,}75 = 1^0{,}5.$$

Diese ziemlich beträchtliche Verdrehung müfste sich zumal unter dem Mikroskop mit grofser Sicherheit feststellen lassen.

Hiermit contrastiert einigermafsen der Umstand, dafs Foucault nur von dem Sinn der Verdrehung spricht, der sich bei seinen Versuchen richtig, also dem Sinne der Erdrotation entgegengesetzt ergab, dafs er dagegen Zahlenwerte aus seinen Beobachtungen nicht mitteilt. Wir wissen nicht, wie weit diese mit den theoretischen Werten gestimmt haben. Solange aber die quantitative Übereinstimmung nicht nachgewiesen ist oder solange die Fehlerquellen, welche die Nichtübereinstimmung bewirken, unbekannt sind, können die Versuche kaum als unwiderleglicher Beweis der Erdrotation angesprochen werden; es könnte ja sein, dafs im vorliegenden Falle die Fehlerquellen die Ablenkung des Ringes stärker beeinflussen wie die Erdrotation selbst und dafs der richtige Sinn des Resultates nur scheinbar durch zufällige Gruppierung der verschiedenen Fehler hergestellt wird.

Als Fehlerquellen kommen hier namentlich eine nicht genaue Centrierung des Apparates und die Reibung in den verschiedenen Lagern in Betracht. Wohl ist der Foucaultsche und Gaufsische *Pendelversuch* von Kamerlingh-Onnes*) in musterhafter Weise nach der quantitativen Seite hin auf alle Fehlerquellen durchgeprüft worden; für den Foucaultschen *Kreiselversuch* dagegen scheint eine solche Prüfung nie unternommen zu sein.

Die grofse historische Bedeutung des Foucaultschen Kreiselversuches scheint uns daher weniger in dem Nachweis der Erdrotation selbst als darin zu liegen, dafs durch diesen Versuch die allgemeine Aufmerksamkeit auf die Kreiselwirkungen gelenkt wurde und dafs die Kenntnis der Kreiselwirkungen durch die geniale, von der Formel losgelöste Unmittelbarkeit der Foucaultschen Auffassung wesentlich gefördert wurde.

Bevor wir die Theorie dieses Versuches kritisch beleuchten, wollen wir zunächst Näheres über die zweite Versuchsanordnung von Foucault, über den *Kreisel von zwei Freiheitsgraden*, berichten. Die Axe des Schwungringes bleibt jetzt nicht mehr im Raume fest; *vielmehr strebt dieselbe nach Foucault sich der Axe der Erddrehung soweit parallel zu stellen, als es die besonderen Umstände des Versuches erlauben.* Foucault spricht daher von der *Tendenz der Drehaxen zum Parallelismus* **), indem er unter Parallelismus der Axen nicht nur das Zusammenfallen der Axenrichtungen, sondern gleichzeitig das Übereinstimmen des Dreh-

---

*) Dissertation Groningen 1879. Nieuve bewijzen voor de aswenteling der aarde.

**) Sur la tendance des rotations au parallélisme. Comptes Rendues l. c. pag. 602.

sinnes um die Axen versteht — man könnte genauer sagen: *Tendenz zum gleichsinnigen oder homologen Parallelismus.*

Etwa gleichzeitig mit Foucault hat G. Sire*) dasselbe Gesetz zum Gegenstand einer Mitteilung an die Pariser Akademie gemacht und auf den Nachweis der Erdrotation angewandt, ohne selbst Versuche auszuführen. Die theoretischen Überlegungen von Sire, durch welche dieses Gesetz gestützt wird, sind indessen nicht einwandfrei, da sie an einer gewissen Vieldeutigkeit des Wortes Axe leiden (Figurenaxe, Rotationsaxe, Impulsaxe). Etwas Ähnliches läſst sich wohl auch gegen die glänzend geschriebenen Ausführungen Foucaults sagen; allerdings beabsichtigen dieselben bei ihrer Kürze mehr beschreibender als beweisender Natur zu sein. (Vgl. hierzu unsere Kritik der populären Kreisellitteratur in Kap. V, § 3 unter 2).

Foucault untersucht auf Grund des genannten Gesetzes das Verhalten der Schwungringaxe in den beiden besonderen Fällen, wo die Schwungringaxe entweder nur in der Horizontalebene, oder nur in der Vertikalebene durch den Meridian des Beobachtungsortes frei beweglich ist. Man erreicht dieses, indem man beidemal den inneren Ring unter einem rechten Winkel gegen den äuſseren festklemmt und die Drehaxe des äuſseren Ringes im ersten Falle in die Lotlinie, im zweiten Falle senkrecht gegen die Meridianebene des Beobachtungsortes stellt.

Im ersten Falle, wo die Axe des Schwungringes die Horizontalebene nicht verlassen kann, ist ein wirklicher Parallelismus zwischen ihr und der Erdaxe nicht möglich: die Axe des Schwungringes strebt alsdann derjenigen Richtung zu, welche den kleinsten Winkel mit der Erdaxe bildet, d. i. der Richtung des Meridianes. Und zwar wird diejenige Seite der Axe, von der aus gesehen der Schwungring entgegen dem Uhrzeigersinne rotiert, nach Norden weisen, weil die Erde um den Nordpol in dem gleichen Sinne rotiert. *Unsere horizontal bewegliche Schwungringaxe verhält sich also ähnlich wie die Magnetnadel im Deklinationskompaſs* (natürlich mit dem Unterschiede, daſs im Foucaultschen Versuch der astronomische Meridian an die Stelle des magnetischen tritt). Im Anschluſs an diese Analogie können wir diejenige Seite der Axe, von der aus gesehen die Schwungringumdrehung umgekehrt wie die Uhrzeigerbewegung erfolgt, als *Nordpol* des Schwungringes, die umgekehrte Seite als *Südpol* bezeichnen.

Im anderen Falle, wo die Axe des Schwungringes in der Meridian-

*) Eine spätere Veröffentlichung von Sire findet sich in der Bibliothèque universelle de Genève, Arch. d. scienc. phys. et natur. Bd. 1 (1858) pag. 105.



ebene beweglich ist, wird der genaue Parallelismus dieser Axe mit der Erdaxe nicht nur angestrebt, sondern auch (bei hinreichend lang anhaltender Schwungringumdrehung) erreicht. Die Axe des Schwungringes bewegt sich, wenn sie etwa anfangs horizontal stand, in solcher Weise, dafs auf der nördlichen Halbkugel ihr „Nordpol" aus der Horizontalebene nach oben hin heraustritt und dafs sich die Verbindungslinie Süd-Nordpol des Schwungringes mit der Verbindungslinie Süd-Nordpol der Erde gleichsinnig parallel richtet. *Unsere in der Meridianebene bewegliche Schwungringaxe kann also mit der Magnetnadel in einem Inklinationskompafs verglichen werden* (natürlich abermals mit dem Unterschiede, dafs an die Stelle der auf der Erdoberfläche bekanntlich recht unregelmäfsig verlaufenden Linien gleicher Inklination hier die genauen geographischen Breitengrade treten würden). Dabei besteht aber der wesentliche Unterschied, *dafs sich der „Nordpol" des Schwungringes auf der nördlichen Halbkugel hebt, während sich der der Inklinationsnadel senkt.*

Theoretisch liegt also, wie Foucault betont, die Möglichkeit vor, ohne astronomische oder magnetische Beobachtungen sowohl die Lage des Meridians wie nach Bestimmung desselben die Lage der Weltaxe für einen beliebigen Ort aus blofsen Kreiselbeobachtungen abzuleiten. Man könnte daran denken, in der Tiefe eines Bergwerks von dieser Möglichkeit Nutzen zu ziehen.

Es ist selbstverständlich, dafs die Einstellung der Kreiselaxe in den Meridian bez. in die Richtung der Weltaxe nicht aperiodisch, sondern oscillatorisch vor sich gehen mufs. Die Drehkraft, welche z. B. die horizontal bewegliche Kreiselaxe dem Meridian zuführt, erzeugt eine gewisse Drehbeschleunigung und Drehgeschwindigkeit um die vertikale Axe. Während nun bei meridionaler Lage der Kreiselaxe die Drehkraft verschwindet, so verschwindet darum nicht gleichzeitig die Geschwindigkeit. Diese führt die Kreiselaxe vielmehr über die Gleichgewichtslage hinaus, worauf die Richtkraft ihren Sinn umkehrt und zuerst verlangsamend, dann im umgekehrten Sinne beschleunigend wirkt. Die Kreiselaxe mufs also um den Meridian herumpendeln — ebenfalls in Analogie mit der Magnetnadel. Steht die Kreiselaxe anfänglich im Meridian, aber so dafs ihr „Nordpol" nach Süden weist, so ist auch diese Lage an sich eine Gleichgewichtslage, weil die auf die Kreiselaxe wirkende Drehkraft verschwindet, aber ersichtlich eine instabile: bei einer kleinen Abweichung von dieser Lage strebt die Drehkraft die Abweichung zu vergröfsern und das Nordende der Axe nach Norden überzudrehen.

Foucault verwahrt sich dagegen, dafs auf dem beschriebenen Wege

Hosted by Google

die Lage des Meridians oder die Stellung der Weltaxe im Raume hinreichend genau bestimmt werden könnte. Wie es scheint, hat Foucault auch die zuletzt genannten Versuche mehr auf ihre allgemeine Möglichkeit wie auf ihre exakte Durchführbarkeit hin geprüft. —

Wir erwähnen noch, dafs Foucault im Anschlufs an seine Versuche das jetzt vielfach gebräuchliche Wort *Gyroskop* geprägt hat. Dieses drückt in schlagender Weise das Resultat der Foucaultschen Versuche aus, *dafs nämlich der Kreisel ein Mittel ist, um vorhandene Drehbewegungen* (oder Gyrationen) *kenntlich zu machen*, ähnlich wie das Elektroskop ein Hülfsmittel bezeichnet, das Vorhandensein elektrischer Ladungen sichtbar zu machen. Würde es gelingen, auch die Gröfse einer vorhandenen Drehbewegung durch quantitative Messung der Kreiselbewegungen festzustellen, so dürfte man dem Kreisel sogar die weitergehende Bezeichnung eines „Gyrometers" beilegen.

Dagegen scheint es uns unzweckmäfsig, die Bezeichnung Gyroskop zu verallgemeinern und als gleichbedeutend mit dem Worte Kreisel zu gebrauchen, was in der Litteratur häufig geschehen ist. In der That bringt doch die Bezeichnung Gyroskop nur eine besondere Anwendung des nach den verschiedensten Seiten hin interessanten und wichtigen Kreiselbegriffes zum Ausdruck und es liegt kein Grund vor, die charakteristische Bezeichnung *Kreisel (turbo, toupie, top)* zu verlassen. —

Wir haben nun die Theorie der Foucaultschen Versuche, zunächst desjenigen mit dem Kreisel von drei Freiheitsgraden, zu vertiefen. Dabei liegt es uns fern, diesen Versuch mit ausgedehnten analytischen Entwickelungen aus der Theorie der Relativbewegungen begleiten zu wollen, wie sie thatsächlich angestellt worden sind, Entwickelungen*), deren Endresultat nach den ihnen zu Grunde liegenden Voraussetzungen schliefslich kein anderes sein kann, als die Bestätigung der Foucaultschen Angabe, wonach die Kreiselaxe ihre Lage im absoluten Raume im Wesentlichen beibehält. Die Schwierigkeit und Unübersichtlichkeit der fraglichen Entwickelungen hat nur darin ihren Grund, dafs in ihnen nicht konsequent vernachlässigt wird, dafs nämlich das Gyroskop nicht durchweg als verschwindend klein gegen die Erde oder seine Umdrehungsgeschwindig-

*) Es handelt sich u. A. um Arbeiten von Quet (Liouvilles Journal Bd. 18 (1853)), Lottner (Crelles Journal Bd. 54 (1857)), Bour (Liouvilles Journal (2) Bd. 8 (1863)). Zusammengestellt bei Gilbert: Étude historique et critique sur le problème de la rotation (aus Annales de la Société Scientifique de Bruxelles Bd. 2 (1878)). Wir nennen ferner die grofse Arbeit von Gilbert: Mémoire sur l'application de la méthode de Lagrange à divers problèmes du mouvement relatif (Ebenda Bd. 6 und 7 1881—1883) und das Werk von Budde: Allgemeine Mechanik der Punkte und starren Systeme (Berlin 1890, 1891, Bd. 2 Nr. 294).

Hosted by Google

keit nicht durchweg als unendlich grofs gegen die Erdumdrehung vorausgesetzt wird. Wir verweisen dieserhalb auf die zutreffende Kritik von E. Guyou*), der wir nur noch hinzufügen möchten, dafs man mit demselben ungeheuren Grade der Annäherung, mit dem man die Geschwindigkeit der Erdumdrehung gegen die der Kreiselrotation vernachlässigt, auch die Trägheitswirkung des äufseren und inneren Ringes gegen die des Schwungringes vernachlässigen darf, worauf wir unten zurückkommen werden.

Zunächst wollen wir ausdrücklich verabreden, dafs es erlaubt sei, den äufseren und inneren Ring als *masselos* zu betrachten und *von Reibungswirkungen abzusehen.* Dann haben wir allein von dem Schwungringe zu sprechen. Dieser ist um seinen Schwerpunkt frei beweglich und von Kräften frei, da die Schwerkraft als im Stützpunkte angreifend nicht in Betracht kommt. Die Bewegung des Schwungringes besteht daher allgemein gesprochen in einer *regulären Präcession* relativ zum absoluten Raume. Die an der Erddrehung teilnehmende Schwerpunktsbewegung beeinflufst diese Drehbewegung in keiner Weise. Denn Bewegung des Schwerpunktes und Drehung um den Schwerpunkt sind wie bekannt zwei Vorgänge, die sich beim Fehlen äufserer Kräfte glatt superponieren, ohne sich irgendwie zu stören.

Dies würde auch dann noch gelten, wenn die Schwerpunktsbewegung nicht eine nahezu gleichförmig-geradlinige wäre, wie sie es bei der Erddrehung für den Zeitraum einiger Minuten thatsächlich ist, sondern *wenn der Schwerpunkt in willkürlicher Weise und in beliebigen scharfen Krümmungen geführt würde.* Ja es würde nicht nur gelten für den schnell rotierenden, sondern ebensogut *für den nicht angedrehten Schwungring*, immer unter der Voraussetzung der Reibungslosigkeit der Führungen und der Massenlosigkeit der Ringe. In der That ist die kräftefreie Bewegung des symmetrischen Kreisels bei beliebiger Gröfse der Eigenrotation eine reguläre Präcession; von der gröfseren oder geringeren Eigenrotation, die wir dem Kreisel erteilen, hängt es lediglich ab, ob der entstehende Präcessionskegel bei gegebenem seitlichen Anstofs eine geringere oder gröfsere Winkelöffnung erhält. Wäre es zu erreichen, dafs die Axe des Schwungringes zu Beginn des Versuches momentan im absoluten Raume genau stillsteht, so würde sie ihre Lage gegen den absoluten Raum genau beibehalten, der Öffnungswinkel des Präcessionskegels wäre und bliebe dann genau gleich Null, ganz unabhängig davon, ob der Schwungring um seine Axe rotiert oder nicht,

---

*) Sur une solution élémentaire du problème du gyroscope de Foucault. Comptes Rendues Bd. 106, Paris 1888, pag. 1143.

und ob der Schwerpunkt des Apparates bewegt wird oder nicht; denn nachdem wir die Reibung wegdefiniert haben, giebt es nichts, was die einmal ruhende Schwungringaxe in Bewegung setzen könnte. Wir hätten hier also die von Foucault behauptete Stabilierung der Kreiselaxe im Raume ohne das von Foucault hierfür als unerläſslich angesehene Mittel einer hohen Eigenrotation.

Allerdings ist der soeben vorausgesetzte Anfangszustand der Kreiselaxe experimentell nicht zu erreichen. Der Experimentator kann die anfängliche Ruhe der Kreiselaxe nur vom Standpunkte der Erdbewegung aus beurteilen; er ist bestrebt, nicht die absolute Ruhe im Raume, sondern die relative Ruhe gegen die Erde zu verwirklichen. Nehmen wir an, daſs ihm letzteres genau gelungen sei, und sehen wir zu, wie sich die Bewegung der Kreiselaxe gestaltet, wenn der Kreisel insbesondere nicht angedreht ist.

In der Anfangslage weist die Kreiselaxe bei dem ersten Foucault'schen Versuche horizontal; sie bildet mit der Umdrehungsaxe der Erde den Winkel α, welcher zwischen φ und $\pi - \varphi$ ($\varphi =$ geographische Breite des Ortes) enthalten ist und von dem Azimuth der Kreiselaxe gegen den Meridian abhängt. Der anfängliche Geschwindigkeitszustand besteht in einer Drehung um die Erdaxe von der Gröſse ω ($\omega =$ Erdrotation). Diese Drehung zerlegt sich in eine Komponente $\omega \cos \alpha$ um die Figurenaxe und in eine Komponente $\omega \sin \alpha$ um eine äquatoriale Axe des Schwungringes. Der Anfangsimpuls des Kreisels hat nach denselben Axen die Komponenten $C\omega \cos \alpha$, $A\omega \sin \alpha$; er bildet im Falle des Schwungringes (abgeplattetes Trägheitsellipsoid) mit der Figurenaxe einen Winkel $\beta < \alpha$, welcher bestimmt ist durch

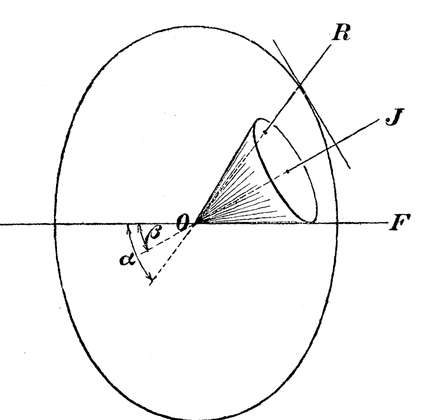


Fig. 110.

$$(1) \qquad \operatorname{tg} \beta = \frac{A}{C} \operatorname{tg} \alpha .$$

Der Winkel β kann auch durch eine bekannte Konstruktion (vgl. p. 106) gefunden werden, die in Fig. 110 angedeutet ist. Aus der Richtung der Rotationsaxe OR, die hier mit der Erdaxe zusammenfällt und der Richtung der Figurenaxe OF folgt die Richtung der Impulsaxe OJ, indem man an die Spur des Trägheitsellipsoides in der Ebene ROF die Tangente im Schnittpunkte mit OR legt und auf diese das Lot von O fällt.

Hosted by Google

Bei der nun folgenden Bewegung beschreibt die Figurenaxe im Raume einen Präcessionskegel um die Impulsaxe von dem soeben bestimmten Öffnungswinkel β. Dagegen beschreibt eine mit der Erde fest verbundene von O auslaufende Richtung vermöge der Erdrotation einen Kegel um die Rotationsaxe der Erde. Aus der Verschiedenheit der Kegel ergiebt sich, dafs auch der nicht eigens angedrehte Kreisel, von der Erde aus beurteilt, Bewegungen ausführen würde und also (bei gänzlich ausgeschalteter Reibung) im Sinne Foucaults als Gyroskop funktionieren würde.

Natürlich ist aber auch die Voraussetzung, dafs sich der Kreisel im Anfangszustande genau in relativer Ruhe gegen die Erde befunden habe, unzulässig. Selbst bei sorgfältigstem Experimentieren wird die Kreiselaxe relativ gegen die Erde eine Anfangsgeschwindigkeit haben, die mit Rücksicht auf die Geringfügigkeit der Erdrotation möglicher Weise gröfser sein kann wie die der letzteren entprechende Geschwindigkeit. Der anfängliche Impulsvector, der sich aus dieser Geschwindigkeit zusammen mit der Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation bestimmt, kann dann jede beliebige Lage und der Präcessionskegel, den die Figurenaxe um diesen Impulsvektor beschreibt, jede beliebige Winkelöffnung haben. Wenn z. B. durch den anfänglichen Anstofs die Komponente der Erdrotation nach der Figurenaxe des Kreisels gerade aufgehoben, die Eigenrotation des Kreisels mithin zufällig Null wird, so würde der Impulsvektor in eine äquatoriale Axe fallen; der Präcessionskegel würde dann in die zu dieser Axe normale Ebene ausarten. Wenn andrerseits die Komponente der Erdrotation nach der Äquatorebene des Kreisels durch den anfänglichen Anstofs zufällig aufgehoben wird, so würde der Präcessionskegel unendlich schmal werden und mit der Figurenaxe zusammenfallen; diese selbst würde dann im Raume absolut stillstehen. Mit Rücksicht auf derartige unkontrollierbare geringfügige Anfangsimpulse würde also die weitere Bewegung des Kreisels völlig unsicher werden.

Und nun ist die Sache die, dafs man dieser Unsicherheit entgeht, wenn man dem Kreisel eine gegen die Erdrotation grofse Eigenrotation erteilt. Hierzu würde z. B. schon eine Geschwindigkeit von einer Umdrehung pro Sekunde genügen, da dieselbe $24 \cdot 60 \cdot 60$ mal gröfser als die Geschwindigkeit der Erdumdrehung ist. Etwa mit dieser Umdrehungsgeschwindigkeit hat Foucault in der That gearbeitet*). Der Gesamtimpuls des Kreisels, der sich aus diesem absichtlichen Eigen-

*) Vgl. hierzu Instructions sur les expériences du gyroscope; in dem Buche: Recueil des travaux scientifiques de L. Foucault, Paris 1878, p. 417.

impuls, dem sonstigen unvermeidlichen Anfangsimpuls und dem Impuls der Erdrotation zusammensetzt, wird alsdann fast genau die Richtung der Figurenaxe haben. Gleichzeitig wird der Präcessionskegel so schmal, dafs wir mit einer für alle Versuche hinreichenden Genauigkeit von einer absoluten Ruhe der Figurenaxe im Raume sprechen können.

Die dem Kreisel zu erteilende Eigenrotation bezweckt also in erster Linie, *von den unkontrollierbaren Anfangsimpulsen beim Ingangsetzen des Kreisels frei zu werden,* wodurch überhaupt erst eine bestimmbare und wohldefinierte Bewegung des Kreisels ermöglicht wird, in zweiter Linie, *den Präcessionskegel hinreichend eng zu machen,* wodurch diese Bewegung so einfach wie möglich wird, wobei sie nämlich merklich in die einfache Rotation um die im Raum feste Figurenaxe übergeht. Ist Ω die Eigenrotation des Kreisels und wie früher ω die Geschwindigkeit der Erdumdrehung, α der anfängliche Winkel der Figurenaxe gegen die Drehaxe der Erde, ferner ω_0 die durch unabsichtliche Anstöfse dem Schwungringe erteilte anfängliche Drehgeschwindigkeit relativ gegen die Erde, γ der Winkel, den die Figurenaxe mit der Axe von ω_0 bildet, so bestimmt sich die Öffnung β des Präcessionskegels ähnlich wie in Formel (1) zu:

$$\text{(2)} \qquad \operatorname{tg} \beta = \frac{A}{C} \cdot \frac{\omega \sin \alpha + \omega_0 \sin \gamma}{\Omega + \omega \cos \alpha + \omega_0 \cos \gamma}.$$

Wenn Ω grofs gegen ω und ω_0, so hat man merklich $\beta = 0$. Nehmen wir, wie es oben geschah, an, dafs ω_0 und ω etwa von gleicher Gröfsenordnung sind, so können wir kurz sagen, dafs die Öffnung des Kegels von der Gröfsenordnung ω/Ω wird und dafs die Richtung der Figurenaxe dann und nur dann als unveränderlich anzusehen ist, wenn man Gröfsen von der Ordnung ω/Ω vernachlässigt.

Somit ist die Foucaultsche Angabe von der im Raum festen Schwungringaxe unter den bisherigen Vernachlässigungen als hinreichend genau bestätigt und gleichzeitig die eigentliche Rolle, die der Eigenrotation hierbei zufällt, deutlicher als bei Foucault hervorgekehrt.

Zunächst soll nun der Einflufs des *Massensystems der Aufhängeringe* studiert bez. nachgewiesen werden, dafs sie ohne merklichen Einflufs auf die Lage des Schwungringes sind. Solange wir sie als masselos voraussetzten, stand die Axe des Schwungringes bei hinreichender Eigenrotation desselben merklich im Raume stille. Dementsprechend wird unter dieser Voraussetzung ein Durchmesser D des inneren Ringes, nämlich der mit der Schwungringaxe zusammenfallende, im Raume festgehalten. Andrerseits wird ein Durchmesser D' des äufseren Ringes, nämlich der in


Hosted by Google

die Lotlinie des Beobachtungsortes fallende, durch seine Verbindung mit der rotierenden Erde in ganz bestimmter Weise geführt. Es ist aber klar, dafs die Bewegung des Systems unserer beiden Ringe durch Angabe der Bewegung zweier Durchmesser D und D' vollständig festgelegt ist: Wenn der Durchmesser D wirklich im Raume genau stillsteht und der Durchmesser D' genau die Bewegung der Lotlinie mitmacht, so ist die Bewegung unserer beiden Ringe dadurch *zwangläufig* gemacht. Ihre Drehgeschwindigkeit wird hierbei ersichtlich *von der Gröfsenordnung der Geschwindigkeit der Erdrotation.* Des Näheren sahen wir bereits pag. 732, dafs, solange die Schwungringaxe relativ zur Erde wenig von ihrer horizontalen Anfangslage abweicht, die Winkelgeschwindigkeit des äufseren Ringes gleich $\omega \sin \varphi$ sein würde; die des inneren Ringes wird, wie gleichfalls aus der angezogenen früheren Überlegung folgt, gleich $\omega \cos \varphi \sin \lambda$, wo λ das Azimuth der Kreiselaxe gegen den Meridian des Beobachtungsortes bedeutet. Indem des Weiteren die Schwungringaxe ihre Stellung im Raum behauptet und sich dabei im Laufe der Zeit aus der Horizontalen des Beobachtungsortes entfernt, ändern sich diese Werte der Geschwindigkeiten stetig, bleiben aber dauernd von der Gröfsenordnung ω.

Jetzt stellen wir uns vor, dafs die beschriebene Bewegung der Ringe auch bei nicht verschwindender Masse derselben zwangläufig aufrecht erhalten werde. Hierzu ist erforderlich, dafs den Ringen zu Anfang der Bewegung die Impulse $A_1 \omega \cos \varphi \sin \lambda$, $A_2 \omega \sin \varphi$ erteilt werden, wo A_1 und A_2 die Trägheitsmomente des inneren und äufseren Ringes um einen ihrer Durchmesser bedeuten, und dafs diese Impulse in der Weise abgeändert werden, wie es der Veränderlichkeit der Drehgeschwindigkeiten entspricht. Sie bleiben dabei von der Gröfsenordnung $A_1 \omega$ und $A_2 \omega$. Setzen wir sie mit dem Impuls der Eigenrotation des Schwungringes zusammen, welcher im Wesentlichen $C\Omega$ beträgt, so ergiebt sich ein Gesamtvektor, der nach Richtung und Gröfse jedenfalls nur wenig von dem konstanten Eigenimpuls des Schwungringes abweicht. Der Richtungsunterschied sowie der verhältnismäfsige Gröfsenunterschied beider Vektoren ist nämlich von der Gröfsenordnung ω/Ω, wenn wir das Verhältnis der Trägheitsmomente A_1/C und A_2/C, indem wir ungünstig rechnen, der Gröfsenordnung nach gleich 1 setzen. (Bei der wirklichen Ausführung des Foucaultschen Gyroskops sind diese letzteren Verhältnisse sogar wesentlich kleiner als 1.)

Wir können hiernach sagen: zu der von uns fingierten zwangläufigen Bewegung der Ringmassen, wie sie sich bei Festhaltung der Schwungringaxe ergeben würde, gehört ein Gesamtimpuls, der nach Richtung und Gröfse als konstant angesehen werden darf, sofern wir

Hosted by Google

Richtungs- und Gröſsenänderungen von der Ordnung ω/Ω vernachlässigen. Er bleibt also in demselben Sinne und mit demselben Genauigkeitsgrade konstant, wie die Figurenaxe bei Absehung von den Ringmassen ihre Lage im Raume beibehält. In der That war auch die Unveränderlichkeit der Schwungringaxe nur eine angenäherte, wie im Anschluſs an Gl. (2) hervorgehoben wurde, und nur eine bei Vernachlässigung des Gröſsenverhältnisses ω/Ω zutreffende.

Wir schlieſsen hieraus, indem wir nunmehr von der bisher betrachteten erzwungenen zu der freien Bewegung des Massensystems: Schwungring, innerer und äuſserer Ring, übergehen, daſs diese Bewegung bei gleicher Wahl des Anfangszustandes mit jener identisch ausfällt, sofern wir nur Unterschiede von der Gröſse ω/Ω vernachlässigen. Denn für die freie Bewegung ist zu fordern, daſs bei dieser der Gesamtimpuls des Massensystems nach Richtung und Gröſse im Raum konstant bleibe. Dieser Forderung genügt innerhalb der Genauigkeitsgrenze ω/Ω die bisher betrachtete erzwungene Bewegung. Daher stimmt dieselbe innerhalb derselben Genauigkeitsgrenze mit der natürlichen Bewegung des Maſsensystems überein.

Mit anderen Worten: *Der Einfluſs der Massen des Cardanischen Gehänges auf die Bewegung des Foucaultschen Gyroskopes von drei Freiheitsgraden ist nur von der Gröſsenordnung* ω/Ω *und läſst sich in der Beobachtung auf keine Weise nachweisen.* Er darf nicht nur, sondern er muſs konsequenter Weise vernachlässigt werden, wenn anders man überhaupt mit Foucault von der Unveränderlichkeit der Schwungringaxe sprechen will. —

Um Miſsverständnissen entgegenzutreten, wollen wir noch ausdrücklich hervorheben, daſs die bei der Foucaultschen Beobachtungsmethode zu messende Winkeländerung des äuſseren Ringes gegen die Erde (oder die Horizontalkomponente der relativen Bewegung der Schwungringaxe) nicht ihrerseits von der hier vernachlässigten Gröſsenordnung ist. Jene Winkeländerung betrug nämlich $\omega \sin\varphi\, \Delta t$. Ihr Verhältnis gegen Gröſsen von der Ordnung ω/Ω ist $\Omega \sin\varphi\, \Delta t$. Hier bedeutet $\Omega\, \Delta t$ den Drehungswinkel des Schwungringes während der Beobachtungszeit, also bei einigermaſsen schneller Rotation und einer beispielsweisen Beobachtungszeit von 8 Minuten, ein auſserordentlich groſses Vielfaches von 2π. Wir erkennen hieraus, daſs der Wert des zu beobachtenden gyroskopischen Effektes durch Vernachlässigungen von der Ordnung ω/Ω in keiner Weise getrübt wird. —

Von ungleich gröſserem Einfluſs wie die Massen der Aufhängeringe dürfte die *Reibung* sein. Wir denken dabei teils an die Reibung in der Führungsaxe des äuſseren Ringes, teils an diejenigen Wider-

Hosted by Google

stände, die sich zwischen den Schneiden des inneren Ringes und ihren Auflagerflächen am äufseren Ringe entwickeln. Die Untersuchung dieser Fehlerquellen, zu denen sich noch Luftwiderstand, Luftströmungen, Erwärmung des Materials etc. gesellen, wäre für das wirkliche Verständnis der Foucaultschen Versuche jedenfalls wichtiger als die pag. 736 erwähnten unnötig allgemeinen und mathematisch ausgesponnenen Betrachtungen über Relativbewegungen.

Den Einfluſs der Lagerreibungen können wir uns in vergröſsertem und vergröbertem Maſsstabe durch ein einfaches Experiment klar machen. Wir nehmen einen Kreisel im Cardanischen Gehänge, dessen Schwerpunkt im Mittelpunkt des Gehänges liegt (Fig. 2). Den Schwungring versetzen wir in starke Rotation und stellen seine Axe anfangs horizontal. Darauf drehen wir das Gestell langsam um die Vertikale. Liegen die Verhältnisse günstig, d. h. ist die Reibung in den Lagern gering, die Eigenrotation stark und die Drehung des Gestelles langsam, so behält die Schwungringaxe zunächst ihre ursprüngliche Lage scheinbar bei und hält dadurch auch die Ebene des äuſseren Ringes im Raume fest. Dies Ergebnis ist aber nur eine Folge ungenauer Beobachtung. Bei länger anhaltender Drehung des Gestelles oder bei absichtlich vermehrter Lagerreibung sehen wir, daſs sich die Axe des Schwungringes langsam hebt und dabei den inneren Ring schief stellt, während der äuſsere scheinbar fortfährt, seine ursprüngliche Lage im Wesentlichen beizubehalten. Drehen wir andrerseits das Gestell um die horizontale Axe des inneren Ringes, so bemerken wir ebenfalls zunächst ein scheinbares Stehenbleiben der Schwungringaxe, wodurch der innere Ring in seiner ursprünglichen Horizontalebene festgehalten wird. Bei länger anhaltender Drehung oder bei vermehrter Reibung sehen wir aber, daſs die Axe des Schwungringes seitlich in der Horizontalebene ausweicht, wobei sie die Ebene des äuſseren Ringes um deren Axe verdreht.

Der Grund dieser Bewegungen liegt offenbar in der Reibung. Drehen wir das Gestell um die Vertikale, so bewegen sich die Lager des äuſseren Ringes relativ gegen dessen Zapfen, welche durch den Schwungring annähernd festgehalten werden, und es entsteht ein Reibungsmoment um die Drehaxe des *äuſseren* Ringes; dieses setzt, wie wir bei dem Versuch sehen, in erster Linie nicht den äuſseren, sondern den *inneren* Ring in Bewegung. Drehen wir aber das Gestell um die vorher genannte horizontale Axe, so tritt ein Gleiten der Lager des inneren Ringes gegen dessen Zapfen und im Zusammenhange damit ein Reibungsmoment um die Axe des *inneren* Ringes auf; dasselbe versetzt nicht den inneren, sondern vornehmlich den *äuſseren* Ring in Bewegung.

Hosted by Google

Die Erklärung dieser abermals paradoxen Erscheinungen läſst sich wenigstens qualitativ aus der Theorie des schweren Kreisels entnehmen. Unser im Schwerpunkte unterstützter Schwungring verhält sich unter dem Einfluſs eines Reibungsmomentes um die Drehaxe des *inneren* Ringes mutatis mutandis wie ein schwerer Kreisel. Denn das genannte Reibungsmoment hat, gerade so wie die Schwere beim Nicht-Zusammenfallen von Schwerpunkt und Stützpunkt, die zur Figurenaxe senkrechte horizontale Gerade („Knotenlinie") zur Axe. Die Folge ist eine pseudoreguläre Präcession des Schwungringes, bei welcher die Figurenaxe des Schwungringes in der Horizontalebene ausweicht. Die Ebene des inneren Ringes bleibt dabei im Mittel horizontal, die des *äuſseren* Ringes wird verdreht. Die Überlegung läſst sich entsprechender Weise auch auf die zuerst betrachtete Drehung um die vertikale Drehaxe des *äuſseren* Ringes übertragen und ergiebt dabei eine Präcession des Schwungringes in einer Vertikalebene, also eine Verdrehung des *inneren* Ringes. Übrigens kommen wir auf diesen letzteren Fall im folgenden Kapitel bei dem Geradlaufapparat des Torpedos zurück, woselbst wir eine eingehendere Theorie der fraglichen Erscheinung geben werden.

Auf den Foucaultschen Versuch übertragen sich diese Ergebnisse wie folgt: Was bei uns das Gestell des Kreisels, ist bei Foucault die Erde. Ihre Drehung findet um die Polaraxe statt. Wir zerlegen sie in drei Drehungen um die Lotlinie, d. h. die Drehaxe des äuſseren Ringes, um die ursprünglich horizontale Drehaxe des inneren Ringes und um die Figurenaxe des Schwungringes. Die den beiden ersten Drehkomponenten entsprechenden Reibungswiderstände wirken in der Weise unseres Versuches auf den Schwungring; die eine verdreht den inneren Ring und lenkt dabei die Axe des Schwungringes in vertikalem Sinne ab, die andere verdreht den äuſseren Ring und bewirkt eine Horizontalablenkung der Schwungringaxe. Beide Umstände stören diejenige scheinbare Bewegung, die die im Raum feste Schwungringaxe nach Foucault relativ zur Erde beschreiben soll. Die dritte nach der Figurenaxe genommene Komponente der Erddrehung kommt nicht weiter in Betracht; das entsprechende Reibungsmoment addiert sich zu der von der Eigenrotation herrührenden Reibung der Schwungringaxe in ihren Lagern und ist gegen diese zu vernachlässigen.

Es sind mithin bei dem Foucaultschen Versuch verschiedene Reibungseinflüsse thätig, welche die absolute Ruhe der Schwungringaxe stören.

Es entsteht nun die Frage, wie man über diese Reibungseinflüsse Herr werden kann. Das Mittel hierzu liefert abermals eine *hinreichend hohe Eigenrotation des Schwungringes.* (Foucault selbst läſst uns über die Rolle die der Eigenrotation bei seinen Versuchen zufällt, wie schon oben

Hosted by Google

erwähnt, einigermaſsen im Unklaren.) Mit Rücksicht auf die Anfangsbewegung der Schwungringaxe sahen wir, daſs die Eigenrotation die Aufgabe hat, den von dieser Axe im Allgemeinen beschriebenen *Präcessionskegel hinreichend enge zu machen.* Mit Rücksicht auf die Reibung dagegen müssen wir sagen, die Eigenrotation bezweckt, die zu den verschiedenen Reibungseinflüssen gehörigen *Präcessionsgeschwindigkeiten möglichst langsam zu machen.* Es handelt sich dabei wohlgemerkt jetzt um ganz andere Präcessionsbewegungen wie früher. Bei der durch die Reibung bewirkten Präcessionsbewegung, auf die wir nach Analogie mit dem schweren Kreisel schlossen, beschreibt die Axe des Schwungringes einen in eine Ebene ausgearteten Kegel (oder Fächer) und zwar einen solchen in der Horizontal- oder Vertikalebene, je nachdem wir allein das Reibungsmoment um die Drehaxe des inneren oder allein das um die Drehaxe des äuſseren Ringes betrachten. (In Wirklichkeit werden sich natürlich beide Bewegungen überlagern und es werden auch noch minimale Schwankungen hinzutreten, die in der früher betrachteten Präcessionsbewegung ihren Grund haben.) Da die Präcessionsgeschwindigkeit des schweren Kreisels gleich P/N war, wo P das Moment der Schwere und N den Eigenimpuls des Kreisels bedeutet, [vgl. z. B. p. 305 Gl. (13)], so wird die Geschwindigkeit der durch die Lagerreibung bewirkten Präcession analog gleich M/N werden, wo M das eine oder andere Reibungsmoment, N wiederum den Eigenimpuls bedeutet. Durch Vergröſserung von N kann man jedenfalls diese Präcessionsgeschwindigkeit so klein machen, daſs während einiger Minuten Beobachtungszeit die Kreiselaxe überhaupt noch nicht merklich aus ihrer Anfangslage im Raum abgewichen ist. Jedenfalls sehen wir, daſs, wenn es überhaupt erlaubt ist, von der Reibung abzusehen, dies nur für einen nicht zu langen Zeitraum und dank einem hinreichend groſsen Eigenimpulse gestattet ist. *Wennschon der Eigenimpuls die Wirkung der Reibungsmomente nicht aufheben kann, so kann er doch ev. das Zeitmaſs dieser Wirkung so reduzieren, daſs dieselbe für eine nicht zu lange Beobachtungszeit unwesentlich wird.*

Wie groſs man aber den Eigenimpuls wählen muſs, um dieses zu erreichen, läſst sich theoretisch nicht bestimmen, da es hierbei auf die Gröſse der Reibungsmomente M, also auf die Konstruktion der Lager und Schneiden ankommt. Hier hätte die genaue experimentelle Untersuchung der Fehlerquellen einzusetzen, die bei Foucault selbst zu fehlen scheint. Das experimentelle Genie von Foucault bürgt uns dafür, daſs die Reibungswirkungen M bei seinem Apparat sehr klein waren; wie klein sie aber waren, darüber gewinnen wir aus seinen Mitteilungen kein Urteil.


Hosted by Google

Eine andere Schwierigkeit des ersten Foucaultschen Versuches, nämlich die Notwendigkeit einer sehr genauen Zentrierung des Schwungringes*), wird durch eine glückliche Modifikation des Gyroskops, das sog. *Barogyroskop*, umgangen, von dem unten die Rede sein wird.

Wir gehen zunächst zu dem zweiten Foucaultschen Versuch (Kreisel von zwei Freiheitsgraden) über und haben hier die beiden interessanten Sätze zu beweisen, daſs a) ein in der Horizontalebene beweglicher Schwungring wie eine Deklinationsnadel, b) ein in der Meridianebene beweglicher mutatis mutandis wie eine Inklinationsnadel sich verhält.

Der Beweis beider Sätze ist unmittelbar einleuchtend, wenn wir uns auf den früher entwickelten Begriff des Deviationswiderstandes stützen (vgl. Kap. III § 6); umständliche analytische Entwickelungen, wie sie für diesen Zweck von Gilbert**) gegeben sind, scheinen hier ebensowenig am Platze, wie im vorigen Falle. Die folgenden einfachen Betrachtungen stimmen im Resultat mit den Gilbertschen Entwickelungen überein.

a) *Drehaxe des äuſseren Ringes in die Lotlinie gestellt, innerer Ring unter einem rechten Winkel gegen den äuſseren festgeklemmt, Schwungringaxe die Horizontalebene bestreichend.* Wir zerlegen die Erdrotation ω in zwei Komponenten nach der Lotlinie und dem Meridian des Beobachtungsortes. Die erste Komponente beträgt $\omega \sin \varphi$, wenn φ die geographische Breite ist. Dieselbe beeinfluſst bei hinreichend geringer Reibung in den Zapfen des äuſseren Ringes die absolute Lage des Schwungringes nicht; der Schwungring macht diese Drehung einfach nicht mit, wobei er natürlich auch den inneren und äuſseren Ring verhindert, dieser Drehung zu folgen, und verhält sich hinsichtlich dieser Komponente ebenso wie der Kreisel von drei Freiheitsgraden hinsichtlich der gesamten Erdrotation. Die andere Komponente ist $\omega \cos \varphi$. Denken wir uns die Lage des Schwungringes in der Horizontalebene für einen Augenblick fixiert, so würde diese Komponente die Axe des Schwungringes auf einem Kreiskegel um den Meridian herumführen und der Kreisel eine reguläre Präcession beschreiben. Vermöge seiner Trägheit widerstrebt er dieser Führung mit einem Momente, dessen Axe gleichzeitig auf der Figurenaxe und der Axe des Präcessionskegels senkrecht steht, in unserem Falle also in die Lotlinie fällt. Die Gröſse des Momentes beträgt nach p. 175 Gl. (1), wenn wir für die dort mit ν bezeichnete Präcessionsgeschwindigkeit den Wert

---

*) Vgl. die oben cit. Instructions sur les Expériences du gyroscope.

**) Vgl. § XV und XVI der p. 736 citierten Arbeit: Mémoire sur l'application etc.

Hosted by Google

$\omega \cos \varphi$ eintragen und den Eigenimpuls N des Schwungringes*) in die Formel einführen:

$$(3) \qquad K = -\omega \cos \varphi \sin \vartheta \, (N - A\omega \cos \varphi \cos \vartheta);$$

ϑ meint hierbei den Winkel zwischen der Figurenaxe des Kreisels und der Axe des Präzessionskegels, d. h. in unserem Falle den Winkel zwischen Figurenaxe und Meridian. Zur Fixierung des Vorzeichens werde festgesetzt, daſs wir ϑ von der nördlichen Seite des Meridians aus zählen wollen und daſs wir diejenige Seite der Schwungringaxe als (positive) Figurenaxe rechnen, um welche die Eigenrotation in demselben Sinne erfolgt, wie die Erdrotation um die Verbindungslinie Erdmittelpunkt—Nordpol, daſs wir also mit Benutzung der pag. 734 eingeführten Ausdrucksweise die Figurenaxe vom Mittelpunkte des Schwungringes nach dem „Nordpol“ desselben gezogen denken. Das Produkt ωN in Gl. (3) ist auf Grund dieser Festsetzungen eine *positive* Gröſse.

Übrigens ist in (3) das zweite Glied der Klammer gegen das erste unbedingt zu streichen. Jenes Glied verhält sich nämlich zu diesem der Gröſsenordnung nach wie $A\omega$ zu N oder (unter Absehung von der Verschiedenheit des äquatorialen und polaren Trägheitsmomentes) wie die Geschwindigkeit der Erdumdrehung zur Winkelgeschwindigkeit des Schwungringes oder wie die Dauer einer Schwungringumdrehung zur Länge des Tages. Wir schreiben daher statt (3) kürzer:

$$(3') \qquad K = -N\omega \cos \varphi \sin \vartheta.$$

Soll nun die vorausgesetzte Präcessionsbewegung des Schwungringes unter der unveränderlichen Neigung ϑ gegen den Meridian aufrecht erhalten werden, so müſste ein Moment $-K$ um die Lotlinie ausgeübt werden, welches den Trägheitswiderstand K überwindet. Geschieht dieses nicht, so bewegt sich der Schwungring so, als ob ein Moment $+K$ um die Lotlinie wirkt, welches den Winkel ϑ verändert. Die Lotlinie ist für den Schwungring eine äquatoriale Hauptaxe, desgleichen für den äuſseren Ring, für den inneren Ring dagegen die Figurenaxe desselben. Nennen wir A_1, C_1, A_2, C_2 die bez. äquatorialen und polaren Hauptträgheitsmomente des inneren und äuſseren Ringes, so wird für die Drehung um die Lotlinie die Summe der in

---

*) Der Eigenimpuls N drückt sich (vgl. z. B. p. 222 oben) durch die Eulerschen Winkel φ, ψ, ϑ folgendermaſsen aus: $N = C(\varphi' + \cos \vartheta \, \psi')$; die Winkelgeschwindigkeiten φ' und ψ' sind aber in Gl. (1) von p. 175 mit μ und ν bezeichnet. Es wird daher auch: $N = C(\mu + \cos \vartheta \cdot \nu)$. Selbstverständlich hat der Eulersche Winkel φ nichts mit der im Text benutzten geographischen Breite φ zu thun.



Frage kommenden Trägheitsmomente von Schwungring, innerem und äufserem Ring $A + C_1 + A_2$. Die Bewegungsgleichung wird mithin:

(4) $$(A + C_1 + A_2)\,\vartheta'' = K = -N\omega \cos\varphi \sin\vartheta.$$

Dafs gleichzeitig der Eigenimpuls des Schwungringes durch die Erddrehung nicht geändert wird, ist selbstverständlich, weil die Axe von K auf der Figurenaxe senkrecht steht. N ist daher in der vorigen Gleichung eine Konstante, in welchem Umstande wir diejenige zweite Gleichung erblicken können, die zur vollständigen Beschreibung der Bewegung unseres Kreisels von zwei Freiheitsgraden neben (4) erforderlich ist.

Gl. (4) zeigt nun unmittelbar Folgendes: *Im Gleichgewicht befindet sich die Schwungringaxe nur dann, wenn dieselbe die Richtung des Meridianes hat.* Denn wir haben $\vartheta'' = 0$ nur dann, wenn entweder $\vartheta = 0$ oder $\vartheta = \pi$ ist. *Von den beiden Gleichgewichtslagen* $\vartheta = 0$ *und* $\vartheta = \pi$ *ist die erstere eine stabile, die letztere eine labile.* Denn vermöge des Vorzeichens der rechten Seite von (4) wird bei einer Störung der Gleichgewichtslage $\vartheta = 0$ die Schwungringaxe durch die auftretende Winkelbeschleunigung nach dieser Lage zurückgeführt, dagegen bei einer Störung der Gleichgewichtslage $\vartheta = \pi$ von dieser entfernt. *In der stabilen Gleichgewichtslage befindet sich die Eigenrotation des Schwungringes mit der meridionalen Komponente der Erdrotation im gleichsinnigen Parallelismus.* Denn wir wollten, um das Vorzeichen von ωN positiv zu machen, den Winkel ϑ zwischen Meridian und Figurenaxe so bestimmen, dafs die Eigenrotation um die Figurenaxe in demselben Sinne erfolgt, wie die Erddrehung um die Erdaxe oder wie die meridionale Komponente derselben um die nördliche Hälfte des Meridians, von der aus wir den Winkel ϑ zählen. *Die von Foucault hervorgehobene Tendenz zum gleichsinnigen Parallelismus der Drehaxen zeigt sich in dem Auftreten der nach der stabilen Gleichgewichtslage hin gerichteten Beschleunigung der Schwungringaxe.*

Am einfachsten und vollständigsten läfst sich die in Rede stehende Bewegung beschreiben, wenn wir sie mit der Bewegung eines mathematischen Pendels vergleichen. In der That ist (4) nichts anderes, als die gewöhnliche Differentialgleichung der Pendelbewegung. Die letztere können wir, wenn wir unter l die Länge des Pendels und unter ϑ denjenigen Winkel verstehen, den l mit der stabilen Gleichgewichtslage, d. h. mit der Schwererichtung jeweils einschliefst, schreiben:

(4′) $$\vartheta'' = -\frac{g}{l} \sin\vartheta.$$

Um die Gl. (4) und (4′) in einander überzuführen, ist es nur nötig, l so zu wählen, dafs


Hosted by Google

(5) $$l = \frac{g(A + C_1 + A_2)}{N\omega \cos\varphi}.$$

Diese Formel giebt die Länge des korrespondierenden mathematischen Pendels an, dessen Bewegung bei gleichen Anfangswerten von ϑ und ϑ' mit der Bewegung unseres Schwungringes genau identisch ist. Länge und Schwingungsdauer des Pendels wird um so kleiner, je gröfser N ist; dementsprechend nimmt die Richtkraft der Erddrehung auf unseren Schwungring mit der Gröfse des Eigenimpulses N zu.

Auch der Vergleich mit der Deklinationsnadel läfst sich jetzt aufs einfachste durchführen. Da nämlich die Bewegungsgleichung einer solchen lautet $J\vartheta'' = -MH \sin\vartheta$, wo J das Trägheitsmoment der Nadel, M das magnetische Moment derselben und H die Horizontalintensität des Erdmagnetismus bedeutet, so wird die Länge des dieser Magnetnadel korrespondierenden mathematischen Pendels

(5') $$l = \frac{gJ}{MH}.$$

Indem man die in (5) und (5') angegebenen Pendellängen gleichsetzt, erkennt man, wie sich die von Foucault ausgesprochene Zuordnung des rotierenden Schwungringes mit der Magnetnadel auch quantitativ durchführen läfst. Stellt man sich z. B. vor, dafs das Trägheitsmoment J der Nadel mit dem für die Bewegung des Schwungringes in Betracht kommenden gesamten Trägheitsmoment $A + C_1 + A_2$ der Kreiselvorrichtung übereinstimmt, so hätte man den Eigenimpuls des Schwungringes einfach so zu wählen, dafs $N\omega \cos\varphi = MH$ ist; *alsdann wird die Bewegung unseres Schwungringes vom Eigenimpuls N bei gleichen Anfangswerten von ϑ und ϑ' ein kongruentes Abbild der Bewegung einer Magnetnadel vom magnetischen Momente M.*

b) *Drehaxe des äufseren Ringes senkrecht gegen die Meridianebene gerichtet, innerer Ring senkrecht gegen den äufseren festgestellt, Schwungringaxe in der Meridianebene beweglich.*

Von einer Zerlegung der Erdrotation in Komponenten haben wir hier abzusehen, weil die Gesamtrotation ω die Lage des Schwungringes in der Meridianebene beeinflufst. Denken wir uns den Winkel ϑ zwischen der Axe des Schwungringes und der Axe der Erdrotation für einen Augenblick festgehalten, so würde der Schwungring eine reguläre Präcession um die Erdaxe beschreiben. Dem widerstrebt er vermöge seiner Trägheit mit einem Momente K, dessen Axe gleichzeitig auf der Axe des Schwungringes und der der Erdrotation senkrecht steht, also in die Normale zur Meridianebene, d. h. in die Drehaxe des äufseren Ringes fällt. Die Gröfse des Momentes beträgt nach p. 175 Gl. (1),


Hosted by Google

wenn wir nunmehr ω statt ν und N statt $C(\mu + \nu \cos \vartheta)$ eintragen,

$$K = -\omega \sin \vartheta (N - A\omega \cos \vartheta). \tag{6}$$

Ebenso wie unter a) haben wir das zweite Glied der Klammer gegen das erste zu vernachlässigen, so daſs einfacher wird:

$$K = -N\omega \sin \vartheta. \tag{6'}$$

Setzen wir ähnlich wie unter a) fest, daſs wir die Figurenaxe vom Mittelpunkte des Schwungringes nach derjenigen Seite hin ziehen, von der aus gesehen die Rotation des Schwungringes in demselben Sinne erfolgt wie die Erdrotation um den Nordpol, und messen wir den Winkel ϑ von der nördlichen Hälfte der Erdaxe nach der so definierten Figurenaxe hin, so wird das Produkt $N\omega$ in der vorigen Gleichung positiv sein.

Soll also der Schwungring in der sich drehenden Meridianebene seine Lage beibehalten, so ist dazu ein Moment $-K$ um die Drehaxe des äuſseren Ringes erforderlich, welches die Trägheitswirkung des Schwungringes überwindet. Wird ein solches Moment nicht ausgeübt, so muſs sich der Winkel ϑ zwischen Erdaxe und Figurenaxe ändern, in solchem Maſse, das das Produkt aus dem Trägheitsmoment der bewegten Teile und der Winkelbeschleunigung gleich K wird. Dies führt ebenso wie oben auf die Differentialgleichung:

$$(A + C_1 + A_2)\vartheta'' = K = -N\omega \sin \vartheta. \tag{7}$$

Aus dieser Gleichung ergeben sich unmittelbar die folgenden Schlüsse: *Der Schwungring befindet sich innerhalb der Meridianebene nur dann im Gleichgewicht, wenn er die Richtung der Erdaxe hat, d. h. nur in den beiden Lagen $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \pi$. Die erstere Lage ist eine stabile die letztere eine labile Gleichgewichtslage. Indem die durch* (7) *bestimmte Beschleunigung den Schwungring nach der stabilen Gleichgewichtslage hinführt, ist sie bestrebt, die Drehaxe des Schwungringes mit der Drehaxe der Erde in homologem Sinne parallel zu richten.*

Auch die jetzige Bewegung ist kongruent mit der Bewegung eines einfachen Pendels. *Die korrespondierende Pendellänge beträgt nunmehr*

$$l = \frac{g(A + C_1 + A_2)}{N\omega}. \tag{8}$$

Andrerseits läſst sich auch die Bewegung der Inklinationsnadel mit der Pendelbewegung identifizieren. Bedeutet J und M Trägheitsmoment und magnetisches Moment der Nadel, T die Totalintensität des Erd-



magnetismus, so wird die Länge des dieser Inklinationsnadel entsprechenden Pendels:

$$l = \frac{gJ}{MT}. \tag{8'}$$

Aus dem Vergleich von (8) *und* (8') *erkennt man, wie sich das Verhalten unserer in der Meridianebene beweglichen Schwungringaxe dem Verhalten der Magnetnadel im Inklinationskompaſs quantitativ zuordnen läſst*, wobei indessen der pag. 735 hervorgehobene Unterschied beider Bewegungen im Auge zu behalten ist.

c) Die vorangehenden Resultate lassen sich leicht zusammenfassen und verallgemeinern, wenn man annimmt, daſs die Axe des Schwungringes in einer *gegen die Erde beliebig gelegenen Ebene E* beweglich sei. Man kann, um dieses zu erreichen, die Ebene des inneren Ringes wieder senkrecht gegen die des äuſseren feststellen und hat dann nur die Drehaxe des äuſseren Ringes relativ gegen die Erde so zu lagern, daſs dieselbe senkrecht auf der Ebene E steht. Bedeutet λ den Winkel zwischen der Axe der Erdrotation und der Ebene E, so kommt als wirksame Komponente der Erdrotation $\omega \cos \lambda$ in Betracht und es ergiebt sich als Länge des korrespondierenden einfachen Pendels:

$$l = \frac{g\,(A + C_1 + A_2)}{\omega N \cos \lambda}. \tag{9}$$

Diese Formel geht in den Fällen a) und b), wo im Besonderen $\lambda = \varphi$ bez. $\lambda = 0$ wird, in die Gl. (5) und (8) über; sie rührt von Gilbert her*).

Noch mögen zwei Bemerkungen hinzugefügt werden über den Einfluſs der Reibung und der Massen des Aufhängesystems; diese Bemerkungen sollen sich gleichmäſsig auf die Fälle a) und b), sowie auf den verallgemeinerten Fall c) beziehen.

Die Reibung in den Lagern des äuſseren Ringes wird sich natürlich auch bei dem Gyroskop von zwei Freiheitsgraden bemerklich machen. Während die Schwingungsamplitude der Schwungringaxe bei Vernachlässigung der Reibung konstant bleiben müſste, wie die obige Betrachtung zeigt, wird sie durch die Reibung allmählich gedämpft. Die Schwungringaxe wird sich also mit abnehmender Amplitude der Schwingungen immer mehr der stabilen Gleichgewichtslage nähern und sich schlieſslich in diese einstellen, wenn die Eigenrotation des Schwung-

*) Gl. (130) in der früher cit. Arbeit: Mémoire sur l'application etc. Wir sind im Texte nur darin von Gilbert abgewichen, daſs wir beim Übergange von (3) zu (3') und von (6) zu (6') ein Glied mit dem Faktor ω^2 unterdrückt haben, welches mit Rücksicht auf den Genauigkeitsgrad des ganzen theoretischen Ansatzes keine Bedeutung hat.


Hosted by Google

ringes hinreichend lange anhält. Hinsichtlich der quantitativen Verhältnisse dürfen wir uns dabei einfach auf die Analogie mit dem einfachen Pendel oder mit der Magnetnadel berufen. Bei ähnlicher Konstruktion der Lager wird die Reibungswirkung bei den in Rede stehenden Versuchen eine ähnliche sein, wie bei dem einfachen Pendel und bei den Schwingungen einer Magnetnadel, die ihrerseits natürlich stets gedämpfte Schwingungen sind.

Was die Massenwirkung des äufseren und inneren Ringes betrifft, so könnte es auffallen, dafs wir dieselbe in unseren letzten Formeln zum Ausdrnck gebracht haben, während wir bei der Besprechung des ersten Foucaultschen Versuches sagten, dafs sie zu vernachlässigen sei. Dies erklärt sich daraus, dafs im ersten Foucaultschen Versuche (bei Vernachlässigung der Reibung) die Schwungringaxe im Raume merklich feststeht und die Ringmassen nur Drehgeschwindigkeiten von der Ordnung der Erdrotation ausführen, dafs dagegen im zweiten Foucaultschen Versuch die Schwungringaxe wirkliche Beschleunigungen erfährt, an denen die zu einem Ganzen verbundenen Mafsen des äufseren und inneren Ringes teilnehmen. Während im ersten Foucaultschen Versuche der Einflufs der Ringmassen auf die zu beobachtende Gröfse der relativen Bewegung des Schwungringes verschwindend klein war (von der Ordnung ω/Ω vgl. p. 742), wird er im zweiten Foucaultschen Versuch von derselben Gröfsenordnung wie die zu beobachtenden Bewegungen der Schwungringaxe selbst, so dafs sich z. B. in der Formel (9) das Trägheitsmoment der Ringe C_1, A_2 zu dem des Schwungringes A direkt hinzuaddiert. —

Es bleibt uns schliefslich noch übrig, von einer zweckmäfsigen Abänderung des Foucaultschen Gyroskops, dem schon genannten *Barogyroskop* von Gilbert zu sprechen. Wie der Name besagt, kommt bei diesem Apparat aufser der Erdrotation auch die Schwere ins Spiel. Wir schildern die Einrichtung desselben an Hand der Abbildung*) 111, indem wir den Vergleich mit dem Foucaultschen Gyroskop ziehen.

In der Figur sieht man zunächst den Schwungring D mit seiner Axe a, auf welcher sich bei E ein Zahnrad zum Anlassen desselben befindet, sowie in der Verlängerung der Axe nach unten hin ein Laufgewicht p. Als inneren Ring können wir hier den Rahmen C bezeichnen, welcher bei A und A' auf Schneiden ruht. Den Bügel S können wir mit dem äufseren Ringe bei Foucault vergleichen. Er läfst sich in der Hülse H verdrehen und auf diese Weise in ein be-

*) Dieselbe ist dem „Katalog mathem. Modelle, Apparate und Instrumente", im Auftrage der deutschen Mathem.-Vereinig. herausgegeben von W. Dyck, Nachtrag p. 79 entnommen.

Hosted by Google

liebiges Azimuth einstellen; bei jedem einzelnen Versuche ist er aber fest, da die Reibung in der Hülse jede selbstthätige Drehung des Bügels hindert.

Man justiert den Apparat so, dafs die Axe AA' genau horizontal unter einem beliebigen Azimuth gegen den Meridian steht, und bringt zunächst durch zweckmäfsiges Verstellen der Schrauben vv' und der Zusatzmassen uu' den Schwerpunkt von Schwungring und Rahmen in

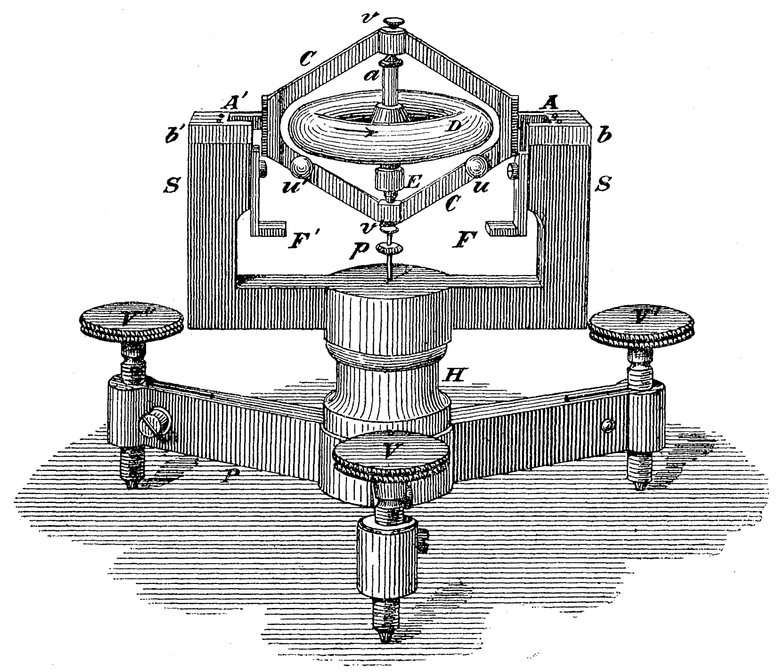


Fig. 111.

die Verbindungslinie der Schneiden AA', so dafs sich der bewegliche Teil des Apparates im neutralen Gleichgewicht befindet. Dann bringt man das Laufgewicht p auf die am unteren Ende des Rahmens befestigte Nadel und verwandelt dadurch die Neutralität des Gleichgewichts in eine (geringe) Stabilität.

Nachdem der Schwungring einen grofsen Eigenimpuls N bekommen hat (bei Gilbert 150 Umdrehungen in der Sekunde), beobachtet man, dafs sich seine Axe oscillatorisch von der Vertikalen entfernt und nachdem die Oscillationen abgestorben sind, unter einer gewissen Neigung, welche unter anderem von dem Azimuth der Aufstellung abhängt, verharrt.

Die Berechnung dieser Neigung und die Theorie des Versuches wird wieder äufserst einfach, wenn man an den Begriff des Deviationswiderstandes anknüpft.

Hosted by Google

Qualitativ können wir folgendermaſsen sagen: Der in einer beliebigen Vertikalebene bewegliche Schwungring befindet sich unter ganz ähnlichen Bedingungen wie der Schwungring im zweiten Foucaultschen Versuch (s. oben unter b) oder c)); um seine Lage innerhalb der Vertikalebene oder seine Stellung gegen die rotierende Erde festzuhalten, wäre die Überwindung des Momentes K erforderlich, welches die Verbindungslinie der Schneiden AA' zur Axe hat. Da ein Gegenmoment $-K$ nicht ausgeübt wird, bewegt sich der Schwungring so, als ob ein Moment K um die genannte Axe auf ihn einwirkt. Dieses strebt die Figurenaxe des Schwungringes der Drehaxe der Erde parallel zu stellen; es lenkt also die Schwungringaxe aus ihrer vertikalen Anfangslage nach derjenigen Richtung hin ab, in welche sich die Axe der Erdrotation auf die Bewegungsebene des Schwungringes projiziert. Auſser diesem Momente wirkt aber jetzt das Moment der Schwere, welches die Figurenaxe des Schwungringes nach der Vertikalen zurücklenkt. Es wird mithin eine gewisse mittlere Lage zwischen der Vertikalen und der Projektion der Erdaxe geben, in welcher sich beide Drehmomente das Gleichgewicht halten und in welcher sich die Axe des Schwungringes demnach in Ruhe befindet.

Um die Überlegung nach der quantitativen Seite zu vervollständigen, ist es nur nötig, das Moment der Schwere M einerseits und das der Trägheitswirkung K andrerseits durch die an dem Apparat zu beobachtenden Gröſsen auszudrücken.

Es sei m die Masse des Laufgewichtes p und δ sein Abstand vom Schwerpunkt des Schwungringes. Bedeutet χ den Winkel, den die Figurenaxe des Schwungringes mit der Vertikalen bildet, von der Vertikalen nach der Figurenaxe hin positiv gerechnet, so wird der Hebelarm der Schwerkraft mg um die Axe der Schneiden $\delta \sin \chi$ und daher das Moment der Schwere im Sinne des Winkels χ

(10) $$M = -mg\delta \sin \chi.$$

Bei der Bestimmung des Deviationswiderstandes K gehen wir wieder von der Gl. (1) p. 175 aus, führen darin den Eigenimpuls N des Schwungringes ein und setzen für ν die Komponente der Erdrotation nach der Bewegungsebene des Schwungringes $\nu = \omega \cos \lambda$, wo λ wie unter c) den Winkel zwischen der Erdaxe und dieser Ebene bedeutet. Wir erhalten so, wenn wir noch ein Glied von der verhältnismäſsigen Gröſsenordnung $A\omega/N$ wie oben streichen:

$$K = -N\omega \cos \lambda \sin \vartheta.$$

ϑ miſst hierbei den Winkel zwischen der Projektion der Erdaxe auf die Bewegungsebene des Schwungringes und der Figurenaxe des letzteren,


Hosted by Google

von jener nach dieser hin positiv gerechnet. In dem gleichen Sinne wie ϑ wird das Moment K gerechnet. Führen wir noch den Winkel μ ein, den die Projektion der Erdaxe auf die Bewegungsebene mit der Vertikalen bildet, ebenfalls von jener nach dieser hin positiv gerechnet, so haben wir $\vartheta = \mu + \chi$ und können schreiben:

(11) $$K = -N\omega\,(\cos\chi\cos\lambda\sin\mu + \sin\chi\cos\lambda\cos\mu).$$

Hier sind die Produkte $\cos\lambda\sin\mu$ und $\cos\lambda\cos\mu$ durch Gröſsen auszudrücken, die der Messung direkter zugänglich sind als die Winkel λ und μ. Wir wählen als solche die geographische Breite φ des Beobachtungsortes und den Winkel α ($< 180^0$), den die Bewegungsebene der Figurenaxe mit dem Meridian des Beobachtungsortes bildet. Auf der um den Mittelpunkt des Schwungringes beschriebenen Einheitskugel markieren wir uns (vgl. Fig. 112) ihren Schnittpunkt V mit der Vertikalen, ihren Schnittpunkt P mit der Parallelen zur Erdaxe und endlich den Punkt Q, der der Projektion der Erdaxe auf die Bewegungsebene des Schwungringes entspricht. Das entstehende sphärische Dreieck PQV ist bei Q rechtwinklig. Seine Hypotenuse beträgt $\pi/2 - \varphi$, seine Katheten sind λ und μ. Der Winkel bei V ist gleich α. Nach der Neperschen Regel gelten die beiden Gleichungen:

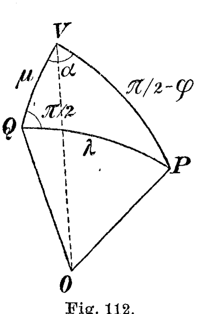


Fig. 112.

(12) $$\sin\varphi = \cos\lambda\cos\mu,\qquad \cos\alpha = \operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\mu,$$

aus welchen durch Multiplikation folgt

(12′) $$\cos\alpha\cos\varphi = \cos\lambda\sin\mu.$$

Setzen wir die in (12) und (12′) bestimmten Werte von $\cos\lambda\cos\mu$ und $\cos\lambda\sin\mu$ in (11) ein, so ergiebt sich

(13) $$K = -N\omega\,(\sin\chi\sin\varphi + \cos\chi\cos\varphi\cos\alpha).$$

Wir können nun sowohl die Gleichgewichtslage wie das Bewegungsgesetz der Schwungringaxe in einfachster Weise bestimmen.

Im *Gleichgewicht* befindet sich die Axe des Schwungringes, wenn die beiden Momente M und K einander aufheben. Zur Bestimmung der Gleichgewichtslage dient daher die Gleichung $M = K$. Bezeichnen wir mit χ_0 denjenigen Wert von χ, welcher der Gleichgewichtslage entspricht, so haben wir nach (10) und (13) zur Bestimmung von χ_0 die Gleichung:

$$mg\delta\sin\chi_0 = N\omega\,(\sin\chi_0\sin\varphi + \cos\chi_0\cos\varphi\cos\alpha)$$

oder

(14) $$\operatorname{tg}\chi_0 = \frac{N\omega\cos\varphi}{mg\delta - N\omega\sin\varphi}\cos\alpha.$$

Hosted by Google